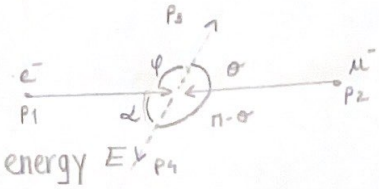
7'6

1 - scattering process $e^- + \mu^- \longrightarrow e^- + \mu^-$



No frame do CM $\vec{P} = 0$

então $\vec{p_1} + \vec{p_2} = 0$ $\quad p_1 = (E_1, p_1)$

$\Rightarrow \vec{p_1} = -\vec{p_2}$ $\quad p_2 = (E_2, -p_1)$

No frame do laboratorio (fixed target)

$p_1^{lab} = (E_1^{lab}, \vec{p}^{lab})$

$p_2^{lab} = (m_2, 0)$

$p_1\ lab = (E_1^{lab}, 0, 0, p^{lab})$

$p_2\ lab = (m_2, 0, 0, 0)$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$

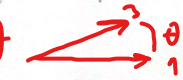
$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \checkmark$$

$$(E_1 + E_2)^2 = (E_3 + E_4)^2$$

o ângulo é θ



relembrar que $\begin{cases} p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \\ p_1 - p_3 = -p_2 + p_4 \end{cases}$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2$$

$$p_1^2 + p_3^2 - 2E_1E_3 - 2\vec{p_1}\vec{p_3}\cos(\varphi) =$$

$$= p_2^2 + p_4^2 - 2E_2E_4 - 2\vec{p_2}\vec{p_3}\cos(\pi - \theta)$$

$p_1^2 \equiv m_1^2 \cong 0$

$p_3^2 \equiv m_3^2 \cong 0$ desprezável

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2$$

o ângulo é

$$= p_1^2 + p_4^2 - 2E_1E_4 - 2\vec{p_1}\vec{p_4}\cos(\alpha)$$

$$= p_2^2 + p_3^2 - 2E_2E_3 - 2\vec{p_2}\vec{p_3}\cos(\theta)$$

50%

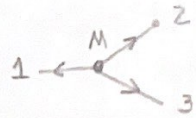
2- Three body-decay $M \to 1+2+3$

$\left\{ \begin{array}{l} p_1, p_2 \text{ e } p_3 \\ m_1, m_2, m_3 \end{array} \right.$

a)- no caso de não existirem ressonâncias haverá produção de espaço de fase isotrópico.

$p_i = (E_i, \vec{p_i})$ quadrivector

para um decaimento a 3 corpos:



seja $p_{ij} = p_i + p_j$ e $\boxed{s_{ij} = p_{ij}^2}$

temos

$s_{12} = (p_1 + p_2)^2 = (P - p_3)^2$

$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (P - p_1)^2$

$s_{31} = (p_3 + p_1)^2 = (P - p_2)^2$

falta a demonstração do espaço de fase a 3 corpos.

No frame do centro de massa do sistema: $\vec{P} = 0$ então $P = (M, 0)$, $E = M$

então no centro de massa das partículas $\vec{p_i} = 0$, e $E_i = m_i$ então $\boxed{p_i = m_i}$

$s_{12} = (p_1 + p_2)^2 = (m_1 + m_2)^2 = m_{12}^2$

$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (m_2 + m_3)^2 = m_{23}^2$

$s_{31} = (p_3 + p_1)^2 = (m_3 + m_1)^2 = m_{31}^2$

entre que valores de massa variam?

$p_i^\mu = (E_i, p_i)$

no caso geral

$m_{ij}^2 = (p_i^\mu + p_j^\mu) = m_i^2 + m_j^2 + 2E_iE_j - 2\vec{p_i}\vec{p_j}$

$= (P^\mu - p_k^\mu) = M^2 + m_k^2 - 2\underbrace{M}_{\text{partícula-mãe}}E_k$

mas a relação $m_{12}^2 + m_{23}^2 + m_{31}^2 = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$

limita o sistema a dois valores independentes m_{ij} e esta relação fixa os valores máximos das fronteiras do plot de Dalitz.

