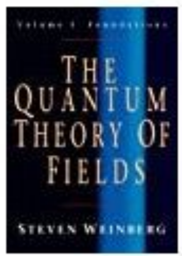
Theoretischer Weg von Lagrangedichten zu Feynman Diagrammen und deren Berechnung

Alexander Huss (CERN)

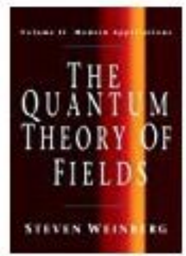
Quantenfeldtheorie in 2× (90 min)

Alexander Huss (CERN)



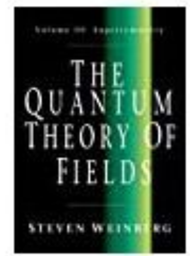
636 pg.

+



512 pg.

(+



442 pg.)

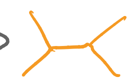
(SUSY)

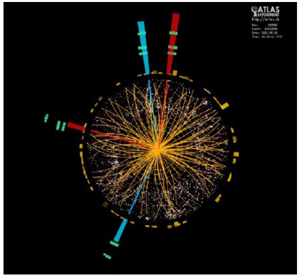
Plan

0. Konventionen
1. Symmetrien
   - skalare QED
2. Brout-Englert-Higgs Mechanismus
   - Massen von Eichbosonen $\quad U(1)$
   - Fermion Massen $\quad SM$
3. Quantenfeldtheorie
   - Pfadintegrale
4. Störungstheorie & Feynman Diagramme
5. Streuprozesse & Wirkungsquerschnitte
   - $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

heute:

morgen

$\mathcal{L} \to$ 



0. Konventionen

* Natürliche Einheiten $\hbar = c = 1$

$\hookrightarrow$ $[\hbar] = [Et] \Rightarrow [E] = \frac{1}{[t]}$

$\hookrightarrow$ $[c] = \left[\frac{x}{t}\right] \Rightarrow [x] = [t]$

Teilchenphysik: $[E] = eV$

$[E] = [p] = [m] = eV$

$[t] = [x] = eV^{-1}$

$\hookrightarrow$ Faustregel: $1 \, GeV \approx m_p$

10^9

* Vierervektoren: $x^\mu = (t, x, y, z)$ $\quad \partial_\mu = (\partial_t, \vec{\nabla})$

$\hookrightarrow$ Skalarprodukt: $a \cdot b = a^\mu b_\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$

$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ d'Alembert Operator $\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \Delta$

$\hookrightarrow$ Gamma Matrizen $\gamma^\mu \rightsquigarrow \not{a} = a^\mu \gamma_\mu$

Freie Felder

Spin $\emptyset$: $\quad (\Box + m^2)\,\phi(x) = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$

Klein-Gordon Gl.

Spin $1/2$: $\quad (i\not{\partial} - m)\,\psi(x) = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi$

Dirac Gl.

$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

Spin 1: $\quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

Maxwell Gl.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \emptyset = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\hookrightarrow$ Eichfreiheit: $\quad A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \varphi(x)$

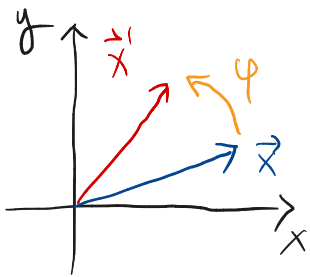
$\Rightarrow \quad F^{\mu\nu} \to F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu + \cancel{\partial^\mu \partial^\nu \varphi} - \partial^\nu A^\mu - \cancel{\partial^\nu \partial^\mu \varphi}$

1. Symmetrien

Emmy Noether (1915):

"Für jede kontinuierliche Symmetrie der Theorie existiert eine erhaltene Größe"

* Drehungen in 2D



$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad SO(2)$$

Invariante: Länge: $\vec{x}^2 = x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$

