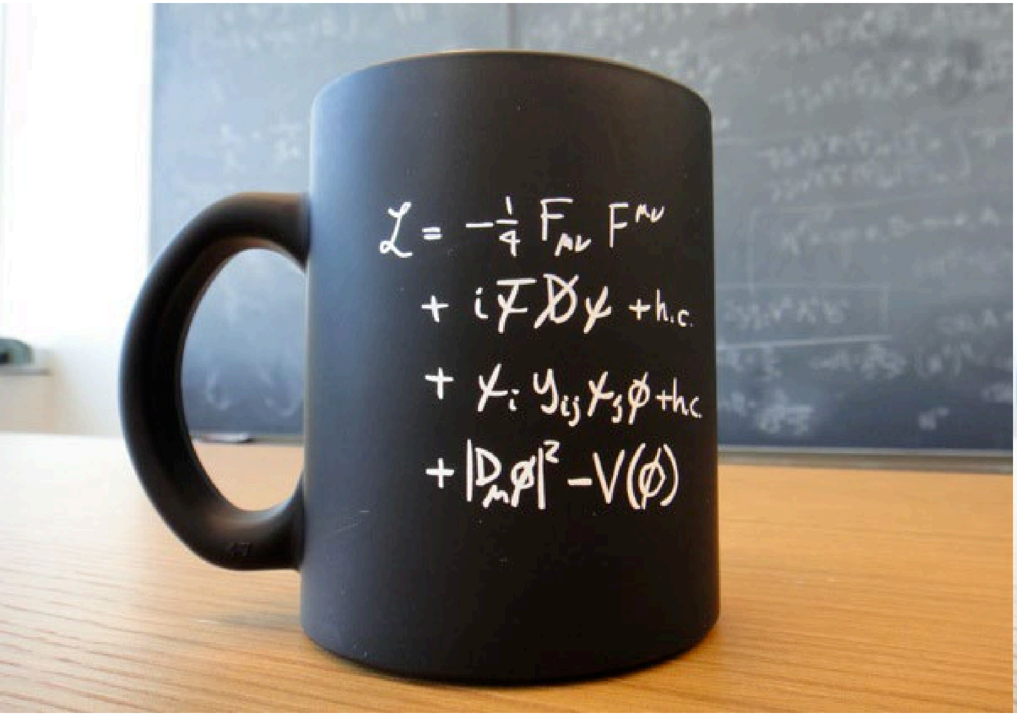
Die Theorie hinter dem Standardmodell: Symmetrien & Lagrangedichten

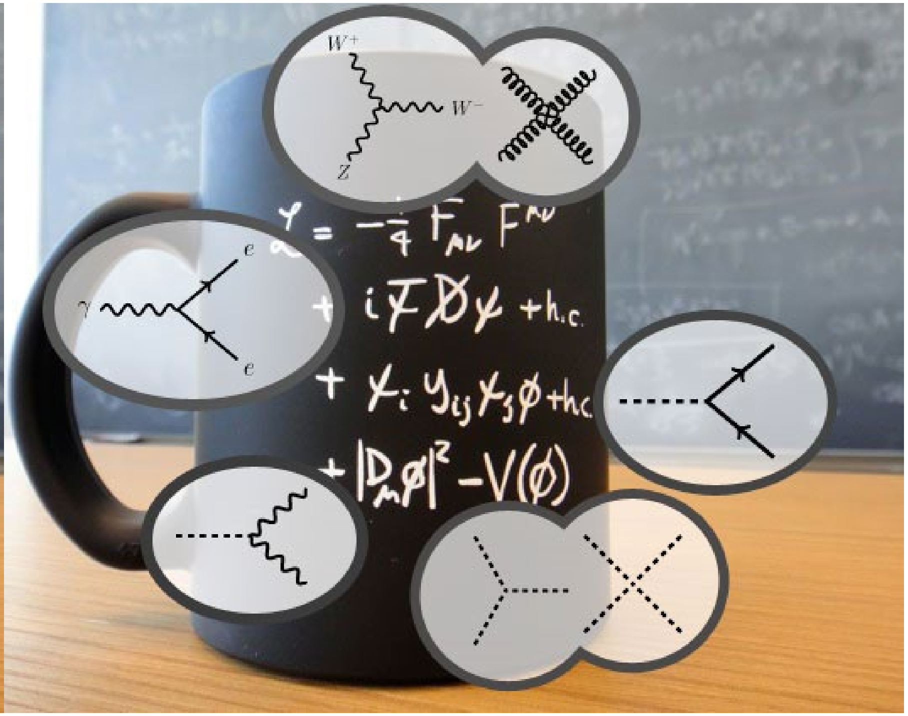
Michael Kobel
Technische Universität Dresden

