A Equação de Dirac

Recordemos a equação de Schroedinger. Para uma partícula livre, isto é, sem estar sujeita a qualquer força, de massa *m*, a equação escreve-se:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(t,\vec{r}) \tag{2.1}$$

A solução desta equação é do tipo onda plana – vector de onda $\vec{k}$, tal que $\left|\vec{k}\right| = 2\pi/\lambda$ -e monocromática, isto só com uma frequência $\omega = 2\pi\nu$, ou seja:

$$\psi(t,\vec{r}) = Ae^{i\vec{k}.\vec{r}}e^{-i\omega t} \tag{2.2}$$

Substituindo (2.2) em (2.1) facilmente se conclui que o vector de onda e a frequência estão relacionados da seguinte maneira:

$$\hbar\omega = \frac{(h\vec{k})^2}{2m} \tag{2.3}$$

Se recordarmos a relação de Planck entre Energia e frequência,

$$E = \hbar\omega = h\nu \tag{2.4}$$

e a relação de De Broglie, entre o vector de onda e o momento,[1]

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \tag{2.5}$$

então a eq. (2.3) significa que

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \tag{2.6}$$

Esta é, evidentemente, a relação não relativista entre a energia e o momento de uma partícula livre, a qual só tem energia cinética.

Basta verificarmos o papel assimétrico entre a coordenada temporal e as coordenadas espaciais – a equação é de 1ª ordem em *t* mas de 2ª ordem nas coordenadas espaciais - para concluirmos que a equação de Schroedinger não é uma equação relativista. Por outro lado, podemos considerá-la a tradução da relação (2.6) numa equação diferencial usando o "dicionário":

$$\begin{aligned} E &\to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{p} &\to -i\hbar\vec{\nabla} \end{aligned} \tag{2.7}$$

[1] Por vezes esta relação é mais conhecida como uma relação entre os módulos dos dois vectores e utilizando o comprimento de onda em vez do módulo do vector de onda, ou seja, na forma $p = h/\lambda$.

Para procuramos uma equação quântica relativista para uma partícula livre, a primeira coisa a notar é que a eq. (2.6) deve ser substituída por

$$E^2 - (c\vec{p})^2 = (mc^2)^2 \tag{2.8}$$

Com efeito, é esta a relação entre energia e momento de uma partícula livre. Recordemos que as quatro quantidades (E, cp_x, cp_y, cp_z) se transformam perante uma mudança de referencial de inércia, dada pelas transformações de Lorentz, da mesma forma que o quadrivector (ct, x, y, z). O que a equação (2.8) diz é que para uma partícula livre o quadrivector energia – momento tem valores diferentes para diferentes observadores em referenciais de inércia diferentes, mas o seu módulo é sempre mc^2. No limite, no referencial em que a partícula está em repouso, referencial próprio, o momento linear é nulo e a energia tem o seu valor mínimo mc^2.

De agora em diante passarei a usar o sistema de unidades $c = \hbar = 1$. Temos portanto os dois 4-vectores fundamentais:

$$\begin{aligned} x^\mu &\equiv (x^0 = t, \overline{x}) \\ p^\mu &\equiv (p^0 = E, \vec{p}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

O índice μ pode tomar os valores 0, 1, 2 ou 3, correspondendo os três últimos às coordenadas espaciais. Usarei índices latinos, i, j, etc. quando quiser apenas especificar as componentes espaciais. Passarei também a designar o vector posição por $\vec{x}$ em vez da representação mais usual por $\vec{r}$.

Recordemos ainda que neste espaço existe uma métrica, i.e., está definida uma distância, cujo tensor é dado por:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

O produto interno entre dois 4-vectores A^μ e B^μ é dado por:

$$A.B = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \tag{2.11}$$

em que $g_{\mu\nu}$ é a matriz inversa de (2.10), que é igual a ela própria, e está implícita uma soma nos índices repetidos.

<u>Exercícios</u>:

1 – Mostre que $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$

2 – Usando a eq. (2.11) mostre que $A.B = A^0B^0 - \vec{A}.\vec{B}$ em que $\vec{A}.\vec{B} = A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3$. Note que, para os 4-vectores é usual não usar a seta de vector sobre a respectiva letra, mas continuaremos a usar a seta quando se trata de 3-vectores.

3 – Em particular se *B=A* o produto interno *A.A* define o quadrado do módulo do 4-vector A. Nestas condições, a eq. (2.8) diz que o módulo do 4-vector energia x momento é a massa . Verifique.

