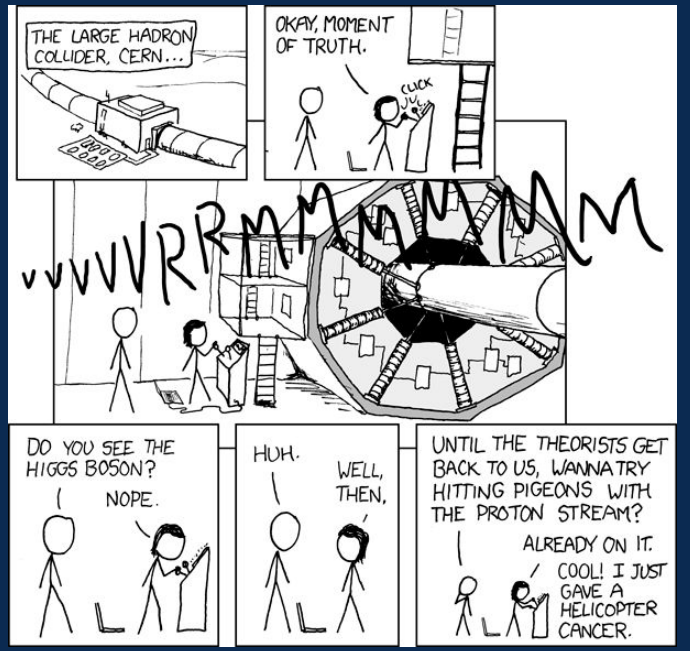
Statistik und Hypothesentests

Frank Siegert

Institut für Kern- und Teilchenphysik,
TU Dresden
frank.siegert@tu-dresden.de

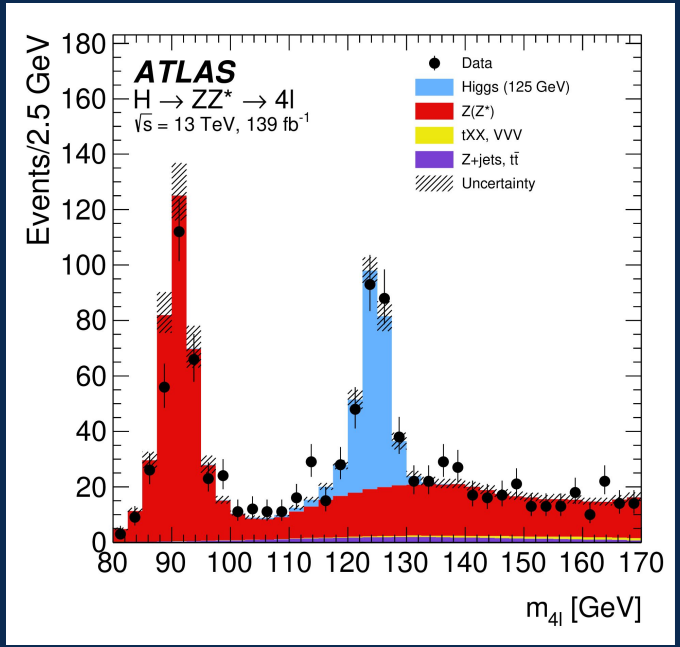


TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN
Fakultät Physik Institut für Kern- und Teilchenphysik

Statistik und Hypothesentests

Frank Siegert

Institut für Kern- und Teilchenphysik,
TU Dresden
frank.siegert@tu-dresden.de



Der Zufall in Alltag & Physik

- Vieles im Alltag wird vom Zufall bestimmt, wie wir auch gerade in der Pandemie sehen!

Wieviele ⚅ bei 5 Würfen?

Wieviele Menschen im Bild stecken sich an?

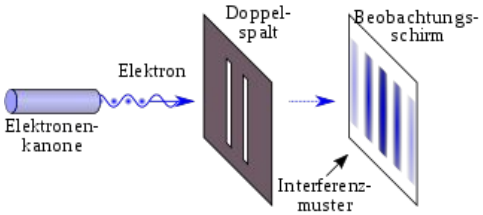
Werde ich schwer erkranken?

Wieviele Patienten kommen heute an?

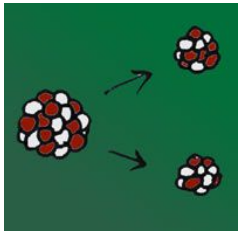
- Aber ist das wirklich “Zufall”? Nein:
  - Meist nur fehlende Information: unbekannte Ursache, aber eigentlich “deterministisch”
  - Zufall sowieso nur im Einzelfall -- für große Fallzahlen können wir gut vorhersehen!

Der Zufall in Alltag & Physik

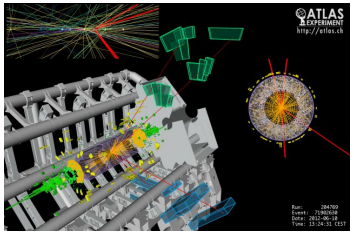
- In der Physik wiederum gibt es faszinierenden Zufall:



Welchen Weg nimmt das Elektron am Doppelspalt?



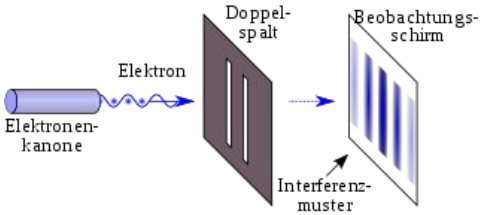
Wann zerfällt ein radioaktiver Kern?



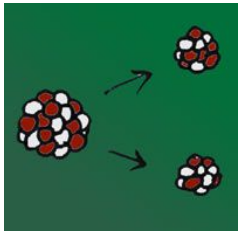
Produziert eine Proton-Proton-Kollision am LHC ein Higgs-Boson?

Der Zufall in Alltag & Physik

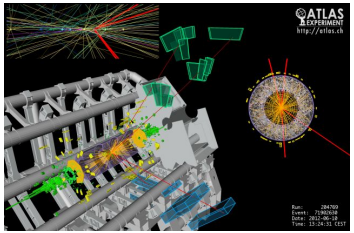
- In der Physik wiederum gibt es faszinierenden Zufall:



Welchen Weg nimmt das Elektron am Doppelspalt?



Wann zerfällt ein radioaktiver Kern?

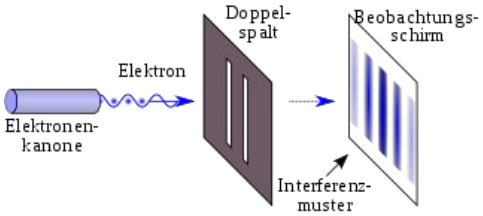


Produziert eine Proton-Proton-Kollision am LHC ein Higgs-Boson?

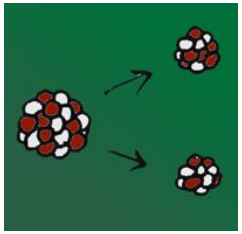
- Wir wissen heute: Quantenphysik → Das ist echter Zufall!

Der Zufall in Alltag & Physik

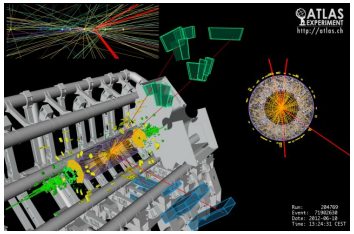
- In der Physik wiederum gibt es faszinierenden Zufall:



Welchen Weg nimmt das Elektron am Doppelspalt?



Wann zerfällt ein radioaktiver Kern?



Produziert eine Proton-Proton-Kollision am LHC ein Higgs-Boson?