Netzwerk Teilchenwelt Summer School
CERN 26.07.2022

Ziel: Herkunft und Bedeutung dieser Formel

http://www.quantumdiaries.org/2011/06/26/cern-mug-summarizes-standard-model-but-is-off-by-a-factor-of-2/





Lesenswert dazu: http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6552/aa5b25 (englisch)
https://cds.cern.ch/record/2244912/files/CERN-OPEN-2017-012.pdf (deutsch)

HEFT 1 / 66. JAHRGANG / 2017 ELEMENTARTEILCHENPHYSIK / PdN PHYSIK in der Schule

Links auch in Indico Agenda!

Der Lagrangian entmystifiziert

Kaffeeklatsch mit dem Standardmodell der Teilchenphysik

J. Woithe u. G. Wiener

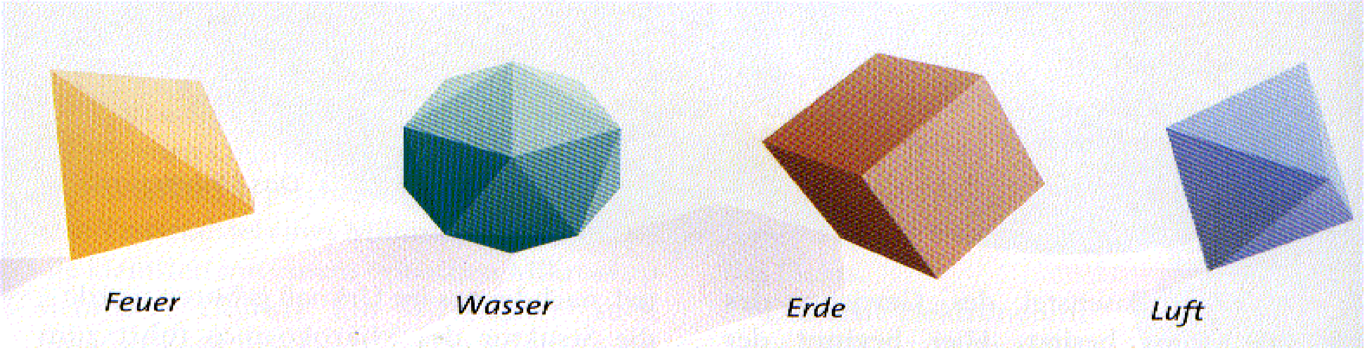
1. **THEORIEN FRÜHER UND HEUTE**
2. Lagrangefunktion in klassischer Mechanik
3. Lagrangedichte der Teilchenphysik
4. Symmetrien
5. Vorhersagen und Bedeutung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

DR. HANS RIEGEL-STIFTUNG

“Standardmodell“ der griechischen Philosophie vor 2500 Jahren

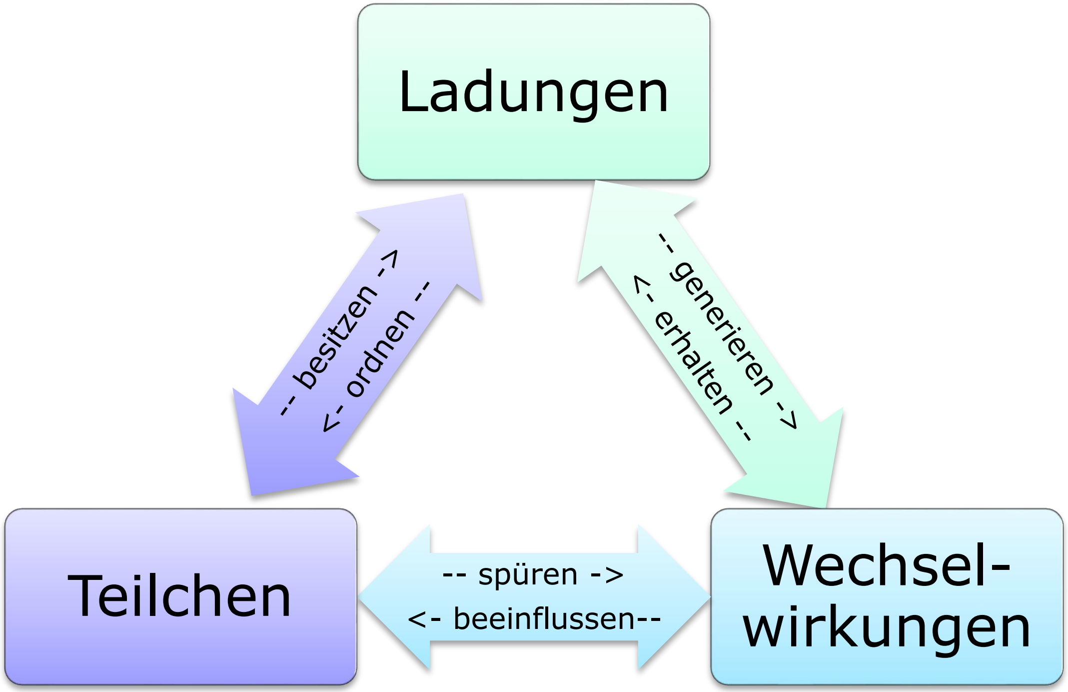
- **Elemente und Kräfte:** 500-430 v.Chr. Empedokles
  - **Vier Elemente:** Feuer, Wasser, Erde, Luft
  - **Zwei Urkräfte:** Liebe , Haß ⇔ Mischung , Trennung
- **Symmetrien:** 427-347 v.Chr. Platon
  - **Räumliche Symmetrien:** Schönheit der Körper