Depois desta pequena digressão voltemos ao nosso problema, que é encontrar uma equação diferencial que represente quanticamente a relação relativista

$$p.p = m^2 \tag{2.12}$$

usando o ***dicionário*** dado por (2.7). É fácil de ver que essa equação será:

$$\left[(i\frac{\partial}{\partial t})^2 - (-i\vec{\nabla})^2\right]\varphi(x) = m^2\varphi(x) \tag{2.13}$$

Note que a variável x representa o 4-vector espaço x tempo e não apenas a sua componente 1. Simplificando, obtemos a chamada equação de Klein – Gordon, KG,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right]\varphi(x) = 0 \tag{2.14}$$

Esta equação descreve quanticamente a dinâmica de uma partícula livre com spin zero. Por exemplo, poderia servir para os mesões π mas não serve para os electrões. Com efeito, os electrões têm spin e mesmo antes de Dirac ter chegado à sua equação já se tinha descoberto que o electrão tem esse grau de simetria interna. Nessas condições, sabendo que o spin só pode tomar dois valores, *up* ou *down*, Pauli já tinha proposto modificar a equação de Schroedinger por forma a que o ψ fosse agora uma matriz coluna 2x1 do tipo:

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Evidentemente que, com esta modificação, a eq.(2.1) continua a não ser relativista. Em particular a sua solução é do tipo

$$\psi(t,\vec{x}) = \exp\left[-i(\omega t - \vec{k}.\vec{x})\right]\left\{a\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\} \tag{2.16}$$

em que a e b são constantes. Note que nas unidades fundamentais, frequência é o mesmo que energia e o vector de onda é o mesmo que o momento linear. Então o expoente da exponencial, para além do factor –*i* não é mais do que o produto interno *p.x* entre os dois 4-vectores, energia x momento e espaço x tempo.

A motivação de Dirac, que aliás sabemos hoje ser errada, foi não ter uma equação de segunda ordem no tempo, como a eq. (2.14) mas, pelo contrário, obter uma eq. linear em *t*, como a equação de Schroedinger. Por outro lado, deveria respeitar a equação (2.12), que é quadrática na energia, e respeitar o ***dicionário***. Parecia uma missão impossível!

Para continuarmos é mais fácil introduzir um outro 4-vector dado por:

$$\hat{p}^{\mu} = (i\frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla}) \tag{2.17}$$

Trata-se portanto de um 4-vector que é um operador diferencial, que actuará numa dada função do espaço x tempo. O leitor deve distinguir bem entre os dois 4-vectores p e $\hat{p}$. As componentes do primeiro são números, a energia e o momento linear, as componentes do segundo são operadores diferenciais. Com esta notação, a equação de KG escreve-se simplesmente

$$\hat{p}.\hat{p}\varphi(x) = m^2\varphi(x) \tag{2.18}$$

Para termos uma equação só com primeiras derivadas precisamos de ter só um $\hat{p}$ ou seja precisamos de uma equação do tipo:

$$\gamma.\hat{p}\psi = m\psi \tag{2.19}$$

em que

$$\gamma = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) \equiv (\gamma^0, \vec{\gamma}) \tag{2.20}$$

devem constituir um 4-vector mas não podem ser números. Efectivamente, números não podem satisfazer as relações (2.23). Podem ser matrizes de números e então o ψ será ele próprio uma matriz coluna. Nestas condições, em vez de uma equação de segunda ordem teremos um sistema de equações de primeira ordem. A condição que Dirac impôs foi que cada uma das componentes da matriz ψ obedecesse a uma equação do tipo (2.18), de segunda ordem. Para vermos que isto é possível vamos escrever (2.19) na forma:

$$\left\{\gamma^0\hat{p}^0 - \gamma^i\hat{p}^i\right\}\psi = m\psi \tag{2.21}$$

Note que está implícita uma soma no índice *i* desde 1 a 3, e que tanto os γ como o ψ são matrizes. Voltemos a aplicar à equação diferencial anterior, o mesmo operador $\gamma.\hat{p}$. Obtemos:

$$\left\{\gamma^0\hat{p}^0 - \gamma^j\hat{p}^j\right\}\left\{\gamma^0\hat{p}^0 - \gamma^i\hat{p}^i\right\}\psi = m\left\{\gamma^0\hat{p}^0 - \gamma^j\hat{p}^j\right\}\psi \tag{2.22}$$

