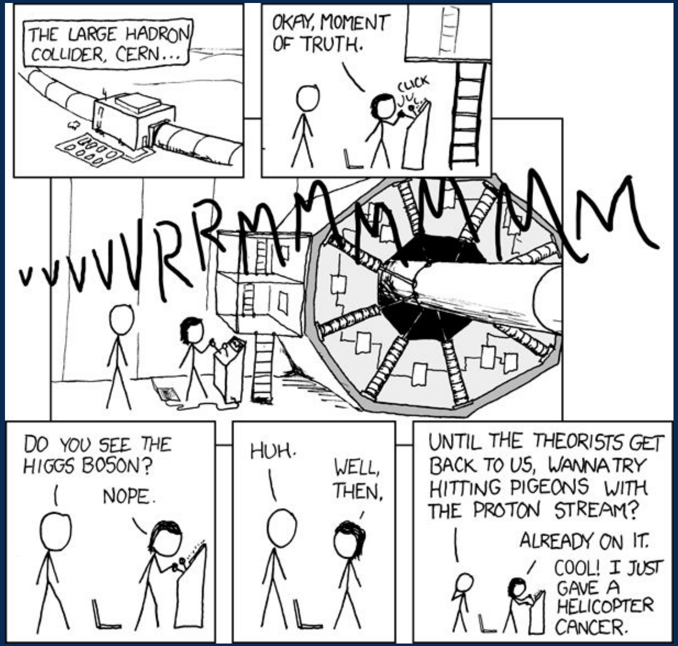
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Physik Institut für Kern- und Teilchenphysik

Statistik und Hypothesentests

Frank Siegert

Institut für Kern- und Teilchenphysik,
TU Dresden
frank.siegert@tu-dresden.de



CERN

ATLAS EXPERIMENT

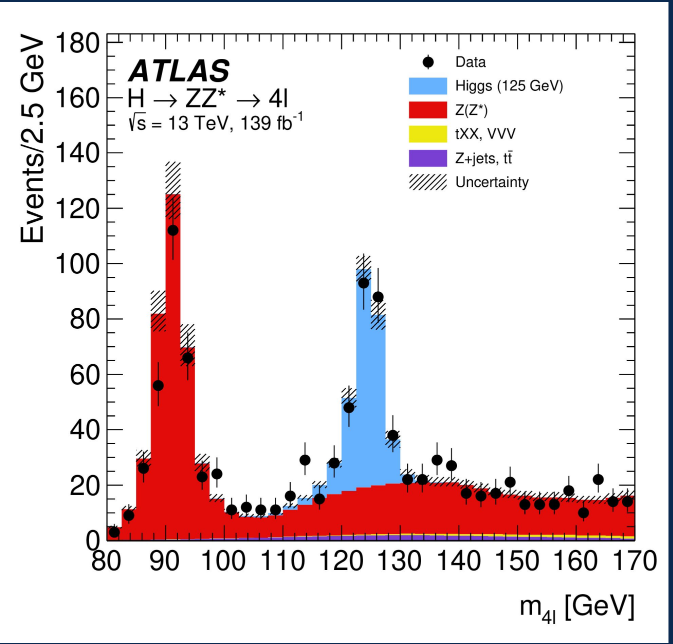
Emmy Noether-Programm
Deutsche Forschungsgemeinschaft
DFG

Statistik und Hypothesentests

Frank Siegert

Institut für Kern- und Teilchenphysik, TU Dresden

frank.siegert@tu-dresden.de



CERN ATLAS EXPERIMENT Emmy Noether-Programm Deutsche Forschungsgemeinschaft DFG

- Viele Prozesse/Größen im Alltag basieren auf Zufall:

Zahl der 6en bei 5 Würfeln

Zahl der Meteoriten, die pro Jahr auf der Erde einschlagen

Zahl der Patienten, die zwischen 10 und 11 Uhr ankommen.

- Quantenphysikalische Prozesse sowieso (Gott würfelt doch!):
  - Exakter Zeitpunkt von An- oder Abregung von Atomen
  - Anzahl von radioaktiven Kernen, die in einem Zeitintervall zerfallen
  - Erzeugung eines Higgs-Bosons in einer Proton-Proton-Kollision am LHC

WANTED:

Zuverlässige Aussagen über die Gesetze der Natur!

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- All diese Beispiele sind **Zählexperimente**:
  - *N* **unabhängige** Messungen …
  - der gleichen **Größe** *X* …
  - unter **identischen** Bedingungen

Wahrscheinlichkeitsverteilung für Werte der Zufallsvariable *X*

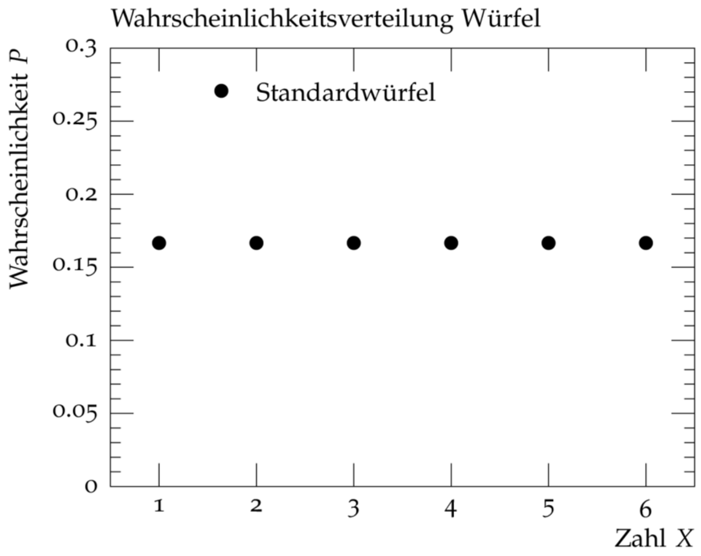
$$P(X) = \frac{\text{Wie häufig ein Ereignis } X \text{ eintritt}}{\text{Anzahl der Messungen } N}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- All diese Beispiele sind **Zählexperimente**:
  - *N* **unabhängige** Messungen ...
  - der gleichen **Größe** *X* ...
  - unter **identischen** Bedingungen
- Einfaches **Beispiel**: *X*=Zahl eines Würfels
  - Langweilige Wahrscheinlichkeitsverteilung
    $P(1) = P(2) = \ldots = P(6) = 1/6$