- **Kleinste Bausteine:** 460-371 v.Chr. Demokrit
  - **Atome:** verschiedene Formen und Gewichte
  - **Leere:** Verbindung und Bewegung im Nichts

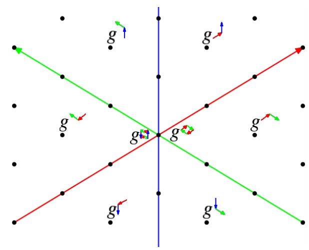
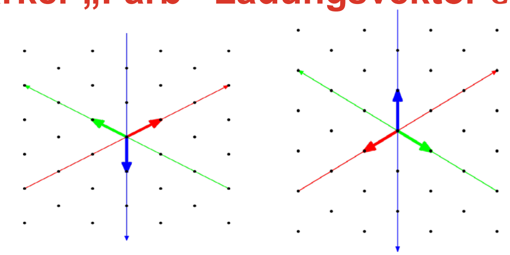
Vergleich mit heute

- **Urkräfte** (heute: fundamentale Wechselwirkungen (WW))
- **Kleinste Bausteine** (heute: unteilbare Elementarteilchen)
- **Räumliche Symmetrien** (heute: Ladungssymmetrien)
- Neu: verbindendes Konzept: **Ladungen für jede WW**
  - → Ladungen sind *das* Grundkonzept des Standardmodells (SM) !



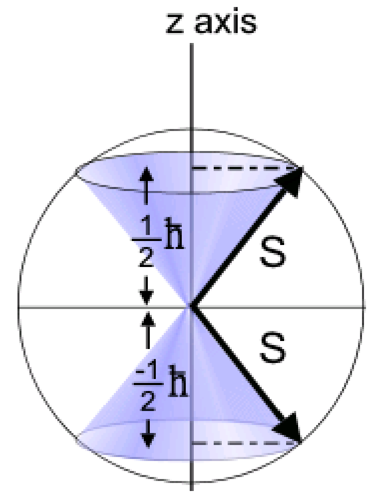
Wechselwirkung – Boten - Ladungen

- Unterschiedliche mathematische Struktur der 3 Ladungen:
  - Starke`Farb´ladung, schwache `Isospin´ladung, elektrische Ladung

Wechsel-wirkung	Botenteilchen	Ladung der Materieteilchen
Starke	Gluonen g 	Starker „Farb“-Ladungsvektor $\vec{C}$ 
Schwache	„Weakonen“ (W^+,W^-,Z) $\begin{pmatrix}W^+\\ Z\\ W^-\end{pmatrix}\begin{matrix}I=+1 & Z=+1\\ I=0 & Z=0\\ I=-1 & Z=-1\end{matrix}$	Schwache „Isospin“–Ladungszahl I $\begin{pmatrix}\mathrm{u}\\ \mathrm{d}\end{pmatrix}\begin{matrix}I=+\frac{1}{2} & Z=+\frac{2}{3}\\ I=-\frac{1}{2} & Z=-\frac{1}{3}\end{matrix}$
Elektro-magnetische	Photonen γ Z = 0	Elektrische Ladungszahl Z **Z = -1, + ⅔, -⅓, …**
Gravitation	Gravitonen ? Wahrscheinlich!	Masse ??? Nein!