⇝ Theorie basierend auf $|\vec{x}|$ ⇒ symmetrisch unter Drehungen

⇒ Erhaltene Größe: L_z (Drehimpuls) ← Generator

* relativistisch (SRT) Lorentz Trafo: $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

⇒ $x^2 = x^\mu x_\mu$ invariant ⇒ Drehimpuls (+ Massenschwerpkt: geradlinig gleichförmig)

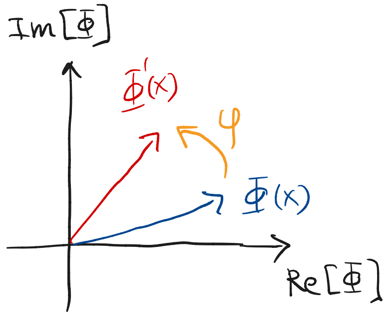
* Poincaré = SRT ⊕ Translationen $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ ⇒ Energie & Impuls

Interne Symmetrien — Symmetrien im Raum der Felder

* Beispiel: komplexes Spin-0 Feld $\Phi(x) \in \mathbb{C}$

$$\left[\begin{array}{l} c = a + ib \\ c^* = a - ib \end{array}\right]$$

$$\mathcal{L}_\Phi = (\partial_\mu \Phi^*)(\partial^\mu \Phi) - m^2 \Phi^* \Phi$$



$$\left.\begin{array}{l} \Phi'(x) = e^{i\varphi}\, \Phi(x) \\ \Phi'^*(x) = e^{-i\varphi}\, \Phi^*(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \Phi^* \Phi \text{ invariant!}$$

(global: $\varphi \neq \varphi(x)$)

$U(1) \cong SO(2)$

$\Rightarrow$ Noether: $\partial_\mu J^\mu = 0$ mit $J^\mu = (\partial^\mu \Phi^*)\Phi - \Phi^*(\partial^\mu \Phi)$

$\Leftrightarrow$ Ladung: $Q = \int d^3x\, J^0$

Eichsymmetrien

Raum-Zeit Abh.

$\hat{=}$ lokale interne Symmetrien: $\Phi(x) \to \Phi'(x) = e^{i\varphi(x)}\,\Phi(x)$

$$\mathcal{L}_\Phi = \underbrace{(\partial_\mu \Phi^*)(\partial^\mu \Phi)}_{\times} - \underbrace{m^2 \Phi^* \Phi}_{\checkmark}$$

$$\partial_\mu \Phi(x) \longmapsto \partial_\mu \Phi'(x) = \partial_\mu \left[e^{i\varphi(x)}\,\Phi(x)\right] = i\,[\partial_\mu \varphi(x)]\,e^{i\varphi(x)}\,\Phi(x) + e^{i\varphi(x)}\,[\partial_\mu \Phi(x)]$$

* Lösung Kovariante Ableitung

$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ mit $A_\mu(x) \longmapsto A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\left(\partial_\mu \varphi(x)\right)$

$$\Rightarrow \left(D_\mu \Phi\right) \longrightarrow \left(D'_\mu \Phi'\right) = e^{i\varphi(x)}\left(D_\mu \Phi\right)$$

$\Rightarrow \mathcal{L}_\Phi \big|_{\partial_\mu \to D_\mu}$ ist eichinvariant!

Skalare QED aus U(1) Eichsymmetrie

$$\mathcal{L}_\Phi \Big|_{\partial_\mu \to D_\mu} = (\partial_\mu \Phi^*)(\partial^\mu \Phi) - m^2 \Phi^* \Phi$$
$$+ ie A^\mu \underbrace{\left[(\partial_\mu \Phi^*)\Phi - \Phi^* (\partial_\mu \Phi) \right]}_{\text{Noether Strom } J_\mu} - e^2 A_\mu A^\mu \Phi^* \Phi \quad \Big\} \text{ Wechsel-wirkungen!}$$

* Das Feld A_μ ist noch nicht dyamisch

$\Rightarrow$ Füge $\mathcal{L}_A$ hinzu: $\mathcal{L}_{SQED} = (D_\mu \Phi^*)(D^\mu \Phi) - m^2 \Phi^* \Phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

