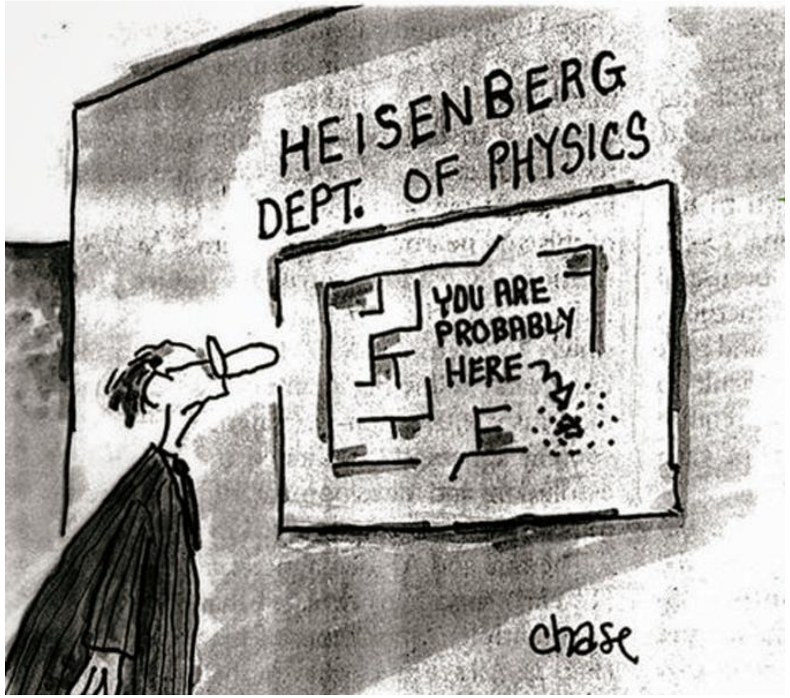
Sperimentiamo:

Sonificazione della Relazione di Indeterminazione



Isabella Masina, *Università di Ferrara e INFN, Dip. Fisica e Scienze della Terra*
Giuseppe Lo Presti, *CERN, Dip. IT*

Italian Teacher Programmes 2022 – Discovery – 11/10/2022

Premessa

Presentiamo un piccolo estratto dal corso “*Waves, Acoustics and Music*”, tenuto da I. Masina, in collaborazione con G. Lo Presti e altri docenti, per la Laurea Triennale (e il PhD) in Fisica, presso l’Università di Ferrara,

→ taglio spiccatamente multi-disciplinare

Gli studenti della LT conoscono la relazione di indeterminazione dal punto di vista «formale» della Meccanica Quantistica.
Sperimentarne una sonificazione consente di:

- sviluppare strumenti di programmazione
- suscitare interesse per ulteriori approfondimenti
- divertirsi e allargare gli orizzonti

⬅ proponibile in generale per scuola secondaria/outreach

In meccanica quantistica, il «principio» d'indeterminazione di Heisenberg, enunciato nel 1927, stabilisce i limiti nella misurazione dei valori di alcune grandezze (dette coniugate o incompatibili) di un sistema fisico

Per una particella, nella forma più nota, viene espresso da

incertezza sulla quantità di moto

incertezza sulla posizione

costante di Planck ridotta, circa 10^-34 J s

$$\Delta x \ \Delta p_x \geq \hbar/2$$

Principio o relazione?

Heisenberg non utilizzò quasi mai il sostantivo *principio.* Le dizioni da lui più usate furono: relazioni d'inesattezza, relazioni d'incertezza e relazioni d'indeterminazione.

Solo nel 2013 (86 anni dopo l'articolo originale di Heisenberg), si è trovato il modo di *ricavare* le sue relazioni d'indeterminazione dai postulati della meccanica quantistica.
Anche se non si tratta quindi di un *principio*, per ragioni storiche si continua a indicarlo come tale.

In meccanica quantistica, il «principio» d'indeterminazione di Heisenberg, enunciato nel 1927, stabilisce i limiti nella misurazione dei valori di alcune grandezze (dette coniugate o incompatibili) di un sistema fisico.