Mas se (2.21) for verdadeira, o segundo membro dá $m^2\psi$. Devemos então requerer que o primeiro membro seja simplesmente $\hat{p}.\hat{p}$. Por outras palavra, os produtos das matrizes γ, ou dão zero, se os índices forem diferentes, ou dão a matriz identidade. Facilmente se verificará que estas matrizes devem obedecer às relações:

$$\begin{aligned}
&\gamma^0\gamma^0 = 1 \\
&\gamma^1\gamma^1 = \gamma^2\gamma^2 = \gamma^3\gamma^3 = -1 \\
&\gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = 0\,; i = 1,2,3 \\
&\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = 0\,; i \neq j
\end{aligned} \tag{2.23}$$

<u>Exercícios</u>:

1 – Verifique que as relações (2.23) se podem mais facilmente escrever na forma:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}1 \tag{2.24}$$

Note que tanto em (2.23) como em (2.24) o *1* do lado direito representa a matriz identidade e não o número *1*.

2 –Mostre que as quatro matrizes 4x4 dadas por:

$$\begin{aligned}
\gamma^0 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\
\gamma^i &= \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

em que o *0* representa uma matriz 2x2 de zeros, o *1* representa a matriz identidade 2x2 e os σ_i são as matrizes de Pauli dadas por

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\sigma_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\
\sigma_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

satisfazem a álgebra dada por (2.23).

3 –Mostre que o quadrado de qualquer das matrizes de Pauli é a matriz identidade e que o produto de duas delas diferentes dá a terceira, isto é $\sigma_i\sigma_j = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$, soma no índice k.

Descobertas as matrizes 4x4 que satisfazem os requisitos (2.23), temos que (2.21) é um sistema de 4 equações diferenciais de primeira ordem. O ψ é uma matriz 4x1, tem portanto 4 componentes. Possivelmente Dirac teria gostado que o ψ tivesse duas componentes, para assim poder traduzir o grau de liberdade interno spin. Contudo, é fácil o leitor convencer-se que não existem <u>quatro</u> matrizes 2x2 que satisfaçam os constrangimentos (2.23). O melhor que se consegue são três matrizes, justamente as matrizes de Pauli. O que o Dirac mostrou é que esta duplicação dos graus de liberdade internos de dois para quatro, corresponde à existência das antipartículas. Ao procurar uma equação relativista para o electrão descobriu que a mesma equação também descreve outra partícula com o mesmo spin e a mesma massa, o positrão.

Voltemos à equação de Dirac na forma (2.21) e vejamos as suas soluções. Vamos mostrar que, mais uma vez, a equação admite soluções do tipo onda plana, ou seja, admite soluções do tipo:

$$\psi(x) = e^{-ip.x}\psi(p) \tag{2.27}$$

Não nos devemos esquecer que o *x* representa o 4-vector espaço x tempo e que $p.x = Et - \vec{p}.\vec{x}$. O $\psi(p)$ é uma matriz 4x1, independente do espaço tempo. São números que eventualmente podem depender de outros números que são o 4-momento da partícula, mas não dependem nem do espaço nem do tempo. Em rigor deveria ter usado outra letra para designar esta matriz, mas, feito o aviso, o leitor vai-me desculpar esta falta de rigor matemático. Os mais rigorosos podem sempre voltar à eq.(2,27) e substituir $\psi(p)$ por $\Omega(p)$ ou qualquer outra letra mais do seu agrado.

É fácil ver que:

$$\begin{aligned} \hat{p}^0\psi(x) &= i\frac{\partial}{\partial t}e^{-ip.x}\psi(p) = E\psi(x) \\ \hat{p}^1\psi(x) &= -i\frac{\partial}{\partial x}e^{-ip.x}\psi(p) = p^1\psi(x) \end{aligned} \tag{2.28}$$

e de igual modo para as outras derivadas espaciais. Usando estes resultados na equação de Dirac, transformamos o sistema de equações diferenciais na seguinte equação matricial:

$$\left[\gamma^0 E - \vec{\gamma}.\vec{p}\right]\psi(p) = m\psi(p) \tag{2.29}$$

Introduzindo a forma explicita das matrizes gama esta equação fica:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -E \\ -E & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}.\vec{p} \\ -\vec{\sigma}.\vec{p} & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

Como as matrizes gama se escrevem em termos de blocos 2x2 é conveniente agrupar as quatro componentes da matriz 4x1 $\psi(p)$ em dois blocos 2x1 que designei por ψ_R e ψ_L. Cada uma destas sub-matrizes continuam a ser função do p e não o escrevi explicitamente para não carregar desnecessariamente a notação. Esta equação matricial pode agora decompor-se como:

$$\begin{aligned} (-E - \vec{\sigma}.\vec{p})\psi_L &= m\psi_R \\ (-E + \vec{\sigma}.\vec{p})\psi_R &= m\psi_L \end{aligned} \tag{2.31}$$

Então quando *m=0* obtemos duas equações independentes, uma para o ψ_L e outra para o ψ_R , que são:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}.\vec{p}\psi_L &= -E\psi_L \\ \vec{\sigma}.\vec{p}\psi_R &= E\psi_R \end{aligned} \tag{2.32}$$

Se recordarmos que quando *m=0* se tem $E = |\vec{p}|$, as equações anteriores mostram que os dois spinors 2X1 representam os dois possíveis estados próprios do operador helicidade. i.e.