- os valores mínimos são obtidos quando as partículas i,j não tiverem velocidade, só havendo a contribuição da massa para a energia na função

$m_{ij}^2 = (m_i + m_j)^2 = m_i^2 + m_j^2 + 2m_im_j$

- os valores máximos acontecem quando a partícula k tem energia mínima possível (quando está praticamente parada) aí a energia vai toda para as outras duas partículas

A energia total da partícula k é então a sua massa $(E_k = m_k)$

$(M - m_k)^2 = M^2 + m_k^2 - 2Mm_k$

ok.

então os limites de valores mínimos e máximos:

20%

$$(m_1 + m_2)^2 \leq \boxed{m_{12}^2} \leq (M - m_3)^2 \quad e$$

ok.

$$(m_2 + m_3)^2 \leq \boxed{m_{23}^2} \leq (M - m_1)^2$$

Como as distribuições angulares não são independentes dos ângulos no cálculo do espaço de fase a 3 corpos, haverá acumulação de acontecimentos e portanto o spin das partículas não pode ser 0.

No caso de ser 0, as partículas iriam decair para qualquer lado, e existiria uma distribuição isotrópica.

5)- Verifica-se a existência de ressonâncias através do aumento do número de acontecimento em determinadas regiões do gráfico.

As projecções no eixo do x e no eixo do y dão-nos as ressonâncias e para que partículas elas decaem

$m_{K\pi}^2$ há uma ressonância em $\simeq$ 0,7 ~ 0,8 GeV

então $m_{K\pi} = \sqrt{0{,}7 \sim 0{,}8}$

30%

m_{pK}^2 há uma ressonância em ~ 2,3 GeV

então $m_{pK} = \sqrt{\sim 2{,}3 \text{ GeV}}$

Há ainda uma projecção oblíqua que indica uma possível ressonância para m_{13}^2

7

3 - $[p^\mu, x^\mu] = i\hbar g^{\mu\nu}$

$p^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu}$

$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$

$$[p^\mu, x^\mu]\psi = p^\mu x^\mu \psi - x^\mu p^\mu \psi =$$

$$= i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu}(x^\mu \psi) - x^\mu i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi =$$

$$= i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} x^\mu \psi + \underbrace{x^\mu i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi - x^\mu i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi}_{0}$$

$$= i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} g^{\nu\sigma} x_\sigma = i\hbar g^{\nu\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\mu} x_\sigma = i\hbar g^{\nu\sigma} = i\hbar g^{\mu\nu}$$

1,6

7

70%

4 -

$$p_\mu p^\mu \psi = m_0^2 c^2 \psi$$

$$\left(\Box + \frac{m_0 c^2}{\hbar^2}\right)\psi = \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{m_0 c^2}{\hbar^2}\right) = 0$$

esta equação diferencial admite uma solução do tipo onda-plana 3D

$$\psi = e^{-\frac{1}{\hbar} p_\mu x^\mu} = e^{-\frac{1}{\hbar}[p_0 x^0 - \vec{p}\cdot\vec{x}]}$$

$$= e^{\frac{1}{\hbar}[\vec{p}\vec{x} - Et]}$$

então

$$p_\mu p^\mu \psi = m_0^2 c^2 \psi \Rightarrow p_\mu p^\mu \cancel{e^{\frac{1}{\hbar}[\vec{p}\vec{x} - Et]}} = m_0^2 c^2 \cancel{e^{\frac{1}{\hbar}[\vec{p}\vec{x} - Et]}}$$

$$\boxed{p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}\,\vec{p}} \quad \text{então} \quad \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m_0^2 c^2$$

$$\Rightarrow \frac{E^2}{c^2} = m_0^2 c^2 + \vec{p}^{\,2} \Rightarrow E^2 = c^2(m_0^2 c^2 + \vec{p}^{\,2})$$