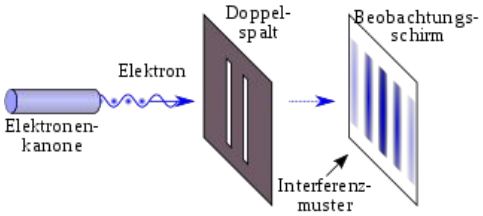
- Wir wissen heute: Quantenphysik → Das ist echter Zufall!

Im Gegensatz dazu die Physik um 1900:

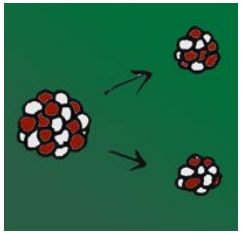
"Wir können alles vorhersagen, wenn wir uns nur anstrengen."
(Glaubten lange nicht an echten Zufall,
vermuteten wieder unbekannte Ursachen.)

Der Zufall in Alltag & Physik

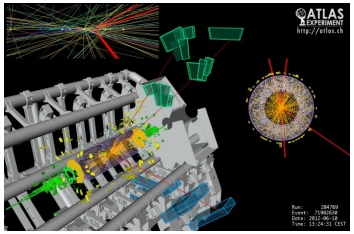
- In der Physik wiederum gibt es faszinierenden Zufall:



Welchen Weg nimmt das Elektron am Doppelspalt?



Wann zerfällt ein radioaktiver Kern?



Produziert eine Proton-Proton-Kollision am LHC ein Higgs-Boson?

- Wir wissen heute: Quantenphysik → Das ist echter Zufall!

Müssen wir also Vorhersagen aufgeben?

Nein! Denn auch hier: Zufall nur im Einzelfall, für große Fallzahlen vorhersagbar!

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- All diese Beispiele sind **Zählexperimente**:
  - N **unabhängige** Messungen ...
  - der gleichen **Größe** X ...
  - unter **identischen** Bedingungen

Wahrscheinlichkeitsverteilung für Werte der Zufallsvariable X

$$P(X) = \frac{\text{Wie häufig ein Ereignis } X \text{ eintritt}}{\text{Anzahl der Messungen } N}$$

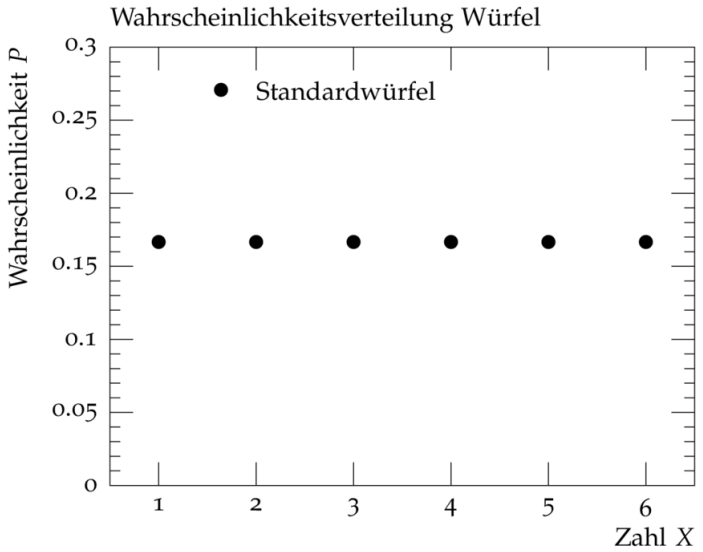
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- All diese Beispiele sind **Zählexperimente**:
  - N **unabhängige** Messungen …
  - der gleichen **Größe** X …
  - unter **identischen** Bedingungen

Wahrscheinlichkeitsverteilung für Werte der Zufallsvariable X

$$P(X) = \frac{\text{Wie häufig ein Ereignis } X \text{ eintritt}}{\text{Anzahl der Messungen } N}$$

- Einfaches **Beispiel**: X=Zahl eines Würfels
  - Langweilige Wahrscheinlichkeitsverteilung
    $P(1) = P(2) = \ldots = P(6) = 1/6$



Wahrscheinlichkeitsverteilungen

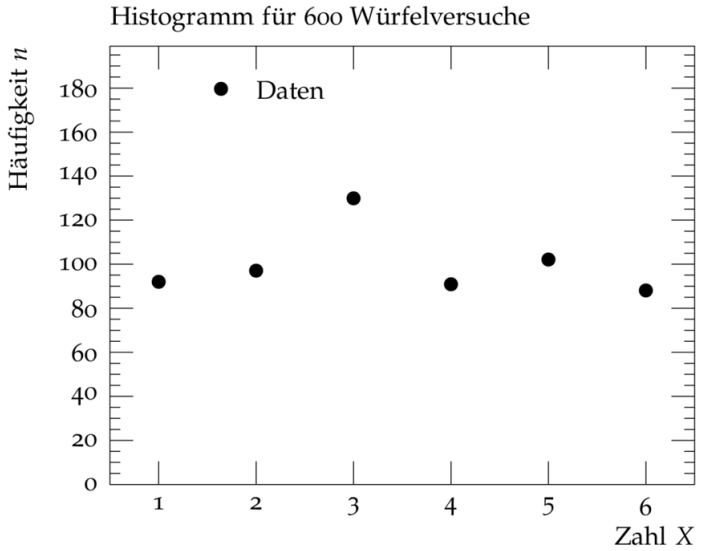
- All diese Beispiele sind **Zählexperimente**:
  - *N* **unabhängige** Messungen …
  - der gleichen **Größe** *X* …
  - unter **identischen** Bedingungen

Wahrscheinlichkeitsverteilung für Werte der Zufallsvariable *X*

$$P(X) = \frac{\text{Wie häufig ein Ereignis } X \text{ eintritt}}{\text{Anzahl der Messungen } N}$$

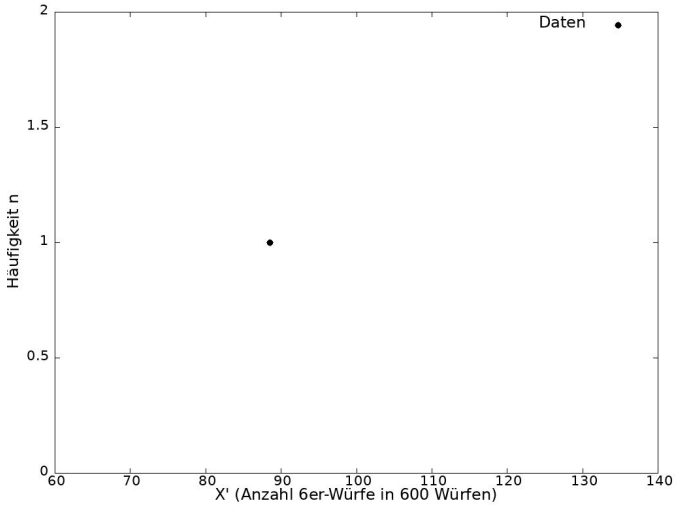
- Einfaches **Beispiel**: *X*=Zahl eines Würfels
  - Langweilige Wahrscheinlichkeitsverteilung
    P(1) = P(2) = … = P(6) = ⅙
- **Messung** mit begrenzter Versuchszahl N=600
  → **Schätzung** des zugrundeliegenden P(X)
  - Oft durch Histogramm dargestellt:
    - » x-Achse: Mögliche Werte der Zufallsvariable
    - » y-Achse: Wahrscheinlichkeit bzw. Häufigkeit

  z.B. *n(6)=88 → P(6) ≈ 88/600*



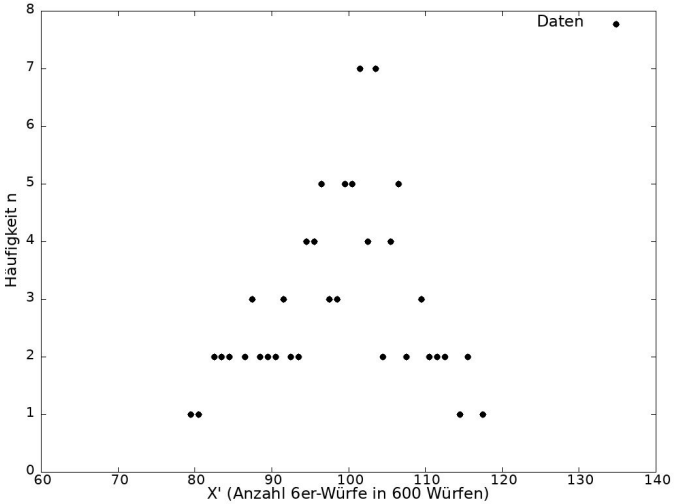
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Wir merken: "*n(6)*" ist **wiederum eine Zufallsvariable**! Nennen wir sie *X':*
  - Bei unserem einen Versuch (*N'=1*) hatte diese den Wert *X'=88.*