Warum der Name „schwache Isospin-Ladung"?

- Zugrundeliegende Symmetrie genau dieselbe wie bei Spin



http://de.wikipedia.org/wiki/Stern-Gerlach-Versuch

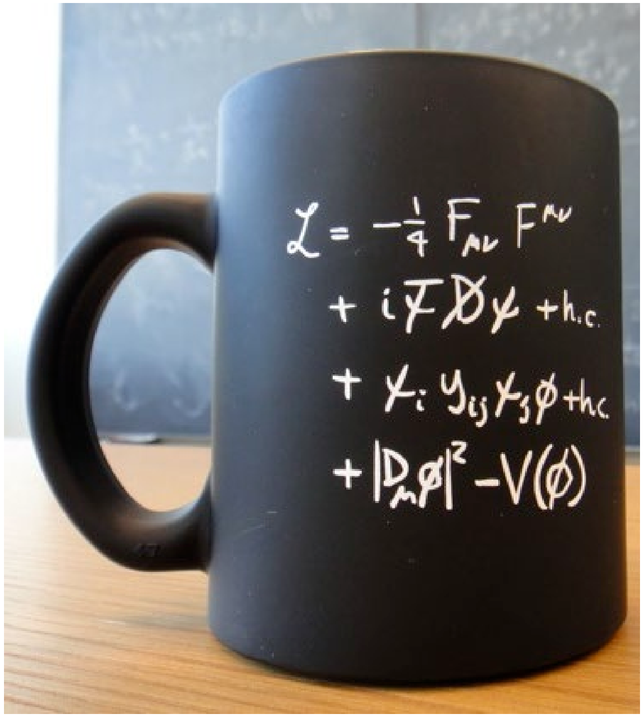
- Vektor mit 3 Komponenten
  - Spin **S** = (S_x, S_y, S_z) im Ortsraum
  - Schwacher Isospin $\mathbf{I^W} = (I_1^W, I_2^W, I_3^W)$ im abstrakten schwachen Isospinraum
- Messbar nur:
  - Gesamter Betrag
  - eine Komponente (meist gewählt: die 3.)
  - sie beiden anderen sind „unscharf"
  - Relevant daher besonders schwache Ladungszahl $I := I_3^W$
- Darstellung der Teilchen in Multipletts

$$\begin{array}{c} I_3^W \\ \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} : \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} I_3^W \\ \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} : \begin{pmatrix} W^+ \\ Z^0 \\ W^- \end{pmatrix}$$

2. Lagrange-Funktion der klassischen Mechanik

❖ Hintergrund der heutigen „Weltformel" der Teilchenphysik



!

Die „Weltformel" der klassischen Mechanik

$$L = T - V$$

- *L:* Langrange Funktion
  (Joseph L. Lagrange, 1736-1814, Mathematiker)
- *T:* Bewegungsenergie
- *V:* Potentielle Energie (z.B. Lageenergie)
- Vorgehen:
  - Finde T und V für das gegebene Problem
  - Anwenden von Mathematik
  - Erhalte Bewegungsgleichungen und Bewegungen

Prinzip der minimalen Wirkung

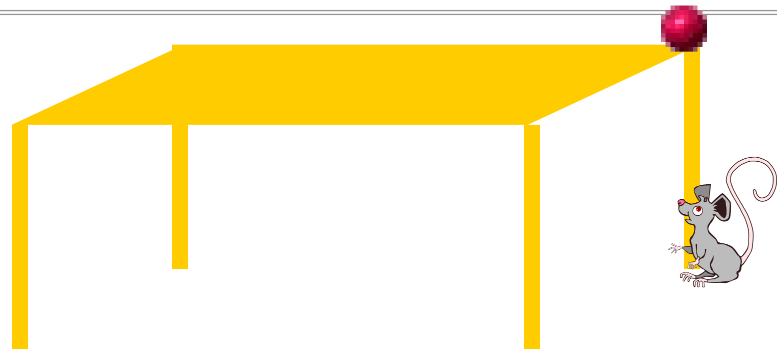
- Grundprinzip von Maureau de Maupertuis (1750)
  (Prinzip der minimalen Wirkung $S = \int_A^B L\,dt$)
  https://de.wikipedia.org/wiki/Pierre-Louis_Moreau_de_Maupertuis
  https://de.wikipedia.org/wiki/Hamiltonsches_Prinzip

Vereinfacht gesagt:

Jede Bewegung von A nach B erfolgt so, dass der Mittelwert von L=T-V so klein (negativ) wie möglich ist

- Handwerkszeug: Mathematik von 1744
  (Euler, Lagrange: Variationsrechnung)

Qualitatives Beispiel: Freier Fall



T = 0, V groß
⇒ T-V sehr negativ
GUT !