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\psi_L &= -\psi_L \\ \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\psi_R &= \psi_R \end{aligned} \tag{2.33}$$

Imaginemos que o momento linear da partícula estava dirigido segundo o eixo dos z. Então as duas equações anteriores ficam:

$$\begin{aligned} \sigma_3\psi_L &= -\psi_L \\ \sigma_3\psi_R &= \psi_R \end{aligned} \tag{2.34}$$

Cujas soluções são:

$$\begin{aligned} \psi_L &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \psi_R &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.35}$$

Os índices L e R derivam das palavras ***Left*** e ***Right*** (esquerdo e direito) e correspondem aos estados de helicidade menos um e mais um, respectivamente. Note que a helicidade não é mais do que o valor do spin na direcção do momento. Assim o estado R, com helicidade +1 corresponde a ter o spin paralelo com o momento enquanto o estado L, de helicidade -1, corresponde ao caso em que são antiparalelos. O fotão, que tem spin 1 e não ½, também só tem dois valores possíveis da helicidade que correspondem a mais 1 e menos 1. Classicamente estes dois estados correspondem a luz polarizada direita e esquerda, respectivamente.

Se os neutrinos não tivessem massa, o que hoje sabemos não ser verdade, as duas soluções ψ_L e ψ_R, corresponderiam aos neutrinos e antineutrinos, respectivamente. Contudo, como a sua massa é muito pequena, $m < 2eV$ para o neutrino electrónico, muitas vezes é uma excelente aproximação fazer *m=0*.

Se em vez de termos ensaiado a solução (2.27) tivéssemos antes escolhido soluções com frequência negativa, do tipo

$$\psi(x) = e^{ip.x}\psi(p) \tag{2.36}$$

teríamos obtido a seguinte equação matricial,

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & -E \\ -E & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}.\vec{p} \\ -\vec{\sigma}.\vec{p} & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = -m\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \qquad (2.37)$$

em vez de (2.30).

Foi a existência destas soluções chamadas de energia negativa que levou Dirac a postular a existência dos positrões. De facto, à luz da teoria do campo sabemos hoje que em ambos os casos, electrões e positrões com o mesmo momento $\vec{p}$, contribuem com a mesma energia (positiva) $E = +\sqrt{m^2 + p^2}$ para a energia do sistema. O que muda de sinal é a sua contribuição para a carga total do sistema, enquanto os primeiros contribuem com uma carga eléctrica negativa os segundos contribuem com uma carga positiva de igual módulo.

Deixo ao cuidado do leitor mais interessado mostrar que, neste caso, em vez de (2.33) obteríamos:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\psi'_L &= \psi'_L \\ \frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{|\vec{p}|}\psi'_R &= -\psi'_R \end{aligned} \qquad (2.38)$$

No caso limite, *m=0*, continuaríamos a ter as mesmas duas soluções independentes dadas por (2.35) só que agora tínhamos resolvido chamar ψ'_L ao que antes era o ψ_R e vice versa. Note que a helicidade para partículas que se deslocam com a velociade da luz é uma quantidade conservada. O seu valor é pois um bom número quântico. Se a sua massa fosse nula, neutrinos e antineutrinos eram diferentes porque tinham helicidades diferentes.

Contudo no caso geral em que a massa não é nula existem mesmo quatro soluções independentes. Para ver isto basta considerar que nos colocamos no referencial próprio. Então, $\vec{p} = 0$ e $E = m$ e as equações (2.30) e (2.37) ficam na forma

$$\gamma^0\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \qquad (2.39)$$

em que o sinal mais corresponde à solução de onda plana com frequência positiva e o menos à solução com frequência negativa, ou seja

$$\begin{aligned} \psi_L &= -\psi_R \quad \text{se } E > 0 \\ \psi_L &= \psi_R \quad \text{se } E < 0 \end{aligned} \qquad (2.40)$$

Então, as quatro soluções independentes são:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix};\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix};\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix};\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \tag{2.41}$$

em que as duas primeiras correspondem às partículas e as outras duas às antipartículas. O factor $\sqrt{2}$ foi introduzido para que cada spinor ficasse normalizado, i. e. para que $\psi^{\dagger}\psi = 1$. Como também é evidente, olhando para (2.41) as quatro soluções são ortogonais. Temos assim uma base ortonormada para este espaço de matrizes, cuja dimensão é quatro. Portanto existem quatro e só quatro soluções independentes.