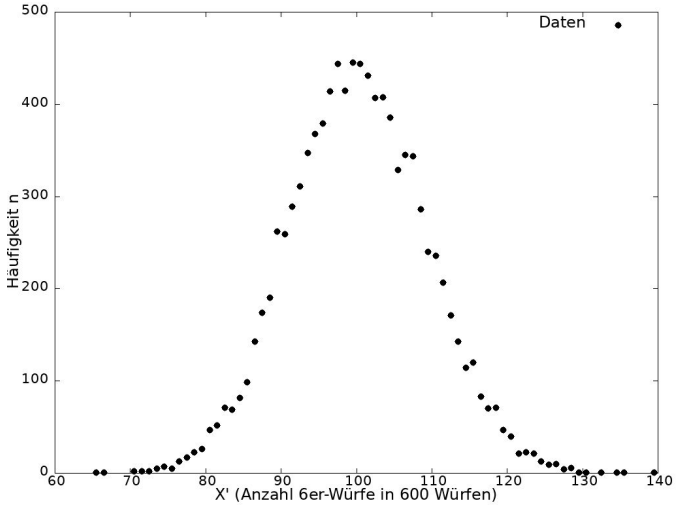
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Wir merken: "*n(6)*" ist **wiederum eine Zufallsvariable**! Nennen wir sie *X':*
  - Bei unserem einen Versuch (*N'=1*) hatte diese den Wert *X'=88.*
  - Wenn wir das Experiment *N'=100* mal ausführen, sehen wir schon eine Verteilung im Histogramm.



Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Wir merken: "*n(6)*" ist **wiederum eine Zufallsvariable**! Nennen wir sie *X':*
  - Bei unserem einen Versuch (*N'=1*) hatte diese den Wert *X'=88*.
  - Wenn wir das Experiment *N'=100* mal ausführen, sehen wir schon eine Verteilung im Histogramm.
  - Nach *N'=10000* wird die typische Wahrscheinlichkeits-verteilung sichtbar, die für Zählexperimente gilt:
    - » unabhängige Wiederholungen
    - » der gleichen Messgröße
    - » mit konstanten Bedingungen (Wahrscheinlichkeit)



→ **Poissonverteilung** (hier: um $\lambda=100$)

$$P'(X') = \frac{\lambda^{X'}}{X'!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

bzw. für große λ ($\gtrsim$25) → annähernd **Gauß-Normalverteilung** mit $\mu=\lambda$ und $\sigma^2=\lambda$

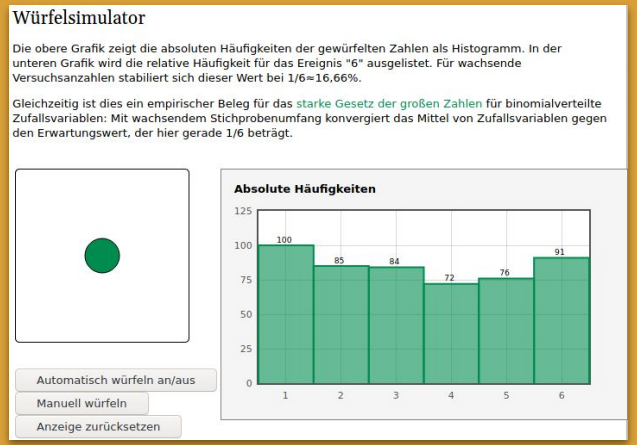
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

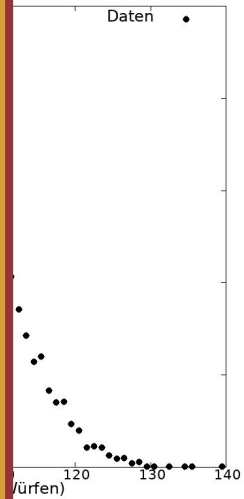
lungen

- W

Selbst ausprobieren:

https://www.mathematik.tu-clausthal.de/de/interaktiv/simulation/wuerfel/

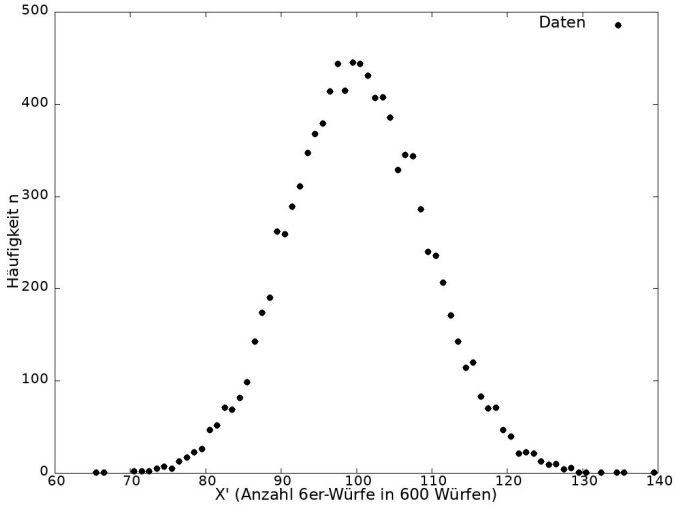




- 600 Wuerfelversuche probieren, mehrmals
- Diskussion der Streuung von n(6) in Euren Versuchen bzw. im Raum
  - Ideen für eine Quantifizierung der Ergebnisse?
- Zurück zur Anfangsfrage:
  Zufallsbehaftete Schätzungen/Messungen → Zuverlässige Aussagen?

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

- Wir merken: "*n(6)*" ist **wiederum eine Zufallsvariable**! Nennen wir sie *X':*
  - Bei unserem einen Versuch (*N'=1*) hatte diese den Wert *X'=88*.
  - Wenn wir das Experiment *N'=100* mal ausführen, sehen wir schon eine Verteilung im Histogramm.
  - Nach *N'=10000* wird die typische Wahrscheinlichkeits-verteilung sichtbar, die für Zählexperimente gilt:
    - » unabhängige Wiederholungen
    - » der gleichen Messgröße
    - » mit konstanten Bedingungen (Wahrscheinlichkeit)