* Analoge Schritte für ein Elekton $\psi_e(x)$ & $\mathcal{L}_\psi \rightsquigarrow$ QED

1) fixiere Materiefelder & deren Symmetrieeigenschaften
2) fordere lokale Symmetrie (Eichsymmetrie)
3) $\oplus$ Dynamik der Eichfelder

$\Rightarrow$ Wechselwirkungen! (Grundprinzip für das SM $SU(3)_C \times SU(2)_I \times U(1)_Y$)

2. Brout-Englert-Higgs Mechanismus

Probleme mit Massen

(A) Eichsymmetrien sind sehr einschränkend

$$-m^2 A_\mu A^\mu \xrightarrow{A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}(\partial_\mu \varphi)} -m^2 A_\mu A^\mu + 2\frac{m^2}{e}(\partial_\mu \varphi)A^\mu - \frac{m^2}{e^2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi)$$

naiver Masseterm

nicht invariant!

↳ Austauschteilchen der schwachen WW (Z & $W^\pm$) massiv ⚡

(B) In einer chiralen Theorie wird zw. links- & rechts-händigen Fermionen unterschieden.

↳ das SM ist eine chirale Theorie ⇒ Massen für $e, \mu, \tau, u, d, c, s, t, b, \nu$ verboten ⚡

↳ Lösung von (A) gibt uns die Bausteine für Lsg. von (B)

Spontane Symmetriebrechung

Allgemeines Potential für Φ:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \Phi^*)(D^\mu \Phi) \underbrace{- \mu^2 \Phi^* \Phi - \lambda (\Phi^* \Phi)^2}_{-V(\Phi)}$$

eichinvariant

* $\lambda > 0$ Damit Potential beschränkt

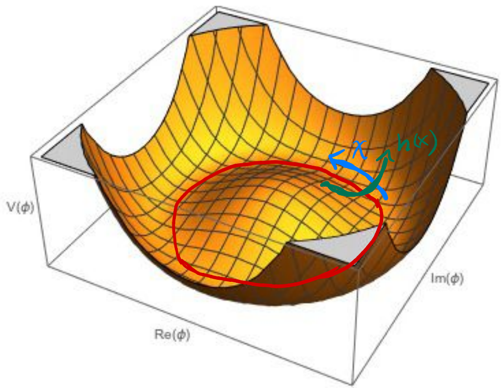
  $\Rightarrow$ sonst kein "Vakuum"

* Einzige Freiheit: Vorzeichen von μ^2

  $\Rightarrow$ $\mu^2 > 0$: langweilig $\longleftrightarrow$ einfacher Massenterm $m_\Phi = \mu$

  $\Rightarrow$ $\mu^2 < 0$: Entartetes Minimum für $V(\Phi)$

Das Higgs Potential



⇝ Minimum des Potentials (↔ Vakuum)

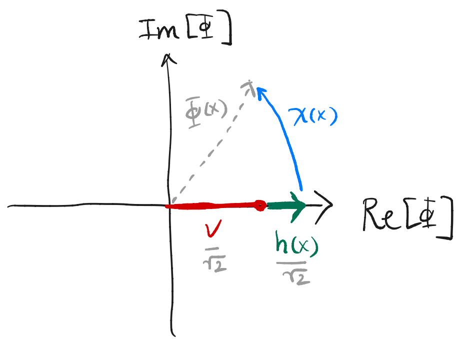
$$|\Phi|_{\text{vakuum}} = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}} = \Phi_0 = \langle 0|\Phi|0\rangle$$

↪ unendlich viele equivalente Konfigurationen

↪ Physik unabhängig davon ; müssen aber eine Wahl treffen

→ "spontan" ($Re[\Phi] = \Phi_0$, $Im[\Phi] = \emptyset$)

* Parametrisiere in "Polarkoordinaten" um das Vakuum ($c = a + ib = r e^{i\varphi}$)



$$\Phi(x) = e^{i\chi(x)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(v + h(x) \right)$$

Der Higgs (BEH) Mechanismus

Im SM:

$$\Phi(x) = e^{i\frac{\sigma^k}{2}\theta^k(x)} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi \\ v+H(x) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $M_W\,(80\text{ GeV}) \leq M_Z\,(91\text{ GeV})$

$$\Phi(x) = e^{i\chi(x)} \frac{1}{\sqrt{2}} (v + h(x))$$

* 2 Freiheitsgrade: $h(x)$ & $\chi(x)$ <u>aber</u> $\chi(x)$ ist unphysikalisch!

