100%

Trabalho de Casa FEPA

Rui Miguel Silva [pg45194] Universidade do Minho

14 de novembro de 2021

Resumo

TPC 1 : Derivação do espaço de fase a 3 corpos.

1 Espaço de fase para decaimentos a 3 corpos

A regra de ouro de Fermi pode ser descrita como:

$$\Gamma_{fi} = (2\pi)^4 \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{2E_i} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \underbrace{\prod_{j=1}^{n} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 (2E_j)} \delta \left[\vec{P} - \sum_{j=1}^{n} \vec{p_j} \right] \delta \left[\vec{E} - \sum_{j=1}^{n} \vec{E_j} \right]}_{Invariante} \tag{1}$$

Para este propósito, considera-se um espaço de fase de 3 corpos infinitesimal $d\rho_3$.

Num decaimento a 3 corpos, no estado inicial o número de partículas é 1 e no estado final serão 3, logo, m =1, n =3.

Como o integral é um invariante de Lorentz, há uma liberdade para escolher um qualquer sistema de referência. Para isso escolhe-se o frame do centro de massa:

$$\boxed{\vec{P} = 0, E_i = M_i} \tag{2}$$

Assim:

$$d\rho_3 \propto \frac{d^3(p_1) d^3(p_2) d^3(p_3)}{E_1 E_2 E_3} \delta \left[p_1 + p_2 + p_3 \right] \delta \left[M_i - (E_1 + E_2 + E_3) \right] \tag{3}$$

então:

$$\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{2M_i} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 (2E_1)} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 (2E_2)} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 (2E_3)} \delta \left[p_1 + p_2 + p_3 \right] \delta \left[M_i - (E_1 + E_2 + E_3) \right] \tag{4}$$

Reunindo as constantes:

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{512\pi^5 M_i} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{d^3(p_1) d^3(p_2) d^3(p_3)}{E_1 E_2 E_3} \delta \left[p_1 + p_2 + p_3 \right] \delta \left[M_i - (E_1 + E_2 + E_3) \right] \tag{5}$$

Funções δ-Dirac para a conservação de momento:

$$\vec{p_n} - \left(\vec{P} - \sum_{j=1}^{n-1} \vec{p_j} \right) = 0 \tag{6}$$

$$\int d^3(p_n) \delta \left[\vec{p_n} - \left(\vec{P} - \sum_{j=1}^{n-1} \vec{p_j} \right) \right] = 1 \tag{7}$$

usando uma das funções δ para remover um dos integrais tem-se que:

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{512\pi^5 M_i} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{d^3(p_1)d^3(p_2)}{E_1 E_2 E_3} \delta\left[M_i - (E_1 + E_2 + E_3)\right] \tag{8}$$

mudando para um sistema de coordenadas esféricas:

- $d^3(p_1) = (p_1)^2 dp_1 d\phi_1 \sin\theta_1 d\theta_1$
- $d^3(p_2) = (p_2)^2 dp_2 d\phi_2 \sin\theta_{12} d\theta_{12}$

onde θ_{12} é o ângulo entre p_1 e p_2.

É importante notar que o ângulo θ_{12} é independente do ângulo θ_1, uma vez que a partícula 1 pode ser emitida em qualquer direcção, desde que a conservação de momento seja respeitada.

Devido a este facto, a integração é trivial para $d\phi_1$, $d\phi_2$ e $d\theta_1$ (assumindo que o espaço é isotrópico):

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi_1}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi_2}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta_1 d\theta_1}_{2} = 8\pi^2 \tag{9}$$

$$\Gamma_{fi} = \frac{8\pi^2}{512\pi^5 M_i} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{(p_1)^2 dp_1 (p_2)^2 dp_2 \sin\theta_{12} d\theta_{12}}{E_1 E_2 E_3} \delta\left[M_i - (E_1 + E_2 + E_3)\right] \tag{10}$$

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{64\pi^3 M_i} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{(p_1)^2 dp_1 (p_2)^2 dp_2 \sin\theta_{12} d\theta_{12}}{E_1 E_2 E_3} \delta\left[M_i - (E_1 + E_2 + E_3)\right] \tag{11}$$

De forma a eliminar o integral para $d\theta_{12}$, recorda-se que existe conservação de momento, pelo que:

$$p_3^2 = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2 \cos\theta_{12} \tag{12}$$

Fixando $|\vec{p_1}|$ e $|\vec{p_1}|$, p_3 depende somente de θ_{12}, obtém-se então:

$$2p_3 dp_3 = -2p_1 p_2 \sin\theta_{12} d\theta_{12} \tag{13}$$

$$\sin\theta_{12} d\theta_{12} \propto dp_3 \frac{p_3}{p_1 p_2} \tag{14}$$

Voltando à equação 11, substituindo os valores tem-se que:

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{64\pi^3 M_i} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{(p_1)^{\cancel{2}} dp_1 (p_2)^{\cancel{2}} dp_2}{E_1 E_2 E_3} dp_3 \frac{p_3}{\cancel{p1}\,\cancel{p2}} \delta\left[M_i - (E_1 + E_2 + E_3)\right] \tag{15}$$

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{64\pi^3 M_i} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{(p_1)(p_2)(p_3) dp_1 dp_2 dp_3}{E_1 E_2 E_3} \delta\left[M_i - (E_1 + E_2 + E_3)\right] \tag{16}$$

Fazendo uma mudança de variável $p_i dp_i = E_i dE_i$ tem-se:

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{64\pi^3 M_i} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{\cancel{E_1}\,\cancel{E_2}\,\cancel{E_3} dE_1 dE_2 dE_3}{\cancel{E_1}\,\cancel{E_2}\,\cancel{E_3}} \delta\left[M_i - (E_1 + E_2 + E_3)\right] \tag{17}$$

Funções δ-Dirac para a conservação da energia:

$$\int dE \delta\left(E - \sum_{j=1}^{n} E_j\right) = 1 \tag{18}$$

Removendo um dos termos usando a identidade acima δ tem-se que:

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{64\pi^3 M_i} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 dE_1 dE_2 \cancel{dE_3}\, \delta\cancel{\left[M_i - (E_1 + E_2 + E_3)\right]} \tag{19}$$

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{64\pi^3 M_i} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 dE_1 dE_2 \tag{20}$$

Notar que a energia é dada por: $E_i = m_i^2 + p_i^2$. Pelo que:

$$M_{13}^2 = E_{13}^2 - p_{13}^2 \tag{21}$$

$$M_{13}^2 = \underbrace{(E_1 + E_3)^2}_{(M-E_2)^2} - \underbrace{(p_1 + p_3)^2}_{p_2^2} \tag{22}$$

$$M_{13}^2 = (M - E_2)^2 - p_2^2 \tag{23}$$

$$M_{13}^2 = M^2 - 2ME_2 + \underbrace{E_2^2 - p_2^2}_{m_2^2} \tag{24}$$

$$M_{13}^2 = M^2 - 2ME_2 + m_2^2 \tag{25}$$

derivando M_{13}^2 (fixando M e m_2, M_{13} depende somente de E_2):

$$dM_{13}^2 \propto dE_2 \tag{26}$$

de forma análoga, é também obtido:

$$dM_{23}^2 \propto dE_1 \tag{27}$$

O integral da equação 20 fica então:

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{64\pi^3 M_i} \int |\mathcal{M}_{fi}|^2 d(M_{23}^2) d(M_{13}^2) \tag{28}$$

Considerações: O espaço de fase para um decaimento a 3 corpos é proporcional ao quadrado do produto das massas invariantes de um produto de decaimento a 2 corpos (1+2), (1+3) ou (2+3).