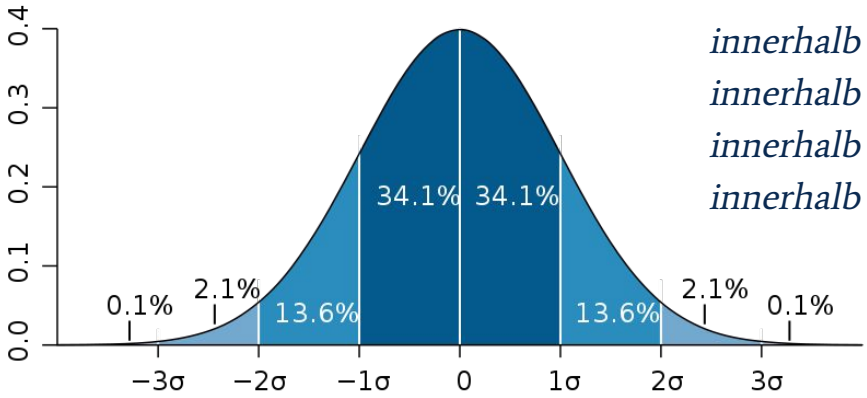
→ **Poissonverteilung** (hier: um $\lambda=100$)

$$P'(X') = \frac{\lambda^{X'}}{X'!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

bzw. für große λ ($\gtrsim$25) → annähernd **Gauß-Normalverteilung** mit $\mu=\lambda$ und $\sigma^2=\lambda$

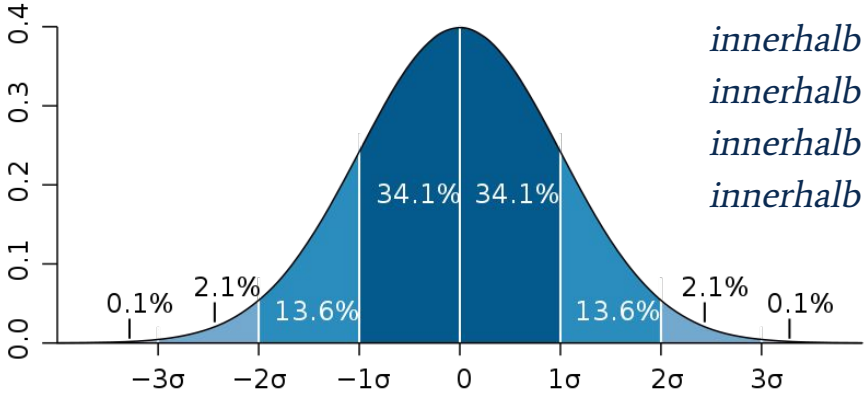
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- Normalverteilung mit bekannter Varianz $\sigma^2 = \lambda$
  → ablesbar, wie "selten" welche **Abweichungen** sind:



innerhalb 1σ → 68%
innerhalb 2σ → 95%
innerhalb 3σ → 99,7%
innerhalb 5σ → 99,99994%

- Normalverteilung mit bekannter Varianz $\sigma^2 = \lambda$
  → ablesbar, wie “selten” welche **Abweichungen** sind:



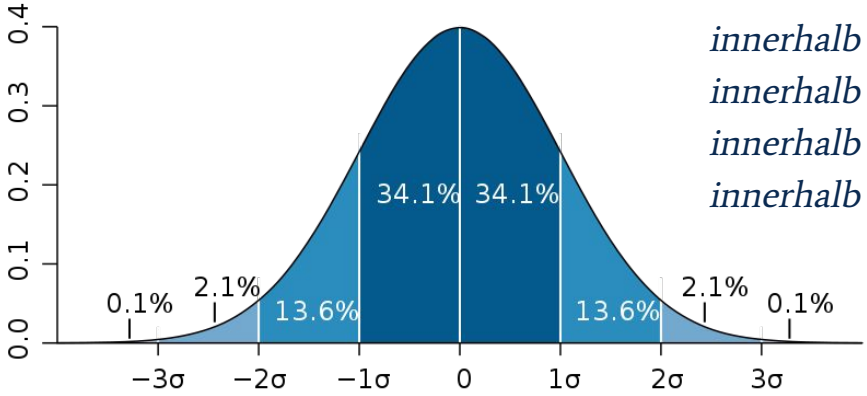
innerhalb 1σ → 68%
innerhalb 2σ → 95%
innerhalb 3σ → 99,7%
innerhalb 5σ → 99,99994%

- Umgekehrt können wir das **Konfidenzintervall** für jedes Bin **schätzen**, z. B. hier bei *X=6* (mit *X’=88*):

$$\sigma = \sqrt{\lambda} \approx \sqrt{88} \approx 9{,}4$$

Hypothesentests

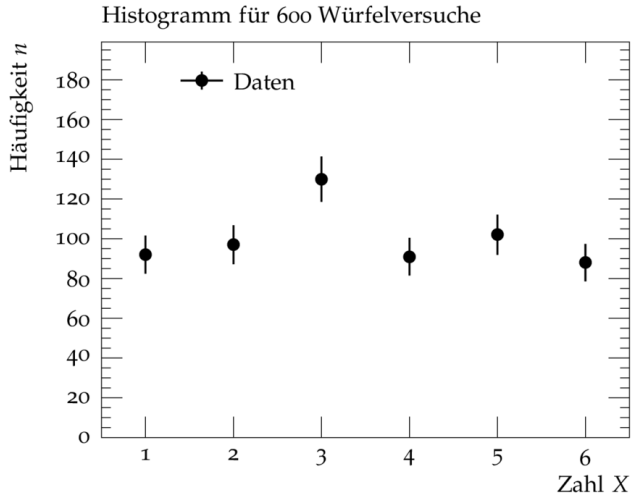
- Normalverteilung mit bekannter Varianz $\sigma^2 = \lambda$
  → ablesbar, wie "selten" welche **Abweichungen** sind:



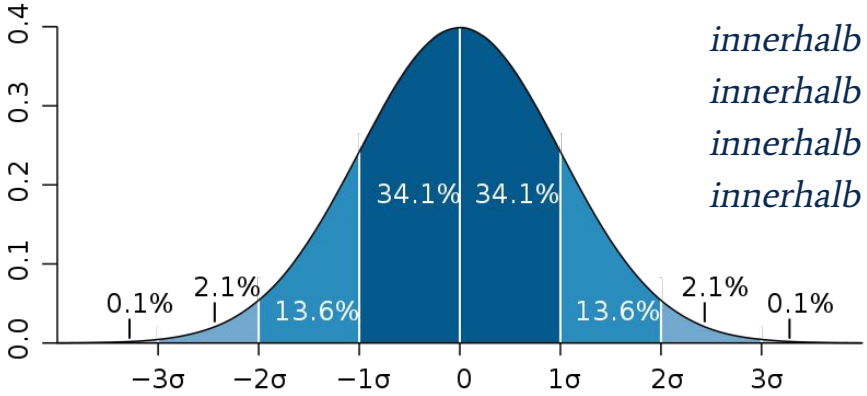
innerhalb 1σ → 68%
innerhalb 2σ → 95%
innerhalb 3σ → 99,7%
innerhalb 5σ → 99,99994%

- Umgekehrt können wir das **Konfidenzintervall** für jedes Bin **schätzen**, z. B. hier bei *X=6* (mit *X'=88*):

$$\sigma = \sqrt{\lambda} \approx \sqrt{88} \approx 9{,}4$$



- Normalverteilung mit bekannter Varianz $\sigma^2 = \lambda$
  → ablesbar, wie "selten" welche **Abweichungen** sind:

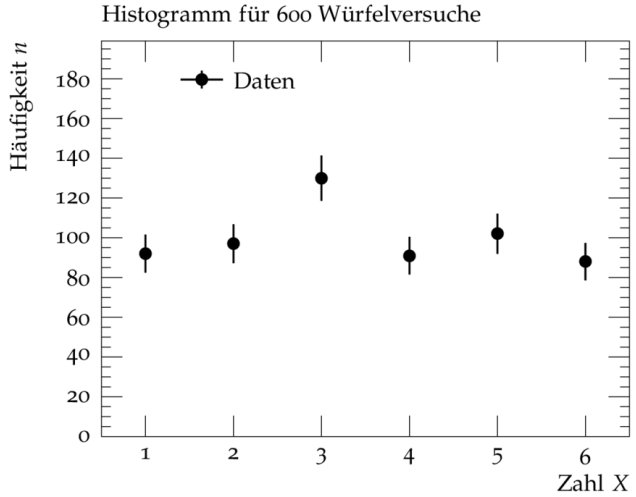


innerhalb 1σ → 68%
innerhalb 2σ → 95%
innerhalb 3σ → 99,7%
innerhalb 5σ → 99,99994%