Wahrscheinlichkeitsverteilung für Werte der Zufallsvariable *X*

$$P(X) = \frac{\text{Wie häufig ein Ereignis } X \text{ eintritt}}{\text{Anzahl der Messungen } N}$$



Wahrscheinlichkeitsverteilungen

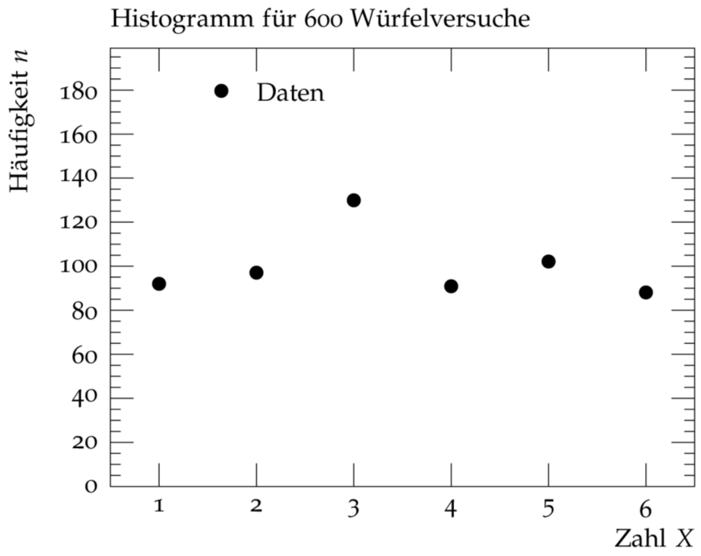
- All diese Beispiele sind **Zählexperimente**:
  - *N* **unabhängige** Messungen ...
  - der gleichen **Größe** *X* ...
  - unter **identischen** Bedingungen

Wahrscheinlichkeitsverteilung für Werte der Zufallsvariable *X*

$$P(X) = \frac{\text{Wie häufig ein Ereignis } X \text{ eintritt}}{\text{Anzahl der Messungen } N}$$

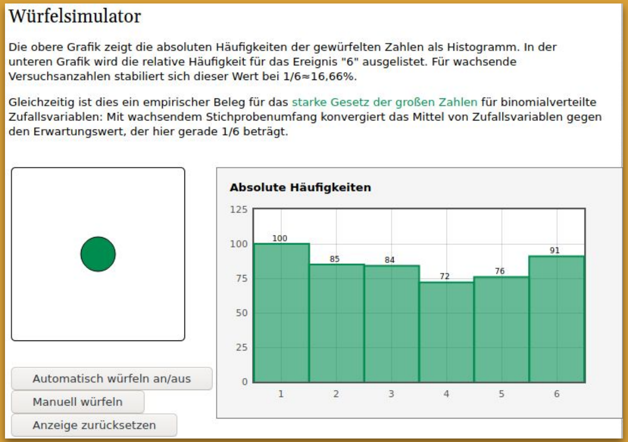
- Einfaches **Beispiel**: *X*=Zahl eines Würfels
  - Langweilige Wahrscheinlichkeitsverteilung
    $P(1) = P(2) = \ldots = P(6) = 1/6$
- **Messung** mit begrenzter Versuchszahl N=600
  → **Schätzung** des zugrundeliegenden P(X)
  - Oft durch Histogramm dargestellt:
    - » x-Achse: Mögliche Werte der Zufallsvariable
    - » y-Achse: Wahrscheinlichkeit bzw. Häufigkeit

  z.B. $n(6)=88 \rightarrow P(6) \approx 88/600$



Selbst ausprobieren:

https://www.mathematik.tu-clausthal.de/de/interaktiv/simulation/wuerfel/



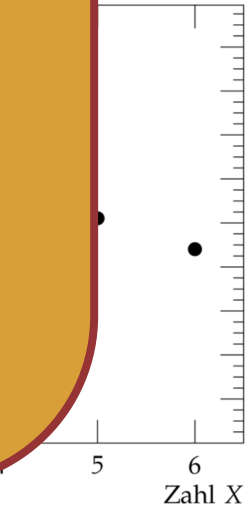
- Ca. 600 Wuerfelversuche probieren ("Automatisch würfeln an/aus")
- Diskussion der Streuung:
  - Ideen für eine Quantifizierung der Ergebnisse?

A … für

X eintritt
en N

E

M



- All diese Beispiele sind **Zählexperimente**: … **ng** für

  … X eintritt / … en N

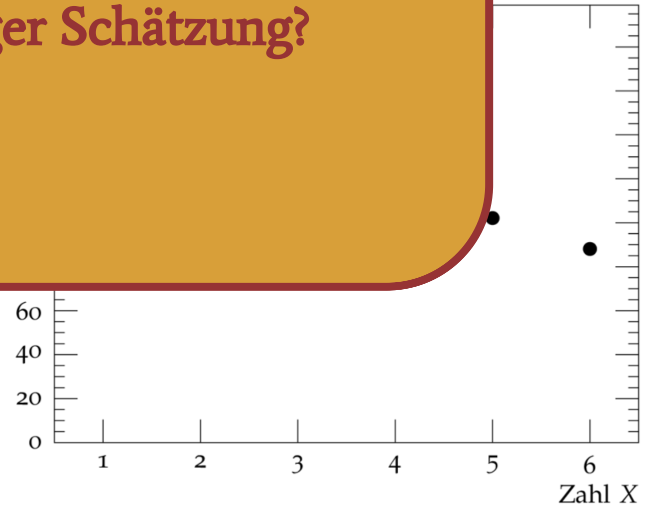
- E…

- **M…**

Zurück zur Anfangsfrage:

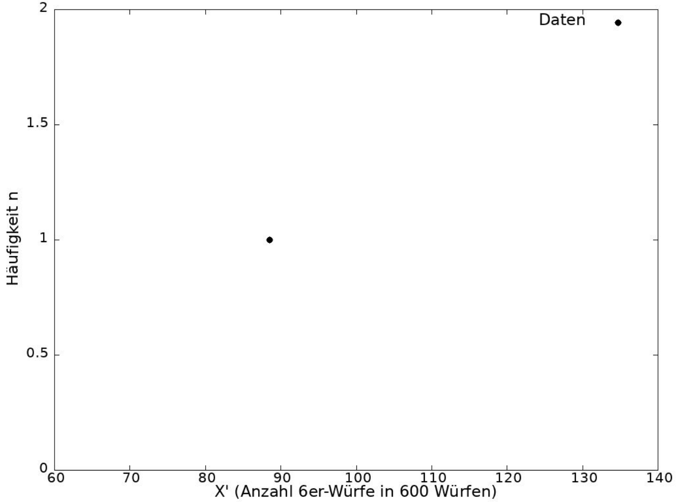
Zuverlässige Aussagen aus zufälliger Schätzung?