Per una particella, nella forma più nota,
viene espresso da

incertezza sulla quantità di moto

incertezza sulla posizione

costante di Planck ridotta,
circa 10^-34 J s

$$\Delta x \; \Delta p_x \geq \hbar/2$$

Si può anche trovare nella forma tempo-energia,
in cui x→t, p→E

incertezza sull'energia

incertezza sul tempo

$$\Delta t \; \Delta E \geq \hbar/2$$

Si possono trovare varie formulazioni, a seconda di cosa si intende per «Delta»…

Table from: C. Cosmelli: Il principio di indeterminazione

Libro/Articolo/Sito	Relazione x;p	Relazione E;t	Significato Δ
W. Heisenberg, 1927	$p_1 \cdot x_1 \sim h$	$E_1 \cdot t_1 \sim h$	p_1 = precisione di p…
W. Heisenberg, 1929	$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$		Δ = indeterminazione / ind. media
E.H. Kennard, 1927	$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \hbar/2$	$\sigma_E \cdot \sigma_t \geq \hbar/2$	σ = deviazione standard
Wikipedia	$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$	$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$	Δ = incertezza
Javorski, Manuale di Fisica	$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$	$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$	Δ = scarto quadratico medio
Halliday -R. – K. Fisica 2	$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$	$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$	Δ = larghezza pacchetto, larghezza a mezza altezza della distribuzione
L'Amaldi per i LS - blu	$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$	$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$	Δ = indeterminazione
L'Amaldi per i LS	$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$	$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$	Δ = indeterminazione // incertezza

← legato alla misura:
approccio operazionale

← proprietà intrinseca:
approccio statistico

… non è certo facile introdurlo alle superiori!

Si dice che appresenti un concetto cardine della meccanica quantistica,
e che abbia sancito una radicale rottura rispetto alle leggi della meccanica classica, etc.

Ed è vero ma …

… come sottolineato da Bohr (1928)
proprio la meccanica classica, in particolare le onde sonore,
forniscono un'analogia per visualizzarlo

Noi la renderemo «orecchiabile»!

Relazioni di indeterminazione caratterizzano fenomeni ondulatori
sia in fisica «moderna» che in fisica «classica»

in particolare in meccanica quantistica,
dove si considerano fenomeni microscopici
(che avvengo a lunghezze tipiche dell'atomo)
e si utilizza la «funzione d'onda», la cui interpretazione non è affatto assodata

ad esempio, le onde sonore (onde di pressione)

offrono una ANALOGIA per esemplificare le «misteriose» relazioni di indeterminazione della meccanica quantistica

Il legame cruciale è
il dualismo onda-particella
di De Broglie (1924)

Per un segnale sonoro in un certo punto x, è ben nota la Relazione di indeterminazione tempo-frequenza
(Gabor limit nella teoria dei segnali)

Durata del segnale

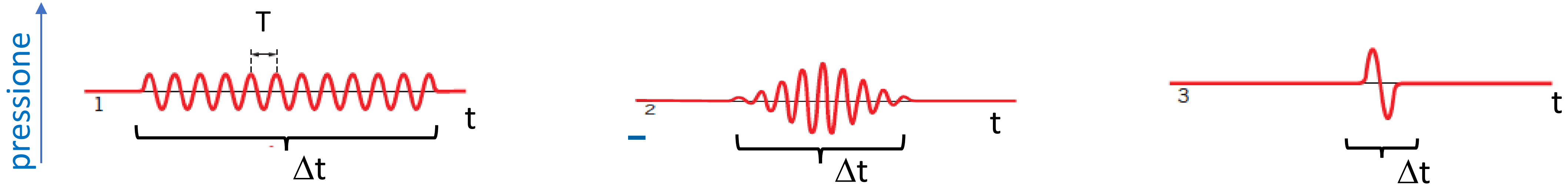
Banda di frequenze

$$\Delta t \;\; \Delta f \geq 1/4\pi$$

← in seguito la giustificheremo e sperimenteremo!