- Umgekehrt können wir das **Konfidenzintervall** für jedes Bin **schätzen**, z. B. hier bei *X=6* (mit *X'=88*):

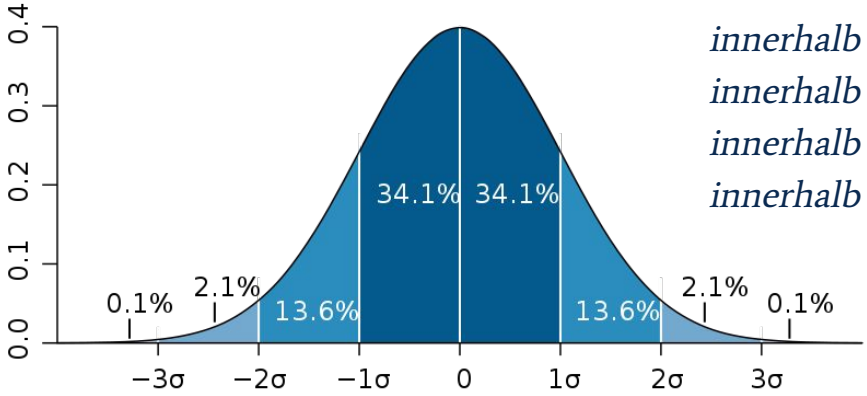
$$\sigma = \sqrt{\lambda} \approx \sqrt{88} \approx 9{,}4$$

→ **Quizfrage siehe Zoom-Umfrage**



Hypothesentests

- Normalverteilung mit bekannter Varianz $\sigma^2 = \lambda$
  → ablesbar, wie "selten" welche **Abweichungen** sind:

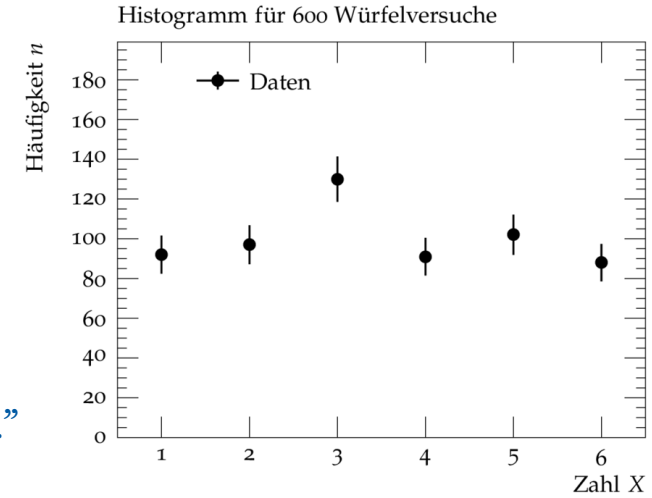


innerhalb 1σ → 68%
innerhalb 2σ → 95%
innerhalb 3σ → 99,7%
innerhalb 5σ → 99,99994%

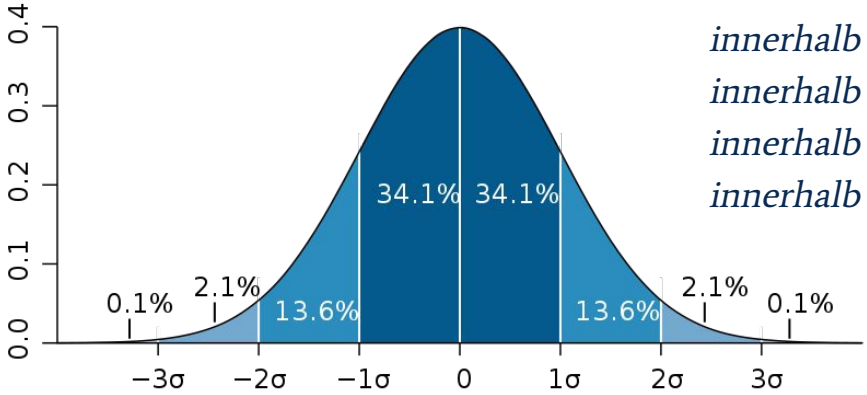
- Umgekehrt können wir das **Konfidenzintervall** für jedes Bin **schätzen**, z. B. hier bei *X=6* (mit *X'=88*):

$$\sigma = \sqrt{\lambda} \approx \sqrt{88} \approx 9{,}4$$

"Das 88±9,4 Intervall enthält zu 68% den wahren Wert."



- Normalverteilung mit bekannter Varianz $\sigma^2 = \lambda$
  → ablesbar, wie "selten" welche **Abweichungen** sind:



innerhalb 1σ → 68%
innerhalb 2σ → 95%
innerhalb 3σ → 99,7%
innerhalb 5σ → 99,99994%

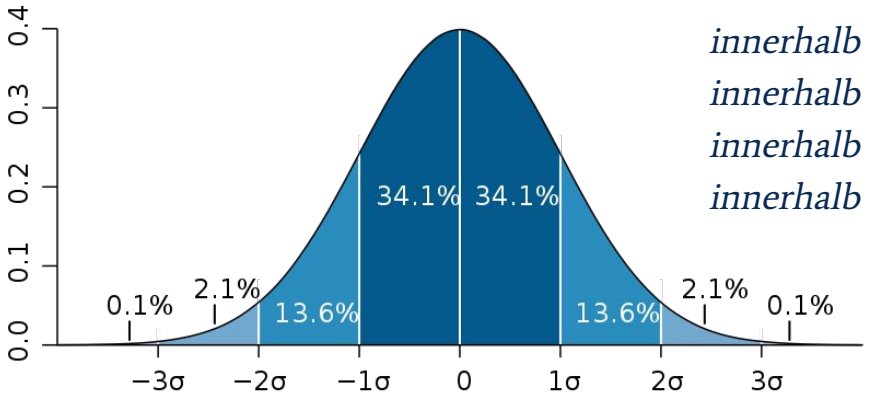
- Umgekehrt können wir das **Konfidenzintervall** für jedes Bin **schätzen**, z. B. hier bei *X=6* (mit *X'=88*):

$$\sigma = \sqrt{\lambda} \approx \sqrt{88} \approx 9{,}4$$

→ Darauf basierend:
Hypothesentests
Kompatibilitaet mit einer Theorievorhersage (z.B. "n(6)=100")

Hypothesentests

- Normalverteilung mit bekannter Varianz $\sigma^2 = \lambda$
  → ablesbar, wie "selten" welche **Abweichungen** sind:



innerhalb 1σ → 68%
innerhalb 2σ → 95%
innerhalb 3σ → 99,7%
innerhalb 5σ → 99,99994%

Angestrebte Zuverlässigkeit einer Studie oft abhängig vom Fach:
- Sozialwissenschaften oft schon ~2σ "signifikant"
- Teilchenphysik: "Entdeckung" ab 5σ