z.B. $n(6)=88 \rightarrow P(6) \approx 88/600$



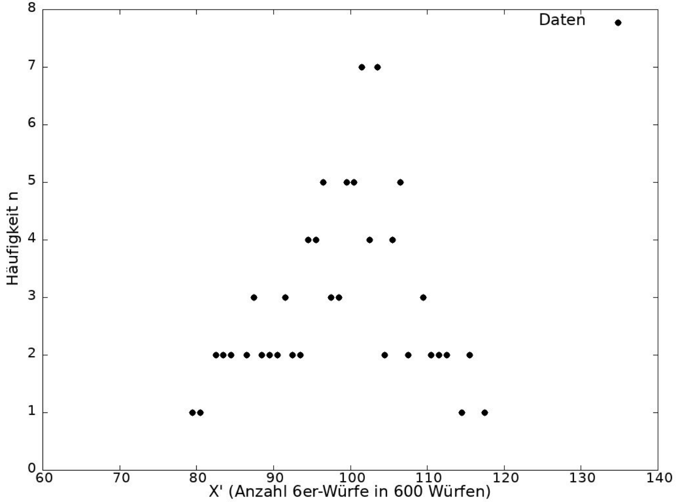
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Wir merken: "$n(6)$" ist **wiederum eine Zufallsvariable**! Nennen wir sie X':
  - Bei unserem einen Versuch ($N'=1$) hatte diese den Wert $X'=88$.



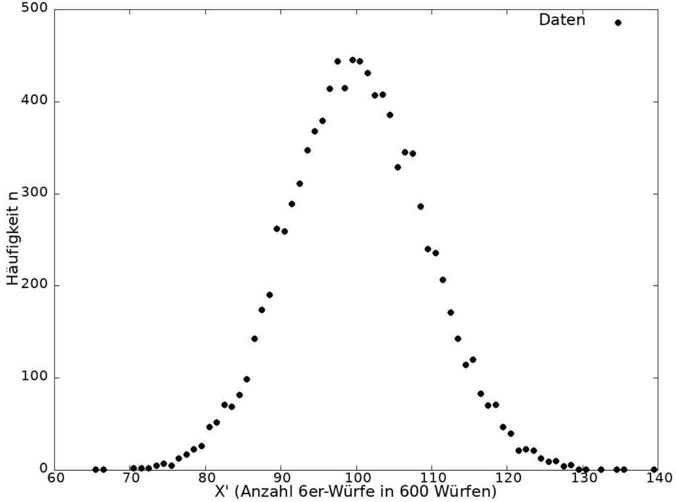
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Wir merken: "*n(6)*" ist **wiederum eine Zufallsvariable**! Nennen wir sie *X'*:
  - Bei unserem einen Versuch (*N'=1*) hatte diese den Wert *X'=88.*
  - Wenn wir das Experiment *N'=100* mal ausführen, sehen wir schon eine Verteilung im Histogramm.



Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Wir merken: "*n(6)*" ist **wiederum eine Zufallsvariable**! Nennen wir sie *X'*:
  - Bei unserem einen Versuch (*N'=1*) hatte diese den Wert *X'=88.*
  - Wenn wir das Experiment *N'=100* mal ausführen, sehen wir schon eine Verteilung im Histogramm.
  - Nach *N'=10000* wird die typische Wahrscheinlichkeits-verteilung sichtbar, die für Zählexperimente gilt:
    - » unabhängige Wiederholungen
    - » der gleichen Messgröße
    - » mit konstanten Bedingungen (Wahrscheinlichkeit)



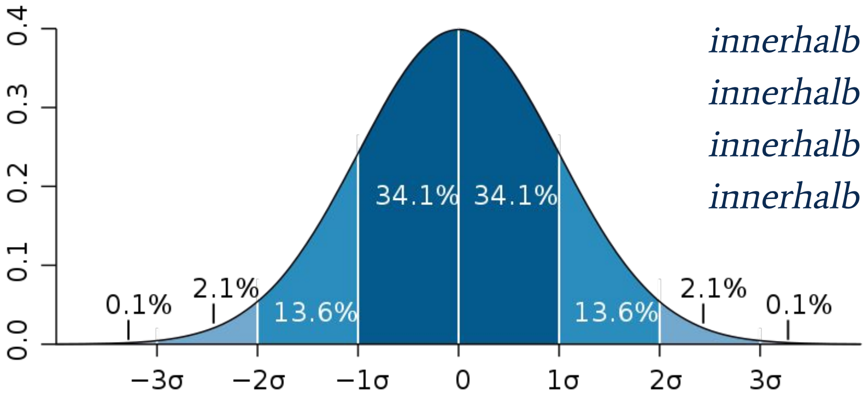
→ **Poissonverteilung** (hier: um λ*=100*)

$$P'(X') = \frac{\lambda^{X'}}{X'!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

bzw. für große λ ($\gtrsim$25) → annähernd **Gauß-Normalverteilung** mit $\mu=\lambda$ und $\sigma^2=\lambda$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

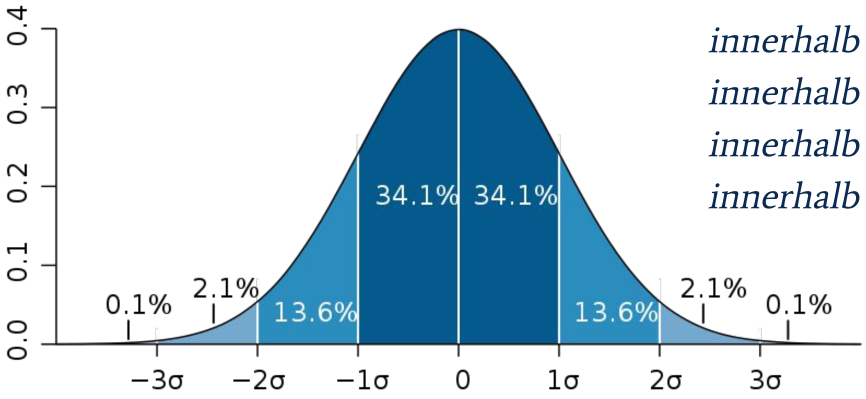
- Normalverteilung mit bekannter Varianz $\sigma^2 = \lambda$
  → ablesbar, wie "selten" welche **Abweichungen** sind:



innerhalb $1\sigma \rightarrow 68\%$
innerhalb $2\sigma \rightarrow 95\%$
innerhalb $3\sigma \rightarrow 99{,}7\%$
innerhalb $5\sigma \rightarrow 99{,}99994\%$