T groß, V =0
⇒ T-V sehr positiv
SCHLECHT!

Mittelwert:
minimales T-V⇒
oben lange (langsam)
unten kurz (schnell)

Was leistet der Lagrange-Formalismus in der klassischen Mechanik?

- Wenn kinetische Energie T und potenzielle Energie V bekannt sind:
  - Bilde L=T-V
  - Definiere die „Wirkung“ $S = \int_{t_A}^{t_E} L(x(t), v(t))\, dt$
  - Suche $x(t)$ und $v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$
    so dass Wirkung S minimal (= möglichst negativ) wird
    (Bemerkung: S minimal, wenn zeitlicher Mittelwert von L minimal)
  - Methode: Variationsrechnung (variiere x(t) solange, bis es passt)
    → erhalte so Bahn und die Bahngeschwindigkeit
  - Ergibt **immer** die Euler-Lagrange Gleichungen der klass. Mechanik
    (Uni-Studium Physik, 2. Semester)

$$\frac{dL}{dx} - \frac{d}{dt}\frac{dL}{dv} = 0$$

  - → Newtonsche Bewegungsgleichung → deren Lösung ergibt Bahn x(t)
  - Beispiel: freier Fall

Beispiel: freier Fall (x-Koordinate senkrecht)

$V = mgx$

$T = \frac{1}{2}mv^2$

Jede Bewegung erfolgt so, dass das Zeitintegral über L=T-V („Wirkung") so klein wie möglich ist

$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - mgx$

nutze: Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{dv} = \frac{dL}{dx}$$

$$\frac{d}{dt}mv = -mg$$

$$ma = -mg$$

erhalte: Newtonsche Bewegungsgleichung

- Vergleich: **klassisch** ↔ **Quantenfeldtheorie**

klassisch:

$x(t)$ Bahn

$[L] =$ Energie

$\dot{x} = \frac{d}{dt} x$

$L = L(x, \dot{x})$

d/dx

$d/d\dot{x}$

d/dt

$$\frac{dL}{dx} - \frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{x}} = 0$$

4

für alle Koord. x, y, z

Quantenfeldtheorie:

$\psi(x,t)$ über Raum verteilt

$[\mathcal{L}] =$ Energie / Volumen

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi(x,t), \partial_\mu \psi(x,t))$

$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

$\mu = 0, 1, 2, 3$

$d/d\psi$

$d/d\partial_\mu \psi$

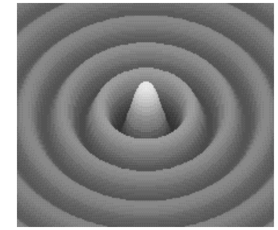
∂_μ

$$\boxed{\frac{d\mathcal{L}}{d\psi} - \partial_\mu \frac{d\mathcal{L}}{d(\partial_\mu \psi)} = 0}$$

$\uparrow$

für alle Felder

Der Übergang zur QFT in Worten



- Quantenmechanik verlangt Ersetzungen:
  - Keine Bahnen mehr: x(t) → Wellenfunktionen ψ(t,x,y,z)
  - Zeitliche **und** örtliche Variationen: $\frac{d}{dt} \rightarrow \partial_\mu := (\frac{1}{c}\frac{d}{dt}, \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz})$
  - Ersetze Zeitableitung $v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ → Raum+Zeitableitung ∂_μ ψ(t,x,y,z)
- Lagrangefunktion L (Energie) → Lagrangedichte $\mathcal{L}$ (Energiedichte)
  - Statt $S = \int_{t_A}^{t_E} L(x(t), v(t))dt$ → Wirkung $S = \int\iiint_{x,y,z,t} \mathcal{L}\left(\psi(t,x,y,z), \partial_\mu\psi(t,x,y,z)\right)dx\,dy\,dz\,dt$
  - Lagrangedichte wird weiterhin gebildet als $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$
  - Aber: $\mathcal{T}$: kin. Energie**dichte**, $\mathcal{V}$: potenzielle Energie**dichte**
    sind **nur für freie Teilchen** (ohne WW) **aus Quantenfeldtheorie bekannt**
  - *Die* theoretische Herausforderung: finde allgemein generelles $\mathcal{L} = \mathcal{T}$-$\mathcal{V}$

freie Baustein-Teilchen ohne Wechselwirkung

$$\mathcal{V} = mc^2 \tilde{\psi} \psi$$

$$\mathcal{T} = i\hbar c\, \tilde{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi$$