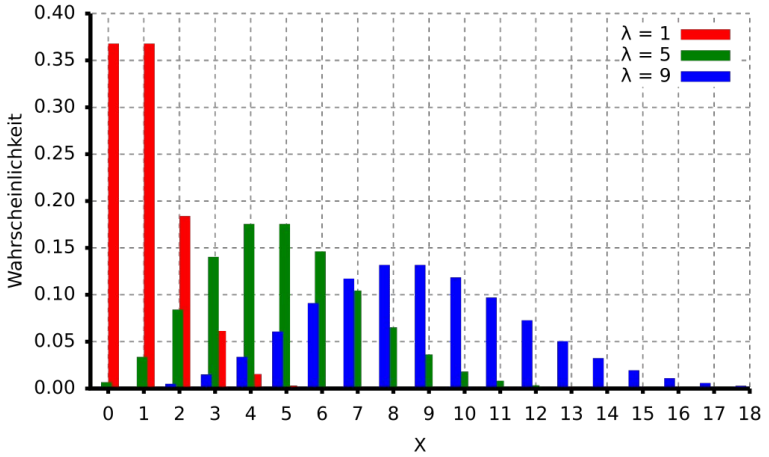
- Umgekehrt können wir das **Konfidenzintervall** für jedes Bin **schätzen**, z. B. hier bei *X=6* (mit *X'=88*):

$$\sigma = \sqrt{\lambda} \approx \sqrt{88} \approx 9{,}4$$

Statistische Unsicherheit

- (Statistische) Unsicherheit eines Zählexperiments hängt also von Häufigkeit ab:

$$\sigma = \sqrt{\lambda} \approx \sqrt{n}$$



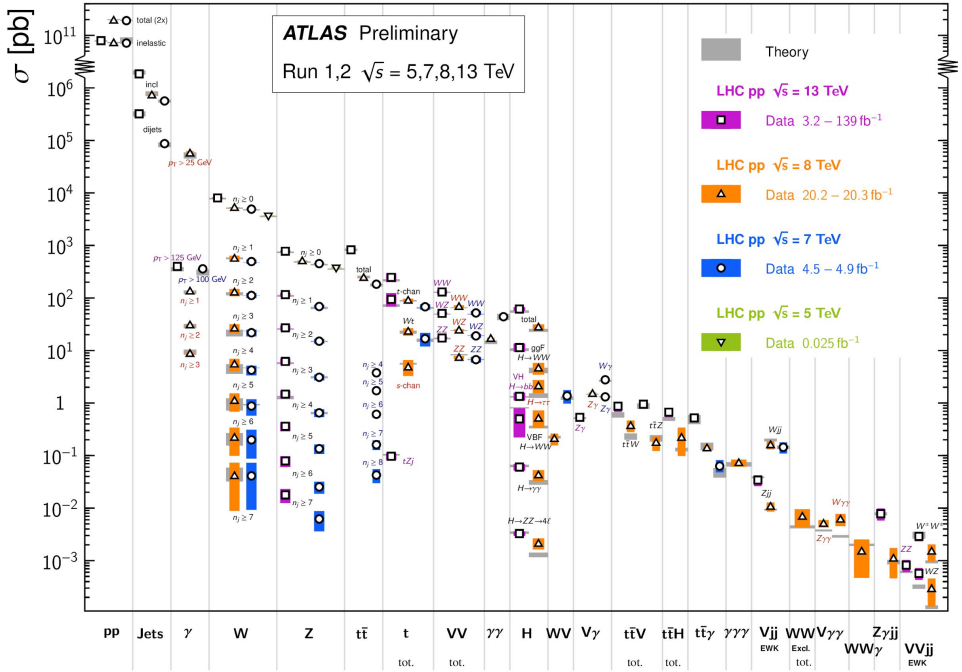
- Absolute Unsicherheit steigt mit mehr Versuchen
- Uns interessiert fast immer die **relative Unsicherheit**
  → sinkt mit typischem Konvergenz-Verhalten:

$$\frac{\sigma}{n} \approx \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

→ Je häufiger gemessen, desto genauer.

Der LHC als Zählexperiment

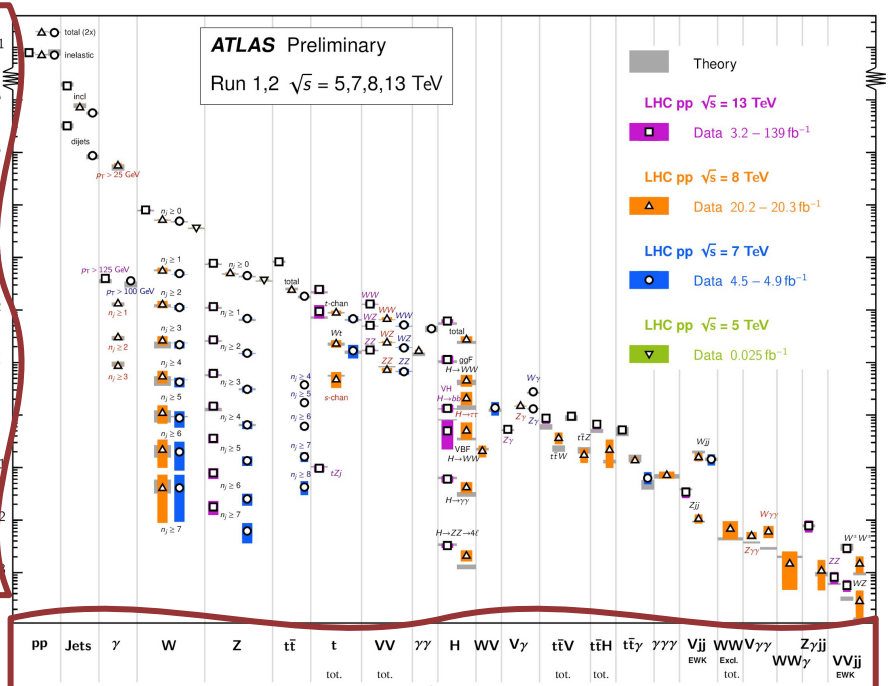
- Was hat das (10000-fache) **Würfeln** von 600 Würfeln mit dem **LHC** zu tun?
- Der LHC ist eine riesige Würfelmaschine ...



Der LHC als Zählexperiment

- Was hat das (10000-fache) **Würfeln** von 600 Würfeln mit dem **LHC** zu tun?
- Der LHC ist eine riesige Würfelmaschine …

… mit nicht-trivialen P(X)



… mit spannenden Ereignissen *X*

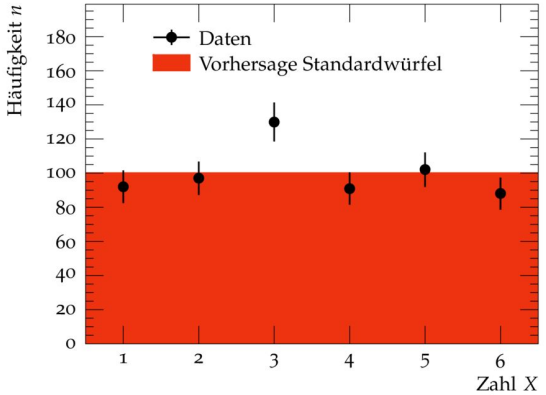
Quantity	Number
Circumference	26659 m
Dipole operating temperature	1.9 K (-271.3°C)
Number of magnets	9593
Number of main dipoles	1232
Number of main quadrupoles	392
Number of RF cavities	8 per beam
Nominal energy, protons	6.5 TeV
Nominal energy, ions	2.56 TeV/u (energy per nucleon)
Nominal energy, protons collisions	13 TeV
No. of bunches per proton beam	2808
No. of protons per bunch (at start)	1.2 x 10^{11}
Number of turns per second	11245
Number of collisions per second	1 billion

… mit unglaublich vielen Versuchen N gleichzeitig!

Wie entdecke ich beim Würfeln ein Higgs-Boson?

Analogie: Ist der Würfel manipuliert?