Hypothesentests

- Normalverteilung mit bekannter Varianz $\sigma^2 = \lambda$
  $\longrightarrow$ ablesbar, wie "selten" welche **Abweichungen** sind:



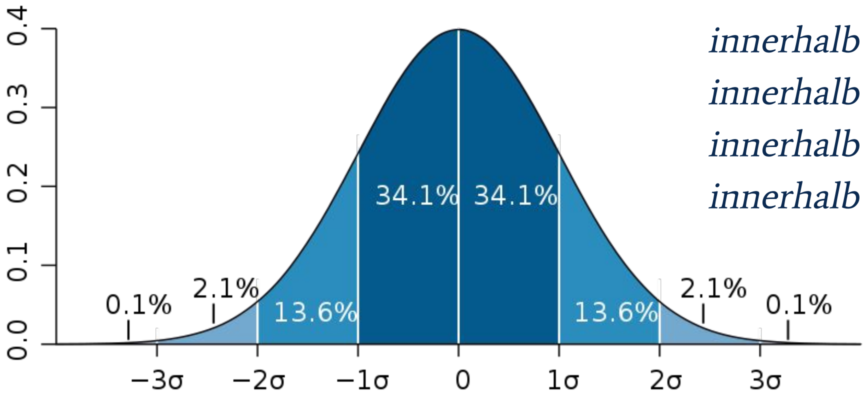
innerhalb 1σ ⟶ 68%
innerhalb 2σ ⟶ 95%
innerhalb 3σ ⟶ 99,7%
innerhalb 5σ ⟶ 99,99994%

- Umgekehrt können wir das **Konfidenzintervall** für jedes Bin **schätzen**, z. B. hier bei *X=6* (mit *X'=88*):

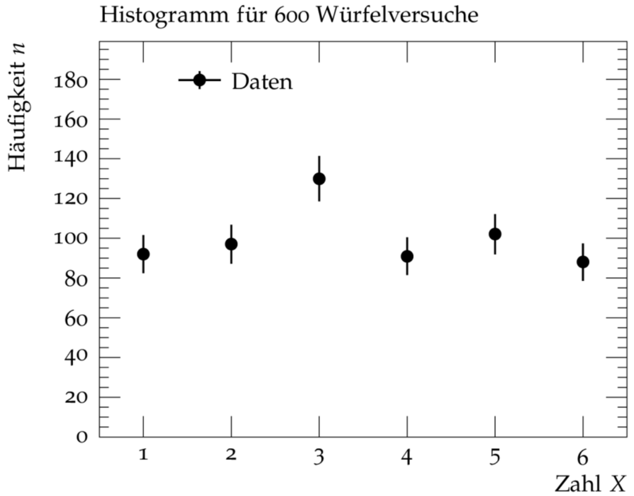
$$\sigma = \sqrt{\lambda} \approx \sqrt{88} \approx 9{,}4$$

$\longrightarrow$ **Quizfrage siehe Zoom-Umfrage**

- Normalverteilung mit bekannter Varianz $\sigma^2 = \lambda$
  → ablesbar, wie "selten" welche **Abweichungen** sind:



innerhalb 1σ → 68%
innerhalb 2σ → 95%
innerhalb 3σ → 99,7%
innerhalb 5σ → 99,99994%

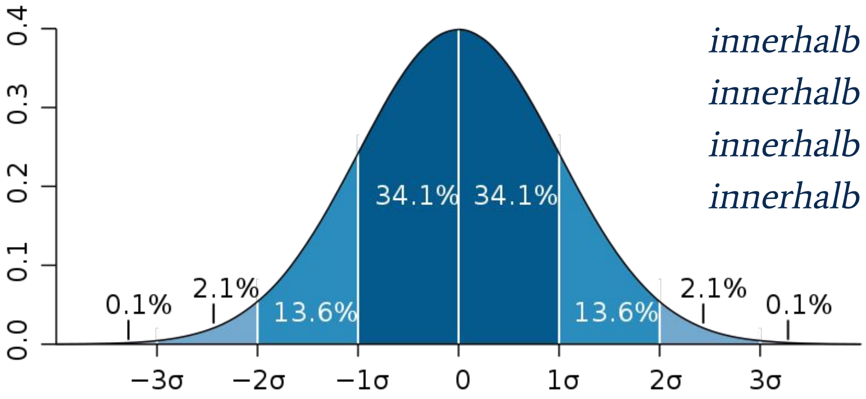


- Umgekehrt können wir das **Konfidenzintervall** für jedes Bin **schätzen**, z. B. hier bei X=6 (mit X'=88):

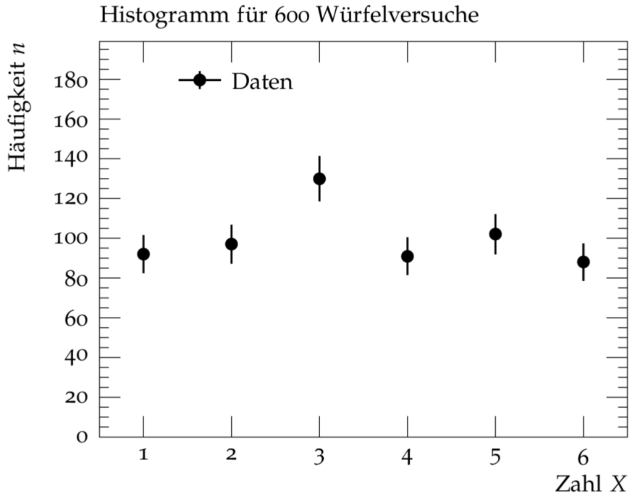
$$\sigma = \sqrt{\lambda} \approx \sqrt{88} \approx 9{,}4$$

→ **Quizfrage siehe Zoom-Umfrage**

- Normalverteilung mit bekannter Varianz $\sigma^2 = \lambda$
  $\longrightarrow$ ablesbar, wie "selten" welche **Abweichungen** sind:



innerhalb 1σ → 68%
innerhalb 2σ → 95%
innerhalb 3σ → 99,7%
innerhalb 5σ → 99,99994%