Euler-Lagrange Variationsrechnung:

Jede Bewegung erfolgt so,
dass das Raum-Zeitintegral über $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$
so klein wie möglich ist

(Uni-Studium Physik, 6. Semester) https://de.wikipedia.org/wiki/Dirac-Matrizen

Dirac Gleichung

$$(i\hbar\, \gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi = 0$$

(entspricht dem Newtonschen F=ma)

- Ersetzung der klassischen Größen durch Operatoren

nicht- relativistisch ↔ **relativistisch**

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right)$$

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -p_x, -p_y, -p_z\right)$$

$$\frac{p^2}{2m} = E \qquad\qquad p_\mu p^\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2c^2$$

$$\vec{p} \to -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = -i\hbar \vec{\nabla} \qquad\qquad p_\mu \to i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} =: i\hbar \partial_\mu$$

$$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \qquad\qquad p^\mu \to i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} =: i\hbar \partial^\mu$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi} \qquad\qquad \boxed{-\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu \psi = m^2c^2 \psi}$$

SCHRÖDINGER

KLEIN-GORDON (für Bosonen)

DIRAC: 1928

Problem für Fermionen: Lösungen mit negativer Aufenthaltswahrsch.

Grund weil in $\partial_\mu \partial^\mu$ die 2. Ableitung $\frac{d^2}{dt^2}$ vorkommt.

Ad hoc: versuche Linearisierung durch Faktorisierung

❖ Linearisierung durch Faktorisierung der rel. Gleichung $p_\mu p^\mu = m^2c^2$

$$p_\mu p^\mu - m^2c^2 = 0 \quad \xrightarrow[\text{suche } \gamma^\kappa \text{, so dass}]{\text{Ansatz}} \quad (\gamma^\kappa p_\kappa - mc)(\gamma^\lambda p_\lambda + mc) = 0$$

$$\gamma^\kappa p_\kappa := \gamma^0 p_0 + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3$$

Lösung: hyperkomplexe Zahlen γ^κ

Eigenschaften, wenn ich die "–" Komponenten anschaue

$\kappa = \lambda$ $\quad (\gamma^0)^2 = 1 \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1$

$\kappa \neq \lambda$ $\quad \gamma^\kappa\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\gamma^\kappa = 0 \iff \left| \underline{\gamma^\kappa\gamma^\lambda = -\gamma^\lambda\gamma^\kappa} \right|$

⇒ komplexe Zahlen funktionieren nicht, brauche Matrizen

Mathematik: es müssen (mindestens) 4×4 Matrizen

es gibt verschiedene Darstellungen

- DIRAC
- WEYL
- MAJORANA

- Verschiedene 4x4 „Darstellungen“ möglich. Dirac-Darstellung:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_0 = \gamma^0 \quad \gamma_i = -\gamma^i$$

$i = 1,2,3$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

γ-Matrizen haben 4 Indices 0,1,2,3 sind aber kein 4er-Vektoren denn sie in allen Bezugsystemen gleich

Def. von $\boxed{\tilde{\Psi} := \psi^\dagger \gamma^0}$ sinnvoll, weil ich eine Stromdichte als 4-Vektor bilden kann

$$j^\mu = (\rho c, j_x, j_y, j_z)$$

Ladungsdichte Stromdichte

Strom-4er Vektor $j^\mu = \tilde{\Psi} \gamma^\mu \psi$

$$j^0 = \tilde{\Psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_{1} \psi = \psi^\dagger \psi = \rho$$

Die Dirac-Gleichung in Komponenten

$$0 = p_\mu p^\mu - m^2c^2 = (\gamma^\kappa p_\kappa - mc)(\gamma^\lambda p_\lambda + mc) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma^\kappa p_\kappa - mc = 0 \\ \gamma^\lambda p_\lambda + mc = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{toren}]{\text{Opera}} \left|\begin{array}{l} (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\,\psi = 0 \\ (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc)\,\psi = 0 \end{array}\right|$$