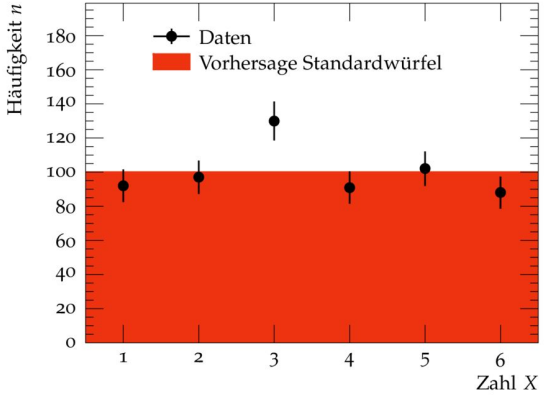
- **Experiment:**
  - 600 Würfel
- **Theorievorhersage:**
  - $n_i = 100$



Wie entdecke ich beim Würfeln ein Higgs-Boson?

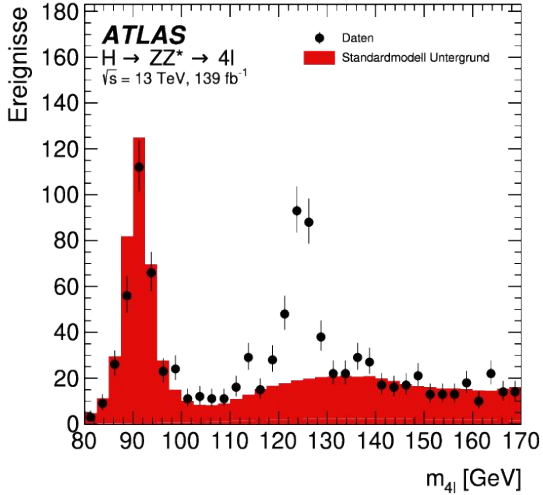
Analogie: Ist der Würfel manipuliert?

- **Experiment:**
  - 600 Würfel
- **Theorievorhersage:**
  - $n_i = 100$



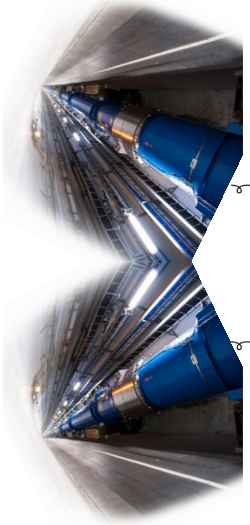
Teilchenphysik: Existiert das Higgs-Boson?

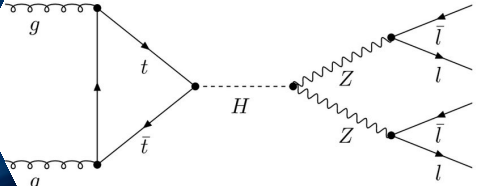
- **Experiment:**
  - 1 Mrd LHC-Kollisionen pro Sekunde für mehrere Jahre
  - aufgezeichnet vom ATLAS-Detektor
  - selektiert und projiziert auf interessante Variablen
- **Theorievorhersage ohne/mit Higgs?**
  - Zum Beispiel aus Standardmodell der Teilchenphysik!
  - Aber nicht analytisch berechenbar!
    - » Verwendung von Monte Carlo-Programmen für statistische Simulation der Theoriehypothese! → später

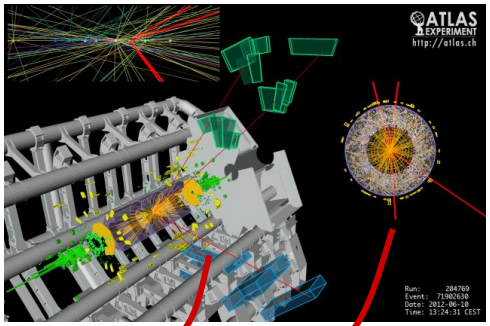


Wie entdecke ich beim Würfeln ein Higgs-Boson?

Crash-Kurs: Higgs-Suche im 4-Leptonen-Endzustand

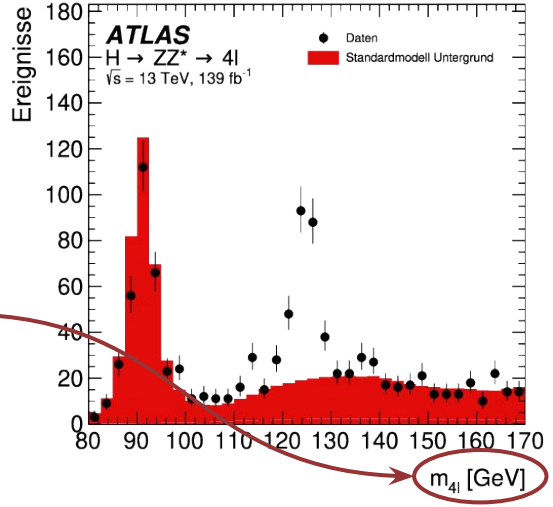






Impulse

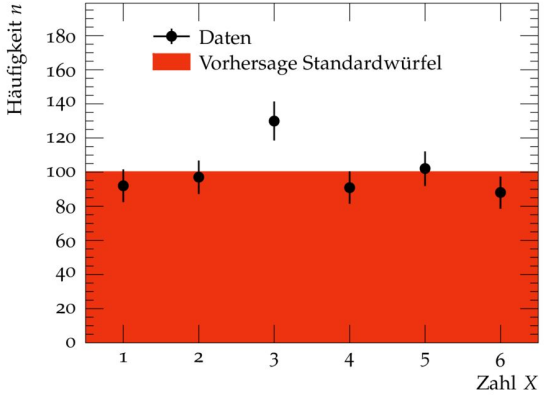
$m_{4l} = \sqrt{(p_1+p_2+p_3+p_4)_\mu (p_1+p_2+p_3+p_4)^\mu} \rightarrow m_H \approx 125$ GeV



Wie entdecke ich beim Würfeln ein Higgs-Boson?

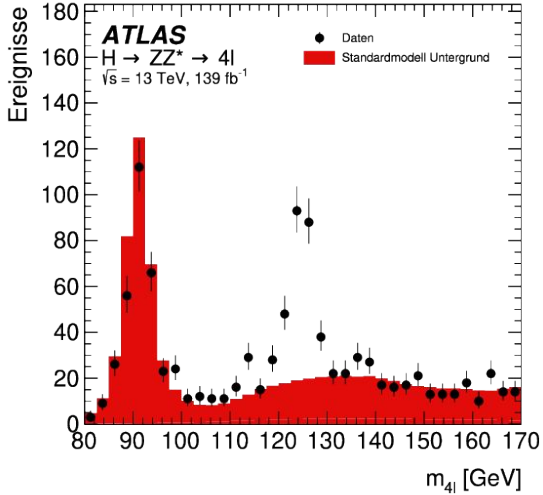
Analogie: Ist der Würfel manipuliert?

- **Experiment:**
  - 600 Würfel
- **Theorievorhersage:**
  - $n_i = 100$



Teilchenphysik: Existiert das Higgs-Boson?

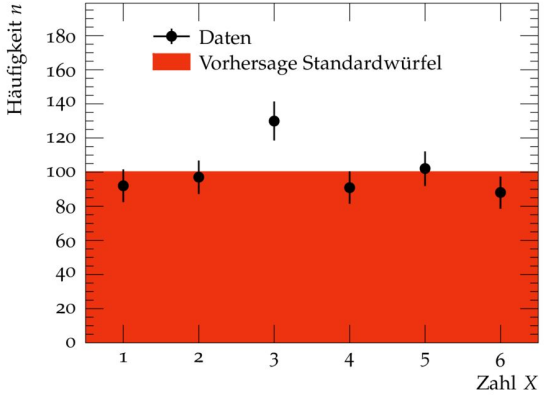
- **Experiment:**
  - 1 Mrd LHC-Kollisionen pro Sekunde für mehrere Jahre
  - aufgezeichnet vom ATLAS-Detektor
  - selektiert und projiziert auf interessante Variablen
- **Theorievorhersage ohne/mit Higgs?**
  - Zum Beispiel aus Standardmodell der Teilchenphysik!
  - Aber nicht analytisch berechenbar!
    - » Verwendung von Monte Carlo-Programmen für statistische Simulation der Theoriehypothese! → später



Wie entdecke ich beim Würfeln ein Higgs-Boson?