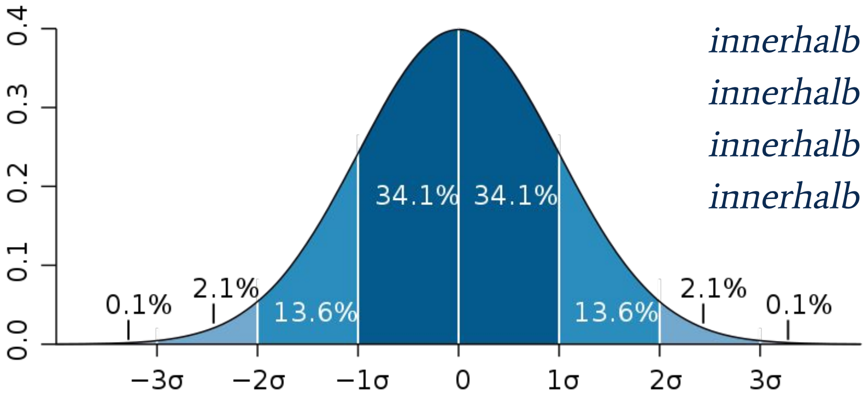


- Umgekehrt können wir das **Konfidenzintervall** für jedes Bin **schätzen**, z. B. hier bei $X=6$ (mit $X'=88$):

$$\sigma = \sqrt{\lambda} \approx \sqrt{88} \approx 9{,}4$$

"Das 88±9,4 Intervall enthält zu 68% den wahren Wert."

- Normalverteilung mit bekannter Varianz $\sigma^2 = \lambda$
  $\longrightarrow$ ablesbar, wie "selten" welche **Abweichungen** sind:



innerhalb $1\sigma \longrightarrow 68\%$
innerhalb $2\sigma \longrightarrow 95\%$
innerhalb $3\sigma \longrightarrow 99{,}7\%$
innerhalb $5\sigma \longrightarrow 99{,}99994\%$

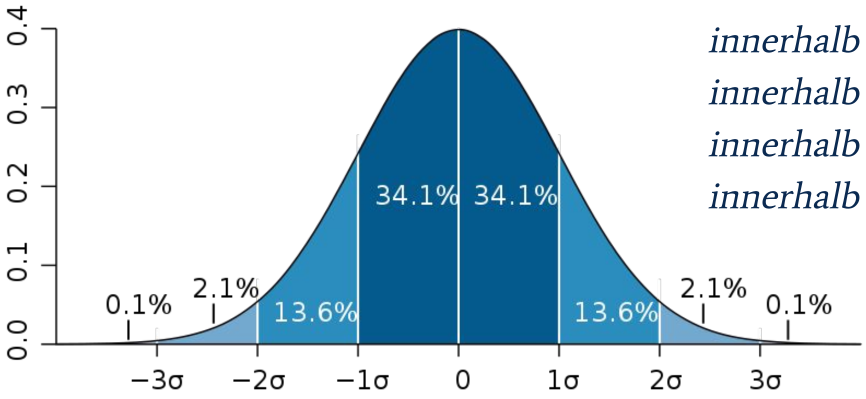
- Umgekehrt können wir das **Konfidenzintervall** für jedes Bin **schätzen**, z. B. hier bei $X=6$ (mit $X'=88$):

$$\sigma = \sqrt{\lambda} \approx \sqrt{88} \approx 9{,}4$$

$\longrightarrow$ Darauf basierend:
Hypothesentests
Kompatibilitaet mit einer Theorievorhersage (z.B. "n(6)=100")

Hypothesentests

- Normalverteilung mit bekannter Varianz $\sigma^2 = \lambda$
  → ablesbar, wie “selten” welche **Abweichungen** sind:



innerhalb 1σ → 68%
innerhalb 2σ → 95%
innerhalb 3σ → 99,7%
innerhalb 5σ → 99,99994%

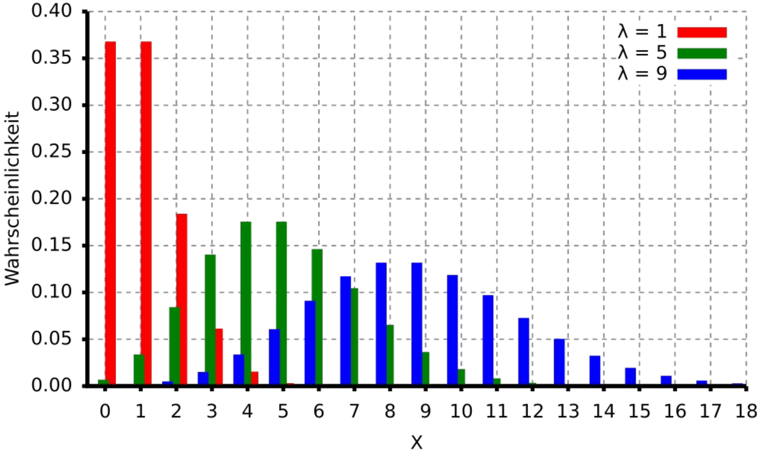
Angestrebte Zuverlässigkeit einer Studie oft abhängig vom Fach:
- Sozialwissenschaften oft schon ~2σ “signifikant”
- Teilchenphysik: “Entdeckung” ab 5σ

- Umgekehrt können wir das **Konfidenzintervall** für jedes Bin **schätzen**, z. B. hier bei X=6 (mit X'=88):

$$\sigma = \sqrt{\lambda} \approx \sqrt{88} \approx 9{,}4$$

- (Statistische) Unsicherheit eines Zählexperiments hängt also von Häufigkeit ab:

$$\sigma = \sqrt{\lambda} \approx \sqrt{n}$$



- Absolute Unsicherheit steigt mit mehr Versuchen
- Uns interessiert fast immer die **relative Unsicherheit**
  → sinkt mit typischem Konvergenz-Verhalten:

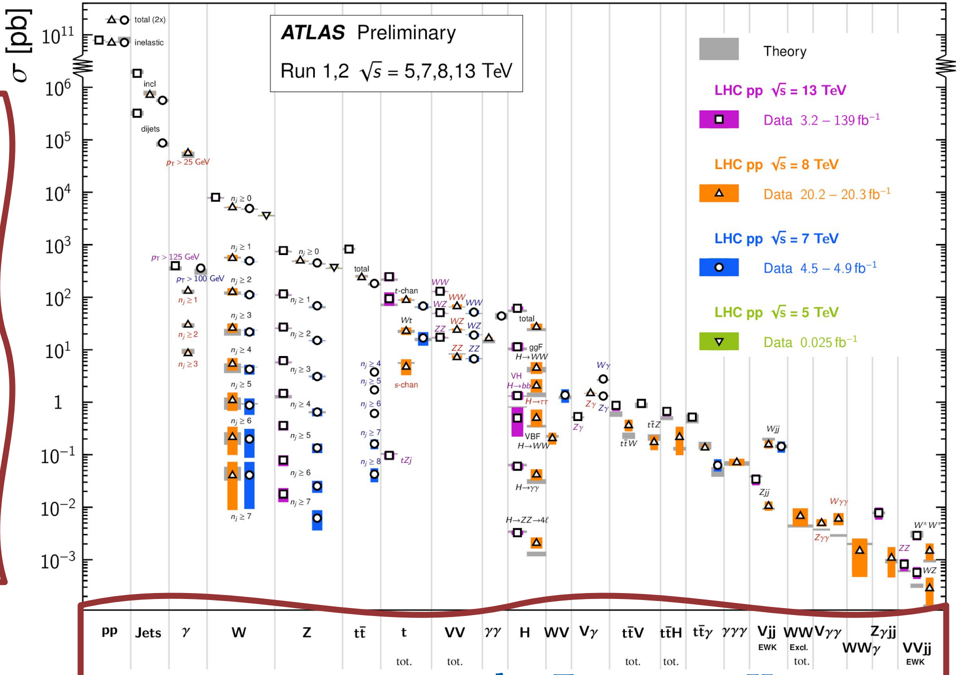
$$\frac{\sigma}{n} \approx \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

→ Je häufiger gemessen, desto genauer.

Der LHC als Zählexperiment

- Was hat das (10000-fache) **Würfeln** von 600 Würfeln mit dem **LHC** zu tun?
- Der LHC ist eine riesige Würfelmaschine …

… mit nicht-trivialen P(X)



… mit spannenden Ereignissen *X*

Quantity	Number
Circumference	26659 m
Dipole operating temperature	1.9 K (-271.3°C)
Number of magnets	9593
Number of main dipoles	1232
Number of main quadrupoles	392
Number of RF cavities	8 per beam
Nominal energy, protons	6.5 TeV
Nominal energy, ions	2.56 TeV/u (energy per nucleon)
Nominal energy, protons collisions	13 TeV
No. of bunches per proton beam	2808
No. of protons per bunch (at start)	1.2 x 10^{11}
Number of turns per second	11245
Number of collisions per second	1 billion

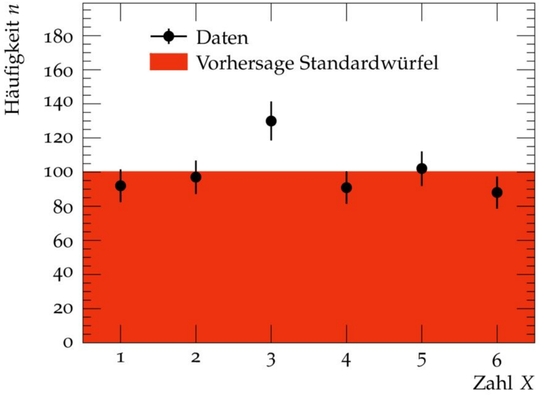
… mit unglaublich vielen Versuchen N gleichzeitig!

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Wie entdecke ich beim Würfeln ein Higgs-Boson?

Analogie: Ist der Würfel manipuliert?

- **Experiment:**
  - 600 Würfel
- **Theorievorhersage:**
  - $n_i = 100$



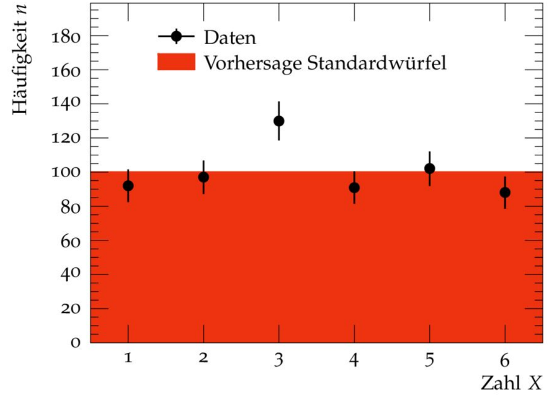
Wie entdecke ich beim Würfeln ein Higgs-Boson?

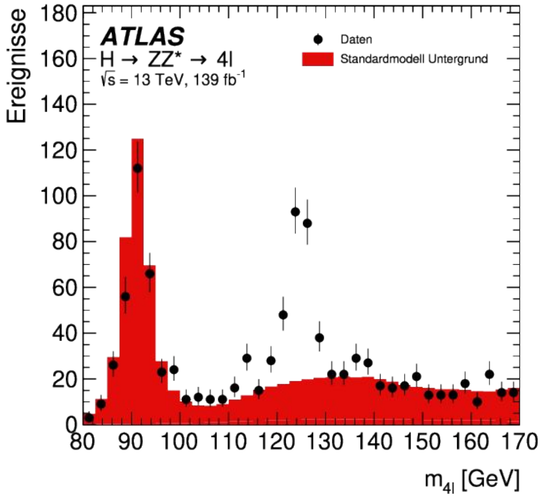
Analogie: Ist der Würfel manipuliert?

- **Experiment:**
  - 600 Würfel
- **Theorievorhersage:**
  - n_i=100

Teilchenphysik: Existiert das Higgs-Boson?

