Dinâmica Relativista

Em todos os livros de Mecânica aparece a célebre lei de Newton traduzida pela equação

$$\vec{F} = m\vec{a} \,. \tag{1.1}$$

Se tivermos uma força constante a aceleração também será constante e a velocidade cresce linearmente com o tempo, isto é,

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m} t \tag{1.2}$$

Ao fim de um certo tempo a velocidade ultrapassará o valor da velocidade da luz no vazio, *c*.

Como sabemos isto não é possível. O que isto significa é que a expressão da lei de Newton dada por (1.1) é aproximada. Com efeito, a expressão correcta é:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \,. \tag{1.3}$$

Neste caso, a uma força constante corresponde um momento linear que cresce linearmente com o tempo,

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{F} t \,. \tag{1.4}$$

Mas, não é verdade que a velocidade cresça linearmente com o tempo.

Se considerarmos uma partícula que no seu referencial próprio tem massa *m*, a transformação de Lorentz mostra que no referencial em que tem velocidade $\vec{v}$, temos:

$$c\vec{p} = \gamma\vec{\beta} mc^2 \tag{1.5}$$

com $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ e $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$.

Multiplicando por *c* a eq. (1.4) e usando a eq. (1.5) é fácil obter

$$\frac{\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{c\vec{p}_0}{mc^2} + \frac{c\vec{F}}{mc^2} t \,. \tag{1.6}$$

Se, para simplificar, admitir que $\vec{p}_0 = 0$ é fácil quadrar a equação e obter:

$$\beta = \frac{Ft / mc}{\sqrt{1 + (Ft / mc)^2}} \,. \tag{1.7}$$

Deixei de usar o sinal de vector porque, neste caso, a eq. (1.6) mostra que a velocidade tem a direcção e sentido da força.

Da eq. (1.7) podemos concluir que $\beta \to 1$ quando *t* tende para infinito.

Exercício: Discuta em que condições a equação (1.6) conduz ao resultado aproximado dado pela mecânica não relativista, eq. (1.2).

Para um leitor menos familiarizado com a relatividade, vejamos como se pode obter a equação (1.5).

Comecemos por considerar um referencial de inércia **S** e um outro **S´** móvel, com movimento de translação em relação ao primeiro e com velocidade ***v*** constante ao longo do eixo dos xx.

As coordenadas de um mesmo acontecimento nos dois referenciais estão relacionadas pela transformação de Lorentz que, neste caso, se escreve:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad . \tag{1.8}$$

A transformação inversa é:

$$\begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma(x' + \beta ct') \end{aligned} \quad . \tag{1.9}$$

Os quatro números (E, cp_x, cp_y, cp_z) transformam-se da mesma maneira que as coordenadas, isto é:

$$\begin{aligned} E &= \gamma(E' + \beta cp'_x) \\ cp_x &= \gamma(cp'_x + \beta E') \\ cp_y &= cp'_y \\ cp_z &= cp'_z \end{aligned} \quad . \tag{1.10}$$

Uma vez que *S′* é o referencial próprio da partícula teremos $p'_x = p'_y = p'_z = 0$ e $E' = mc^2$. No referencial em que está parada a partícula não tem energia cinética. A sua energia tem apenas o valor correspondente à sua massa. Introduzindo estes valores na eq. (1.10) obtemos:

$$\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \\ cp_x &= \gamma\beta mc^2 \\ cp_y &= 0 \\ cp_z &= 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

A eq. (1.5) é a expressão vectorial das três últimas equações escrita no caso geral em que a velocidade de S’ em relação a S e portanto da partícula em S, é ao longo de uma direcção qualquer e não ao longo do eixo dos xx.

Exercícios:

1 – Mostre que (1.9) é a transformação inversa de (1.8);

2 – Deduza a transformação inversa de (1.10);

3 – Mostre que $E^2 - (cp)^2$ é um invariante, isto é, tem o mesmo valor em todos os referenciais de inércia. Qual é esse valor?

No sistema de unidades ***c=1*** é usual designar as quatro coordenadas $(x^0 \equiv t, x^1, x^2, x^3)$ como as componentes do quadrivector ***tempo x espaço***. Genericamente representa-se cada uma das suas componentes por x^μ em que o índice μ pode tomar os valores 0,1,2 e 3. Do mesmo modo designa-se por p^μ o 4-vector ***energia x momento***, cujas componentes são (p^0, p^1, p^2, p^3). Muitas outras grandezas constituídas por 4 números são 4-vectores. O que é importante para este facto é que, numa mudança de referencial se transformem entre si por meio da transformação de Lorentz. Em resumo:

Seja A^μ um conjunto de quatro números que no **referencial *S*** se escrevem (A^0, A^1, A^2, A^3). A^μ é um 4-vector se e só se no **referencial *S’***, obtido de *S* por meio de uma transformação de Lorentz, por exemplo a transformação (1.8), se tiver:

$$\begin{aligned} A'^0 &= \gamma(A^0 - \beta A^1) \\ A'^1 &= \gamma(A^1 - \beta A^0) \\ A'^2 &= A^2 \\ A'^3 &= A^3 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Na geometria Euclidiana o conjunto de três números constituem um vector se e só se numa mudança de referencial – neste caso esta mudança é uma rotação do eixos – se transformarem entre si de acordo com a regra bem conhecida. Por exemplo para uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo dos z teremos:

$$x' = \cos\theta x + \sin\theta y$$
$$y' = \cos\theta y - \sin\theta x \qquad (1.13)$$
$$z' = z$$

Na geometria Euclidiana a 3 dimensões as componentes dos 3-vectores transformam-se linearmente mas é preservado o seu módulo dado pelo Teorema de Pitágoras, i. e.,em qualquer referencial $x^2 + y^2 + z^2$ tem sempre o mesmo valor. Na Teoria da Relatividade a geometria não é Euclidiana mas é quase. O invariante, que é o quadrado do módulo de qualquer 4-vector, A^μ é agora dado pela forma quadrática $(A^0)^2 - \left[(A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2\right]$. A diferença para uma geometria Euclidiana é o sinal menos entre a ***componente do tipo tempo*** (atenção eu disse do tipo tempo, pode não ter nada a ver com tempo!) e as ***componentes do tipo espaço***.

No electromagnetismo, o potencial escalar A^0, que nos livros aparece muitas vezes representado pela letra *V* e as 3 componentes do potencial vector $\vec{A}$, constituem o meu último exemplo de um 4-vector. Este 4-vector chama-se o campo electromagnético. O Campo Eléctrico, $\vec{E}$ e o Campo Magnético, $\vec{B}$ são determinados pelas derivadas deste 4-vector. Em particular temos:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}A^0 - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \qquad (1.14)$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Exercício : Imagine que no referencial *S* temos uma carga eléctrica em repouso na origem. Nesse referencial, em cada ponto do espaço existe um campo eléctrico, dado simplesmente pelo gradiente de A^0. O potencial vector é nulo e portanto é nulo o campo magnético $\vec{B}$. Mostre que no referencial *S'* as componentes do potencial vector não são todas nulas. Como consequência, o observador em *S'* diz que, para além do campo eléctrico, também existe um campo magnético. Sugestão: use a transformação (1.8) e tudo o que eu espero que tenha aprendido sobre 4-vectores. Para o observador de S' a partícula carregada está em movimento e portanto ele mede um campo magnético. É por isto que todo o electromagnetismo é relativistico!