DIRAC Gleichung

$p_\mu \to i\hbar\partial_\mu$

Bewegungsgleichung f. freie Fermionen

da γ 4x4 Matrizen sind muss ψ jetzt 4 Komponente haben

γ NICHT ORTS-ZEIT Komponenten $\quad \psi = (\psi_A, \psi_B, \psi_C, \psi_D)$

explizit

$$\underbrace{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}}_{\partial_0}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}}_{\gamma^0}\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\\ \psi_C\\ \psi_D\end{pmatrix} + i\hbar\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}}_{\partial_1}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & 0 \end{pmatrix}}_{\gamma^1}\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\\ \psi_C\\ \psi_D\end{pmatrix} + i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{(\;)(\;)}_{\gamma^2} + i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\underbrace{(\;)(\;)}_{\gamma^3\psi} - mc\underbrace{(\;)}_{\psi} = 0$$

❖ Interpretation von Dirac 1928: ANTITEILCHEN (entdeckt 1932)

Lösung beschreibt

Teilchen und Antiteilchen jeweils mit Spin $+\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$

$e^- \Uparrow \quad e^- \Downarrow \quad e^+ \Uparrow \quad e^+ \Downarrow$

Teilchen

$$\psi(x^\mu, p_\mu) = u(p_\mu)\, e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu}$$

Spinor Teilchen

$e^{-i(kr-\omega t)}$

Antiteilchen

$$\psi(x^\mu, p_\mu) = v(p_\mu)\, e^{+\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu}$$

Spinor Antiteilchen

scheinbar $E(u) > 0$ und $E(v) < 0$

und Antiteilchen sich rückwärts in t bewegen

Feynman-Stückelberg: $E \to -E$ und $t \to -t$ sind auch Lösung

noch vorhanden in Feynman-Diagrammen

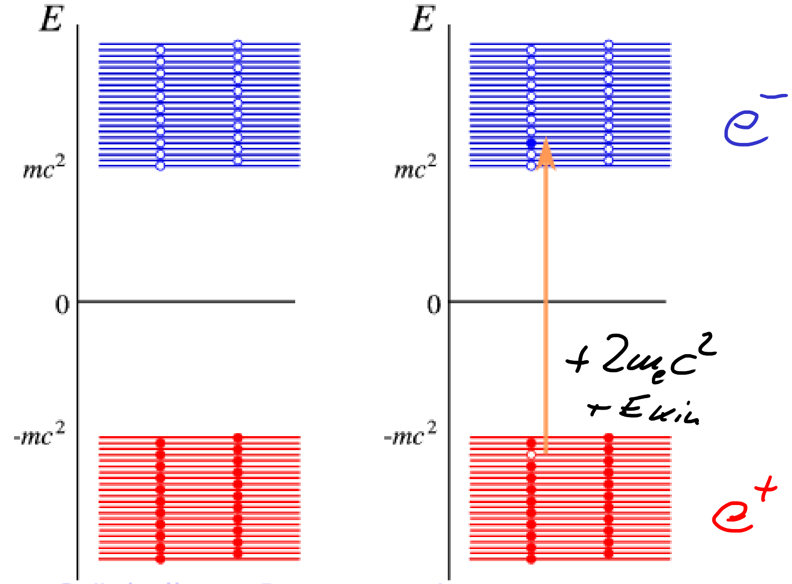
$\longleftarrow$ Antiteilchen

$\longrightarrow$ Teilchen

Historisch: Dirac See

- **Problematisches Bild**, u.a. wegen
  - Antimaterie-Teilchen sind keine „Quasiteilchen-Anregungen“ (Löcher) sondern echte Teilchen in der realen Welt, genau wie Teilchen, z.B. Experimente in Beschleunigern mit „Strahlen“ aus Billionen von Antiteilchen, genauso wie mit Strahlen aus Billionen Teilchen
  - Keine „spontane Abregung“, denn Positronen sind stabil
  - Bild klappt nicht für Bosonen (kein Fermi-verbot, See wird nie voll)
- Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Dirac-See