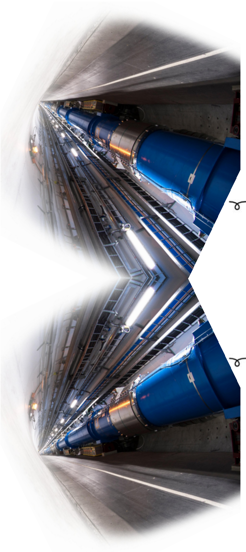
- **Experiment:**
  - 1 Mrd LHC-Kollisionen pro Sekunde für mehrere Jahre
  - aufgezeichnet vom ATLAS-Detektor
  - selektiert und projiziert auf interessante Variablen
- **Theorievorhersage ohne/mit Higgs?**
  - Zum Beispiel aus Standardmodell der Teilchenphysik!
  - Aber nicht analytisch berechenbar!
    - » Verwendung von Monte Carlo-Programmen für statistische Simulation der Theoriehypothese! → später

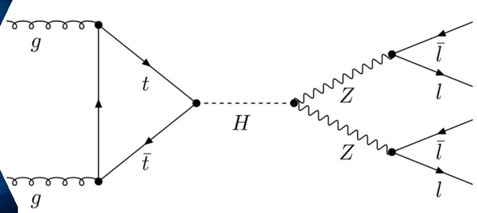


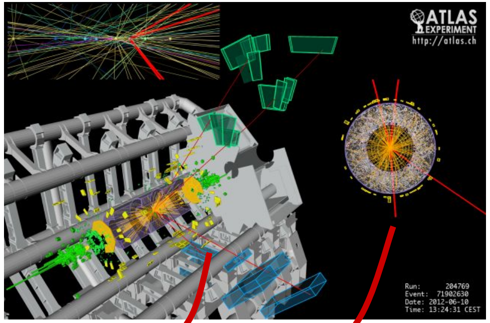


Wie entdecke ich beim Würfeln ein Higgs-Boson?

Crash-Kurs: Higgs-Suche im 4-Leptonen-Endzustand

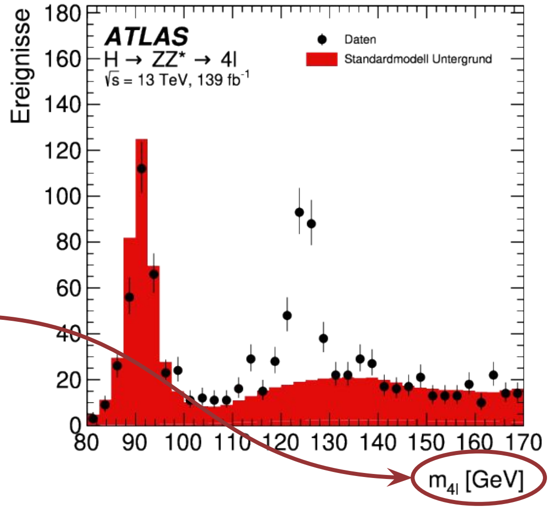






Impulse

$$m_{4l} = \sqrt{(p_1+p_2+p_3+p_4)_\mu (p_1+p_2+p_3+p_4)^\mu} \;\rightarrow\; m_H \approx 125 \text{ GeV}$$



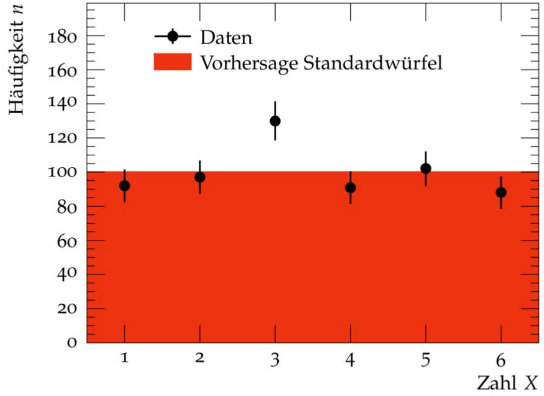
Wie entdecke ich beim Würfeln ein Higgs-Boson?

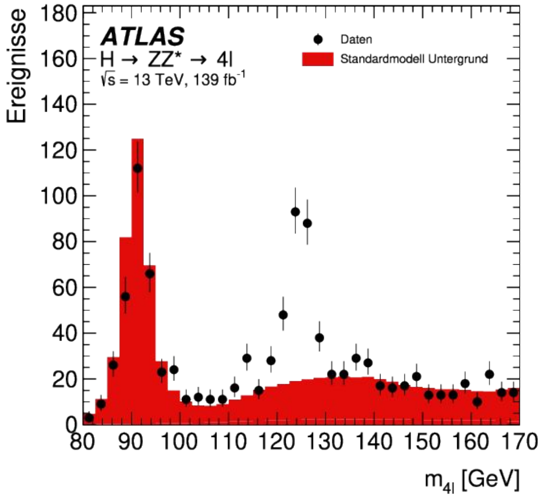
Analogie: Ist der Würfel manipuliert?

- **Experiment:**
  - 600 Würfel
- **Theorievorhersage:**
  - n_i=100

Teilchenphysik: Existiert das Higgs-Boson?

- **Experiment:**
  - 1 Mrd LHC-Kollisionen pro Sekunde für mehrere Jahre
  - aufgezeichnet vom ATLAS-Detektor
  - selektiert und projiziert auf interessante Variablen
- **Theorievorhersage ohne/mit Higgs?**
  - Zum Beispiel aus Standardmodell der Teilchenphysik!
  - Aber nicht analytisch berechenbar!
    - » Verwendung von Monte Carlo-Programmen für statistische Simulation der Theoriehypothese! → später





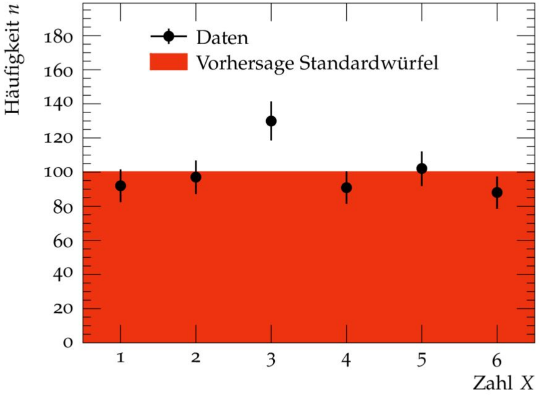
Wie entdecke ich beim Würfeln ein Higgs-Boson?

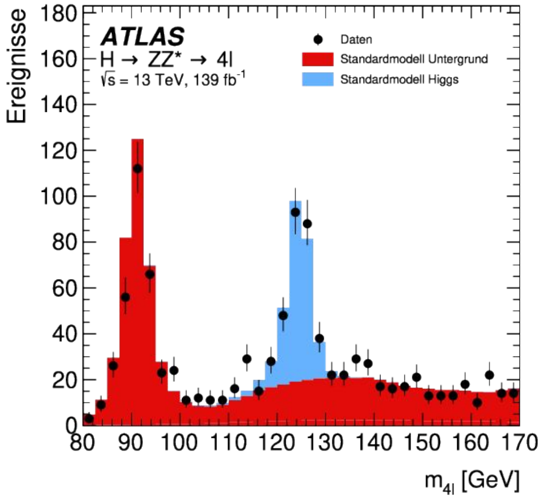
Analogie: Ist der Würfel manipuliert?