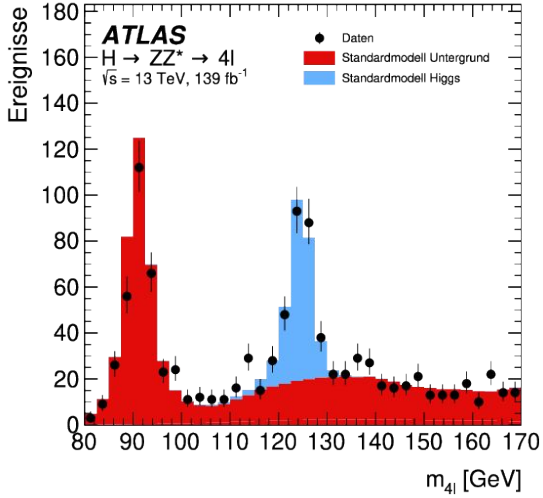
Analogie: Ist der Würfel manipuliert?

- **Experiment:**
  - 600 Würfel
- **Theorievorhersage:**
  - $n_i = 100$



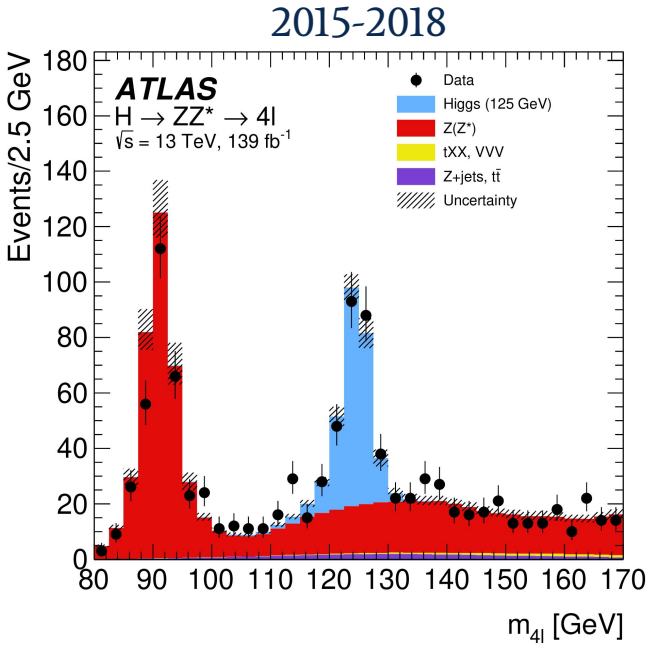
Teilchenphysik: Existiert das Higgs-Boson?

- **Experiment:**
  - 1 Mrd LHC-Kollisionen pro Sekunde für mehrere Jahre
  - aufgezeichnet vom ATLAS-Detektor
  - selektiert und projiziert auf interessante Variablen
- **Theorievorhersage ohne/mit Higgs?**
  - Zum Beispiel aus Standardmodell der Teilchenphysik!
  - Aber nicht analytisch berechenbar!
    - » Verwendung von Monte Carlo-Programmen für statistische Simulation der Theoriehypothese! → später

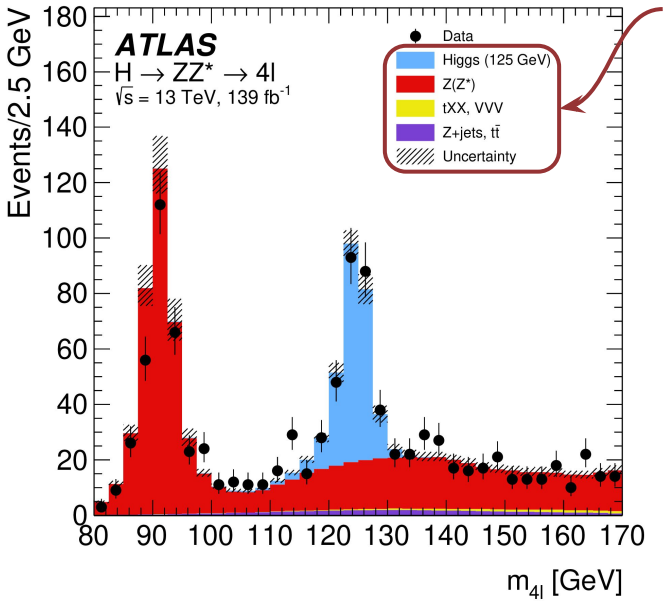


Dafür braucht man Jahre?

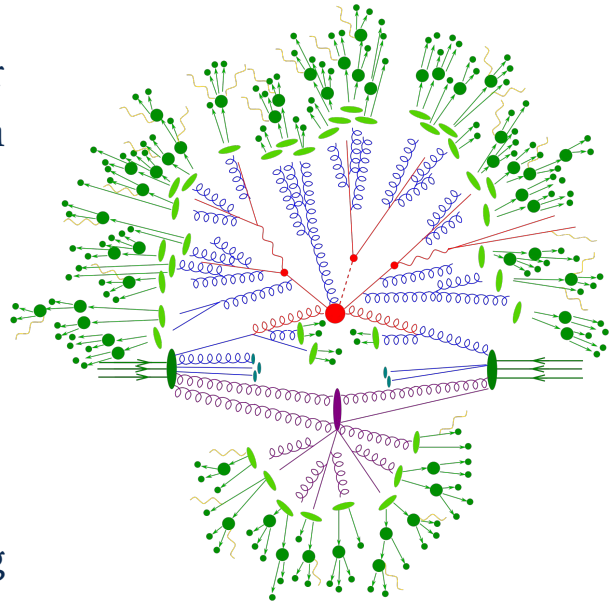
- ATLAS hat dieses spezielle Ergebnis als Zeitanimation 2011-2012 aufgearbeitet: https://cds.cern.ch/record/2230893/files/Higgs4l.gif
- Klickt mal drauf (↑) und schaut es Euch an …
  - Ab wann hättet ihr gewagt, eine Entdeckung bei m_{4l} = 125 GeV zu behaupten?



Bonus: Theorie-Vorhersagen mit Hilfe des Zufalls



- **Theoretische Vorhersagen** v.a. der Untergründe kritisch fuer Interpretation der Messung
- Analytische Berechnung der gemessenen m_{4l}-Verteilung nicht möglich
- Stattdessen Simulation der Theorie-Prozesse in Stufen mit Hilfe von Zufall: "**Monte Carlo**"-Methoden!



- Schwerpunkt meiner Arbeitsgruppe an der TU Dresden:
  - Monte Carlo-Simulation für LHC-Kollisionen
  - Präzise Vorhersagen für Effekte der starken Wechselwirkung
  - Einsatz dieser Vorhersagen in Analysen des ATLAS-Experiments

Zusammenfassung

- **Statistische Methoden sind essentiell**, um LHC-Messungen zu interpretieren
  - Zählexperimenten liegt die Poissonverteilung (~ Gauß-Normalverteilung) zugrunde
  - Deren bekannte Eigenschaften ermöglichen eine statistische Interpretation der Messwerte
    → Schwankungen und Konfidenzintervalle bestimmbar (mit komplizierteren Mitteln)
- Der LHC ist nicht nur ein Ring, sondern auch ein **Würfel**.
- **Ihr wisst jetzt alle, warum das hier Quatsch ist:**

Fragen?