Ad un segnale di durata temporale limitata Δt è associata una banda di frequenze Δf, tanto più larga quanto più corto è il segnale

Dall'Amaldi Blu



Solo per un segnale s(t) di durata Δt infinita la frequenza f è perfettamente «determinata»:

$$s(t) = \sin(2\pi\, t/T) \quad , \quad f=1/T$$

Mutatis mutandis

$t \rightarrow x, f \rightarrow \nu$

Per un segnale sonoro a un certo tempo t, è ben nota la Relazione di indeterminazione posizione-numero d'onda

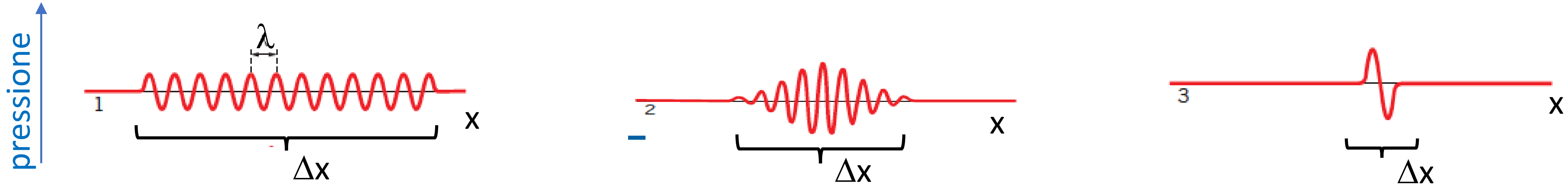
Banda di numeri d'onda

Localizzazione del segnale

$$\Delta x \;\; \Delta\nu \geq 1/4\pi$$

Ad un segnale di estensione spaziale limitata Δx è associata una banda di numeri d'onda $\Delta\nu$, tanto più larga quanto più corto è il segnale

Dall'Amaldi Blu



Solo per un segnale s(x) di estensione Δx infinita il numero d'onda ν è perfettamente «determinato»:

$$s(x) = \sin(2\pi\, x/\lambda) \quad , \quad \nu = 1/\lambda$$

Per un quanto (onda-particella) di luce (e.g. fotone)

Per un quanto (onda-particella) di materia (e.g. elettrone)

Planck-De Broglie:

$$E = 2\pi\,\hbar\,f$$

$$\Delta t\ \Delta f \geq 1/4\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t\,\Delta E \geq \hbar/2}$$

De Broglie:

$$p = 2\pi\,\hbar\,\nu$$

$$\Delta x\ \Delta \nu \geq 1/4\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta x\ \Delta p \geq \hbar/2}$$

L'incertezza deriva (anche) dalla natura ondulatoria di luce e materia!

Questi erano «in nuce» gli argomenti esposti da Bohr (1928). Nel suo lavoro Heisenberg (1927) aveva adottato un punto di vista diverso, operazionale (e per misure successive, non simultanee)

Heisenberg Bohr

Bohr non condivise mai l'interpretazione di Heisenberg, secondo cui le relazioni d'indeterminazione sono dovute al disturbo inevitabilmente associato al processo quantistico di misurazione.

Sostenne invece che sono espressione del principio di complementarità, da lui enunciato al Congresso internazionale dei fisici del 1927 e pubblicato nel suo articolo del 1928.

Oggi, tentativi di generalizzare le relazioni coinvolgono entrambi gli aspetti

[Ozawa 2003, Fujikawa 2012].

Sonification: the Fourier Transform

When manipulating sounds and audio signals, the Fourier Transform comes in very handy. Let's refresh it a bit before moving forward.

The Fourier Transform, $S(f)$, of a time-dependent function (signal), $s(t)$, is a complex-valued function defined as:

$$S(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

Our hears essentially provide a stimulus that is proportional to the ***Power spectral density*** $|S(f)|^2$ of the incoming sound (pressure) wave

=> "Sonification", properly speaking, leverages on this peculiar ability!