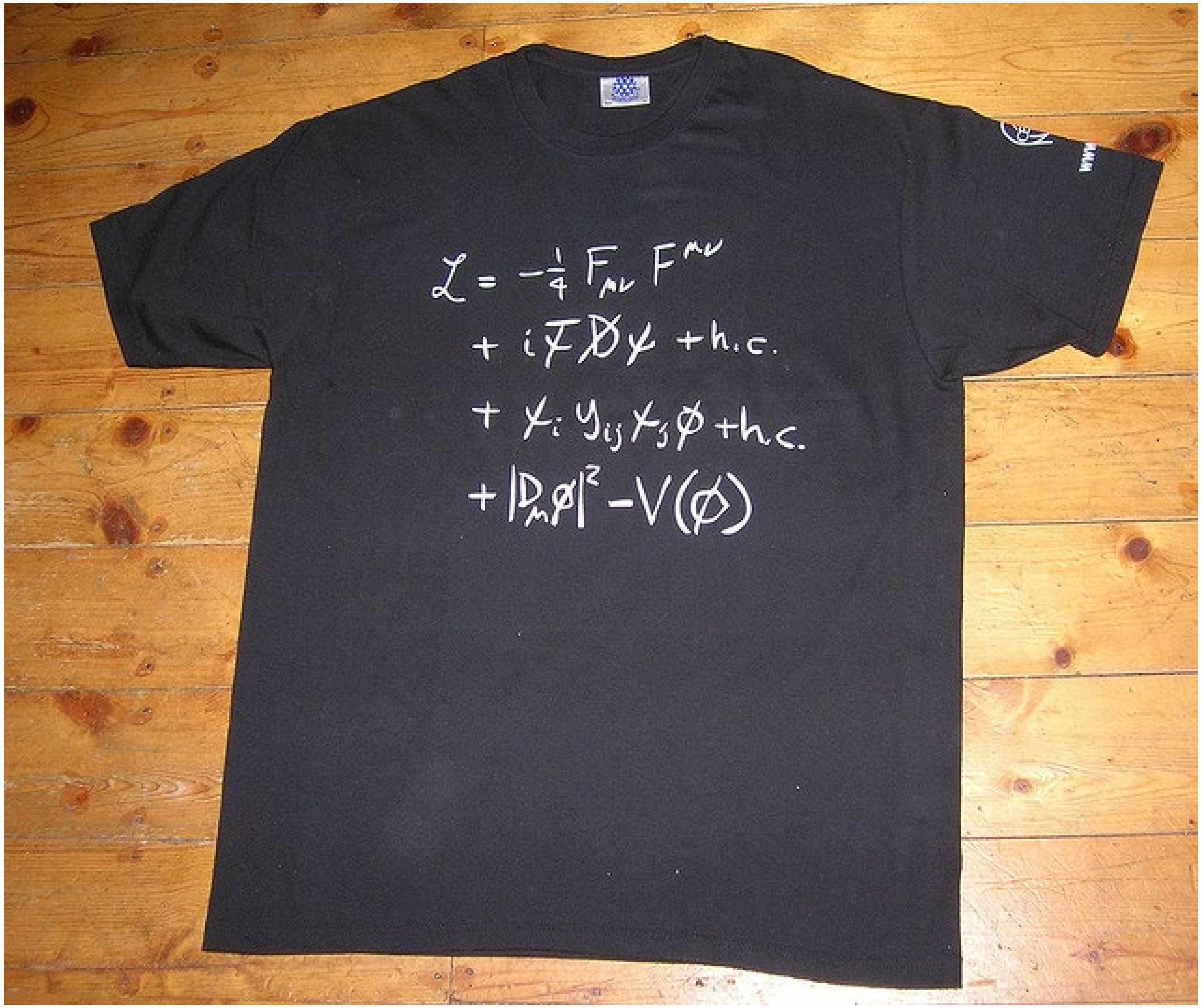
  Der **Dirac-See** ist ein theoretisches Modell, welches das Vakuum als einen unendlichen „See“ von Teilchen mit negativer Energie beschreibt. Es wurde vom britischen Physiker Paul Dirac 1930 entwickelt, um die Quanten-zustände negativer Energie zu erklären, die in der Dirac-Gleichung für relativistische Elektronen vorher-gesagt werden. Für diese Theorie wurde auch die Bezeichnung **Löchertheorie** verwendet. Das Positron, das Antiteilchen zum Elektron, wurde von Dirac als *Loch* im Dirac-See vorhergesagt und auch nach seiner experimentellen Entdeckung 1932 noch jahrelang so interpretiert. Heute werden die Zustände negativer Energie mit Hilfe der Quantenfeldtheorie als Erzeugungsoperatoren für Antiteilchen *positiver* Energie interpretiert, siehe Feynman-Stückelberg-Interpretation.



http://oer.physics.manchester.ac.uk/NP/Notes/Notes/Notesse28.xht

- Mathematisch völlig äquivalent, siehe z.B. https://arxiv.org/pdf/hep-th/0510040.pdf, aber irreführende Vorstellung

Wie stellt man nun die Lagrangedichte auf?



- „Weltformel" auf CERN T-shirt und Mouse Pad