- **Experiment:**
  - 600 Würfel
- **Theorievorhersage:**
  - n_i=100

Teilchenphysik: Existiert das Higgs-Boson?

- **Experiment:**
  - 1 Mrd LHC-Kollisionen pro Sekunde für mehrere Jahre
  - aufgezeichnet vom ATLAS-Detektor
  - selektiert und projiziert auf interessante Variablen
- **Theorievorhersage ohne/mit Higgs?**
  - Zum Beispiel aus Standardmodell der Teilchenphysik!
  - Aber nicht analytisch berechenbar!
    - » Verwendung von Monte Carlo-Programmen für statistische Simulation der Theoriehypothese! → später



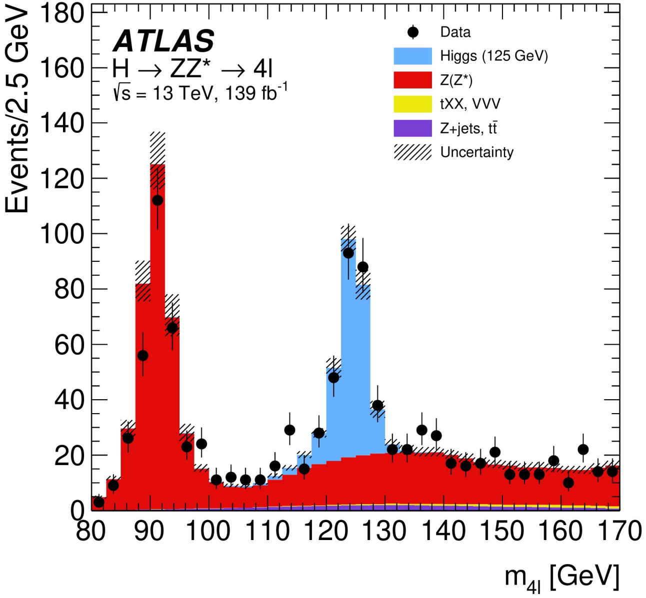


Dafür braucht man Jahre?

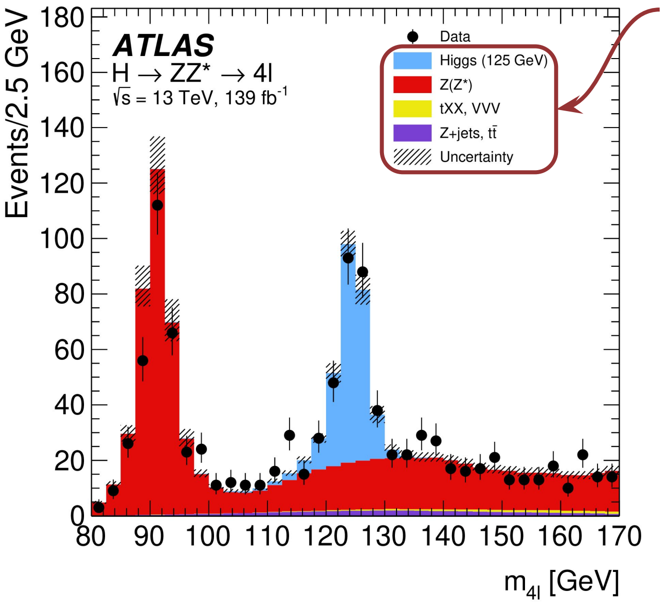
- ATLAS hat dieses spezielle Ergebnis als Zeitanimation 2011-2012 aufgearbeitet: https://cds.cern.ch/record/2230893/files/Higgs4l.gif

- Klickt mal drauf (↑) und schaut es Euch an …
  - Ab wann hättet ihr gewagt, eine Entdeckung bei m_{4l} = 125 GeV zu behaupten?

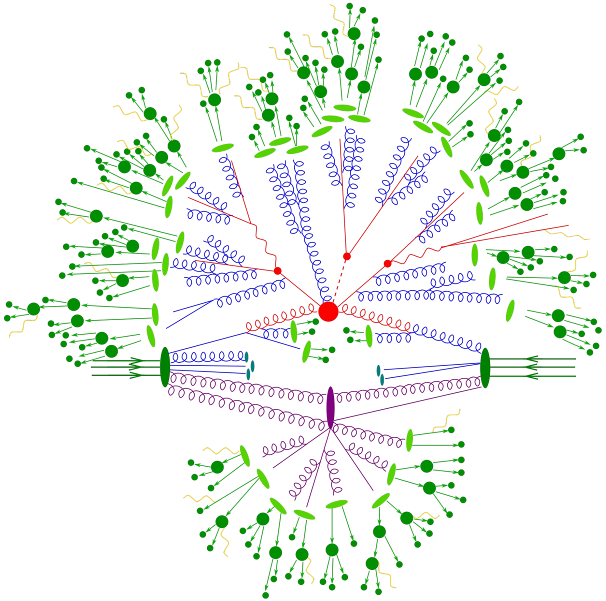
2015-2018



Bonus: Theorie-Vorhersagen mit Hilfe des Zufalls



- **Theoretische Vorhersagen** v.a. der Untergründe kritisch fuer Interpretation der Messung
- Analytische Berechnung der gemessenen m_{4l}-Verteilung nicht möglich
- Stattdessen Simulation der Theorie-Prozesse in Stufen mit Hilfe von Zufall: "**Monte Carlo**"-Methoden!



- Schwerpunkt meiner [Arbeitsgruppe] an der TU Dresden:
  - Monte Carlo-Simulation für LHC-Kollisionen
  - Präzise Vorhersagen für Effekte der starken Wechselwirkung
  - Einsatz dieser Vorhersagen in Analysen des ATLAS-Experiments

Zusammenfassung

- **Statistische Methoden sind essentiell**, um LHC-Messungen zu interpretieren
  - Zählexperimenten liegt die Poissonverteilung (~ Gauß-Normalverteilung) zugrunde
  - Deren bekannte Eigenschaften ermöglichen eine statistische Interpretation der Messwerte
    → Schwankungen und Konfidenzintervalle bestimmbar (mit komplizierteren Mitteln)
- Der LHC ist nicht nur ein Ring, sondern auch ein **Würfel**.
- **Ihr wisst jetzt alle, warum das hier Quatsch ist:**

Fragen?