The Fourier Transform

Some particular cases:

1) Transforming a monochromatic signal of a given frequency f_0 yields the "Dirac delta" distribution, and vice versa:

$$s(t) = e^{i2\pi f_0 t} \Rightarrow S(f) = \delta(f - f_0)$$

$$s(t) = \delta(t) \Rightarrow S(f) = 1$$

2) Transforming a Gaussian yields another Gaussian:

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-t^2/2\sigma^2} \Rightarrow S(f) = e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2}$$

The (Tonal) Uncertainty Relation

Let's consider now signals with null average:

$$\mu(s) := \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x|s(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |s(x)|^2 dx} = 0$$

And let's define the *second momentum* or ***variance*** as:

$$\sigma^2(s) := \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2|s(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} |s(x)|^2 dx}$$

The variance can be defined both in the time domain and in the frequency domain, and it accounts for the ***time duration*** and ***bandwidth*** of a wavelet, respectively: cf. Δt and Δf introduced earlier!

The (Tonal) Uncertainty Relation

Using the **Cauchy-Schwartz** inequality for functions in L^2, it can be proven that:

$$||\mathbf{s}||^2 \cdot ||\mathbf{S}||^2 \equiv \sigma^2(s) \cdot \sigma^2(S) \geq \frac{1}{16\pi^2} \equiv |\langle \mathbf{s}, \mathbf{S} \rangle|^2$$

vectors in the $\boldsymbol{L}^2$ space

With the equality holding for Gaussian signals:

$$\sigma_t \cdot \sigma_f = \frac{1}{4\pi}$$

If we use the angular frequency $\omega = 2\pi f$:

$$\sigma_t \cdot \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}$$

Let’s try it out!

We use now *iPython*, interactive python notebooks powered by Anaconda

Transients and Windowing

From the Uncertainty Relation it follows that transients must be wide in frequency

- **“Click” effect when listening to a sound with a sharp start**
- Pinched strings, guitars typically affected
- Initial transient determinant for the *timbre* of an instrument

How to “compress” the bandwidth of a wavelet and smooth its beginning and end?

- By enveloping (*windowing*) the wavelet
- A window function is a function $w(t)$ such that:

$$
\begin{aligned}
w(t) &\neq 0 \quad \text{if } t \in [-T/2, T/2] \\
w(t) &= 0 \quad \text{otherwise}
\end{aligned}
$$

Back to the Fourier Transform

The ***convolution*** of two signals gets transformed to the product, and vice versa:

$$c(t) := (s_1 * s_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \cdot s_2(t-\tau) d\tau \Rightarrow C(f) = S_1(f) \cdot S_2(f)$$
$$p(t) := s_1(t) \cdot s_2(t) \Rightarrow P(f) = (S_1 * S_2)(f)$$

A monochromatic signal enveloped in a window gets transformed to the Fourier transform of the window, shifted by the signal frequency:

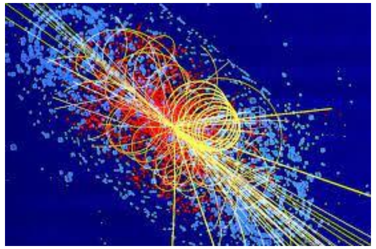
$$s(t) = w(t) \cdot e^{i2\pi f_0 t} \Rightarrow S(f) = W(f) * \delta(f - f_0) = W(f - f_0)$$

Ma insomma… onde o particelle?

… a seconda del processo fisico, è adatta l'una o l'altra descrizione

In generale si possono distinguere:

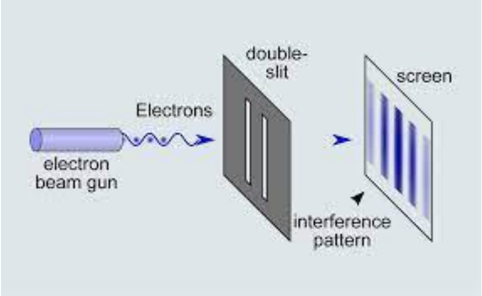
- energie relativistiche → particella



Come nei «fuochi d'artificio» del CERN

- energie non-relativistiche & apparato opportuno → onde

Esempio:
doppia fenditura



(see e.g. Frabboni et al 2012)

… il PROBLEMA è tuttora APERTO

Conclusioni

Esempio di analogia sonora di concetti quantomeccanici,
con introduzione di strumenti (*iPython*) molto comuni in Fisica per l'analisi dati

A distanza di tanti anni dalla famosa chiaccherata da caffé

il problema rimane aperto…

… e affascinante!

Grazie per l'attenzione!