50%

$$\Rightarrow E = \pm\sqrt{c^2(m_0^2 c^2 + \vec{p}^{\,2})}$$

esta equação admite soluções positivas e negativas para a energia

Construindo a 4-densidade de corrente, espera-se que se obtenha uma lei da conservação j_μ

$$p_\mu p^\mu \psi - m_0^2 c^2 \psi \Rightarrow p_\mu p^\mu \psi - m_0^2 c^2 \psi = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(p_\mu p^\mu - m_0^2 c^2)\psi = 0} \quad 1)$$

tomando o complexo conjugado de 1):

$$(p_\mu p^\mu - m_0^2 c^2)\psi^* = 0$$

Agora multiplicando 1) por ψ^* e 2) por ψ e subtraindo os dois resultados:

$$\psi^*(p_\mu p^\mu - m_0^2 c^2)\psi - \psi(p_\mu p^\mu - m_0^2 c^2)\psi^* = 0$$

relembrando que $p^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Rightarrow p^\mu = i\hbar \nabla^\mu$

$$\psi^*(i\hbar\nabla_\mu\, i\hbar\nabla^\mu - m_0^2 c^2)\psi - \psi(i\hbar\nabla_\mu\, i\hbar\nabla^\mu - m_0^2 c^2)\psi^* = 0$$

$$-\psi^*(\hbar^2\nabla_\mu\nabla^\mu + m_0^2 c^2)\psi + \psi(\hbar^2\nabla_\mu\nabla^\mu + m_0^2 c^2)\psi^* = 0$$

$$\nabla_\mu (\psi^* \nabla^\mu \psi - \psi \nabla^\mu \psi^*) = 0$$

seja $\psi^* \nabla^\mu \psi - \psi \nabla^\mu \psi^* = j^\mu$ então

$$\boxed{\nabla_\mu j^\mu = 0}$$

A 4-densidade de corrente é então $j^\mu = \psi^* \nabla^\mu \psi - \psi \nabla^\mu \psi^*$

ou na sua forma variante: $\boxed{j_\mu = \psi^* \nabla_\mu \psi - \psi \nabla_\mu \psi^*}$

de forma a possuir dimensão de uma densidade de corrente multiplica-se por uma constante $\frac{i\hbar}{2m_0}$

fica-se então $j_\mu = \frac{i\hbar}{2m} [\psi^* \nabla_\mu \psi - \psi \nabla_\mu \psi^*]$

Considerando a Eq. Schrödinger não-relativista:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi = 0$$

tomando o complexo conjugado:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* = 0$$

2ºlw

O que se pretendia era a solução para partículas carregadas.

aplicando o mesmo raciocínio: de multiplicar ambas equações ψ^* ou ψ e subtraindo...

$$i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\psi^* (\nabla^2 \psi) - (\nabla^2 \psi^*) \psi \right) = 0 \Rightarrow$$

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) \right) + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \left(\psi^* (\nabla \psi) - (\nabla \psi^*) \psi \right) = 0$$

relembrando a equação continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{j} = 0$$

$\rho \rightarrow$ densidade de probabilidade

$\vec{j} \rightarrow$ densidade de corrente de probabilidade

$$\rho = \psi^* \psi$$

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi\right]$$

voltando à eq. K.G

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t^2} - \nabla^2\psi = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\psi$$

repetindo o mesmo processo: (multiplicar e subtrair)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right] - \nabla\left[\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi\right] = 0$$

multiplicando por $-\frac{\hbar}{2mi}$

$$-\frac{\hbar}{2im}\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right] - \frac{\hbar}{2mi}\nabla\cdot\left[\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi\right] = 0$$

relembrando a eq da continuidade podemos dizer: (novamente)

$$\rho = -\frac{\hbar}{2mic^2}\left[\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right]$$

$$j = \frac{\hbar}{2mi}\nabla\left[\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi\right]$$

fazendo o paralelismo com a Eq. Schrodinger:
j é o mesmo mas a densidade de probabilidade ρ é bastante diferente.

Como ψ e $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ para um qualquer t podem ter valores arbitrários então ρ pode ser positivo ou negativo. Como ρ deixa de ser positivo deixa de ser uma densidade de probabilidade.

7