Antes de terminar estas notas gostaria de antecipar uma dúvida que deve estar a pairar no espírito dos que estão a ver este assunto pela primeira vez. A pergunta que muitos devem estar a fazer é a seguinte: que grande sorte Dirac ter encontrado as 4 matrizes dadas por (2.25). De facto Dirac não escreveu a equação com esta forma das matrizes gama. Existem infinitas formas para as matrizes gama e portanto existem infinitas formas de passar da equação (2.29) para (2.30). Vou mostrar apenas mais uma, justamente a que Dirac usou.

Seja *U* uma matriz 4x4 unitária. O que isto quer dizer é que a matriz conjugada da sua transposta, $U^{\dagger}$ é a sua inversa, isto é, $U^{\dagger}U = UU^{\dagger} = 1$. Em virtude desta propriedade posso escrever a eq. de Dirac (2.21) na forma:

$$\left\{\gamma^0 \hat{p}^0 - \gamma^i \hat{p}^i\right\} U^{\dagger} U \psi = m\psi \tag{2.42}$$

Note que a matriz U não depende do espaço nem do tempo. Então se multiplicar ambos os membros desta equação à esquerda por U obtemos:

$$U\left\{\gamma^0 \hat{p}^0 - \gamma^i \hat{p}^i\right\} U^{\dagger} U \psi = mU\psi \tag{2.43}$$

Mas

$$\begin{aligned} U\gamma^0 U^{\dagger} &= \gamma'^0 \\ U\gamma^i U^{\dagger} &= \gamma'^i \end{aligned} \tag{2.44}$$

constituem outra forma para as matrizes gama, verificam a mesma álgebra dada por (2.23) e $U\psi$ é a nova forma do 4-spinor, i.e., passamos a ter

$$\left\{\gamma'^0 \hat{p}^0 - \gamma'^i \hat{p}^i\right\} \psi' = m\psi' \tag{2.45}$$

que é obviamente a mesma equação que (2.21).

Exercício:

1 – Seja $U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ uma matriz 4x4. Note que os números 1 designam a matriz identidade 2x2.

a) Mostre que U é hermítica. Uma matriz é hermitica se a sua matriz inversa é igual à matriz conjugada da sua transposta.

b) Mostre que os γ'^i obtidos pela relação (2.44) e usando este U são iguais aos anteriores mas que o novo γ^0 é a matriz $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

Foi com estas matrizes gama que Dirac escreveu a equação.

Voltemos então à equação matricial (2,29) que é geral mas usemos esta nova forma explícita das matrizes de Dirac. Tal como anteriormente, voltemos a usar o referencial próprio. Obtemos:

$$m\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\psi = m\psi \qquad (2.46)$$

cujas soluções são:

$$\psi(up)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\psi(down)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad (2.47)$$

Estas soluções correspondem aos dois estados de spin do electrão. Para os positrões, também no referencial próprio, em vez de (2.41) teríamos

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\psi = -\psi \qquad (2.48)$$

cujas soluções são

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

Deixo ao cuidado dos leitores mais interessados mostrarem que estes spinores, usualmente chamados de Dirac, se podem obter dos anteriores multiplicando-os pela matriz U. Por outras palavras, multiplicando as soluções (2.41) pela matriz U dada no exercício anterior obtemos a forma de Dirac para os spinores de uma partícula de massa $m \neq 0$ no seu referencial próprio.

É legítimo fazer a pergunta: e noutro referencial qualquer?

É muito simples. Como a equação é válida em qualquer referencial de inércia obtida a sua solução num referencial basta aplicar a lei de transformação dos 4-spinores. Esta transformação é diferente daquela que se aplica aos 4-vectores e por essa razão não vou aqui abordar este assunto.

Penso que já chega como introdução ao mundo fascinante que resulta do casamento da relatividade com a mecânica quântica. O primeiro filho deste casamento chama-se electrodinâmica quântica, a teoria que explica a interacção do campo electromagnético com cargas elementares eléctricas, em particular, electrões e positrões.