  $\Rightarrow$ eine Eichtransformation $\Phi(x) \to e^{-i\chi(x)}\Phi(x)$ eliminiert $\chi(x)$

  ("unitäre Eichung")

* Freiheitsgrade verschwinden nicht!

  $\Rightarrow$ $-e^2 A_\mu A^\mu \Phi^* \Phi = -\frac{e^2}{2} A_\mu A^\mu (v + h(x))^2 = \frac{1}{2} e^2 v^2 A_\mu A^\mu + \ldots$

  $\Rightarrow$ Massenterm mit $m_A^2 = e^2 v^2$!

  $\Rightarrow$ masseloses Spin-1 : 2 FG (2x transversale Pol.)

  massives Spin-1 : 3 FG ($\oplus$ longitudinale Pol.)

  $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ hat weiterhin $U(1)$ Symmetrie "versteckte Symmetrie"

Fermion Massen

* Spin Quantenzahl $\pm 1/2$

  Chiralität: ($\hat{=}$ Helizität für $m_f = \emptyset$)

  (abstrakt für $m_f \neq \emptyset$)

$\overset{s}{\Rightarrow} \; \longrightarrow p_f$ R (+)

$\overset{s}{\Leftarrow} \; \longrightarrow p_f$ L (−)

* Das Standardmodell ist eine "chirale" Theorie

  ⇾ unterscheidet zw. R & L $\Rightarrow$ keine Spiegelsymmetrie (Wu et al. '57)

  ⇾ $\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_L$ schwacher Isospin ; $\psi_{1,R}$; $\psi_{2,R}$ $\left[(\psi_1, \psi_2) \in \{ (u,d), (\nu_e, e^-), \dots \} \right]$

* Problem:

$$-m_\psi \tilde{\psi} \psi = -m_\psi \underbrace{\left[\overbrace{\tilde{\psi}_L \psi_R}^{Y \; \left(\frac{1}{2} - 1\right)} + \overbrace{\tilde{\psi}_R \psi_L}^{\left(1 - \frac{1}{2}\right) \; \neq \emptyset} \right]}_{}$$

↯ nicht eichinvariant!

Yukawa Wechselwirkungen

* BEH gibt uns ein neues $SU(2)_I$ doublet: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow$ können einen eichinvarianten $\tilde{\Psi}_L \Phi \Psi_R$ Term konstruieren:

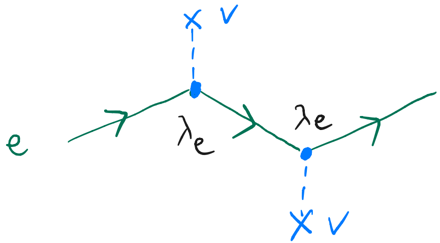
$$Y = \left(+\tfrac{1}{2}\right) \oplus \left(+\tfrac{1}{2}\right) \oplus (-1) = \emptyset \quad U(1)_Y$$

$$\mathcal{L}_{Yuk} = -\lambda_e \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_{\nu_e} \\ \tilde{\Psi}_e \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \emptyset \\ v + H \end{pmatrix}}_{SU(2)_I} \Psi_{e,R}}_{\text{Lorentz}} + h.c. = -\underbrace{\lambda_e \frac{v}{\sqrt{2}}}_{m_e = \lambda_e \frac{v}{\sqrt{2}}} \left(\tilde{\Psi}_{e,L} \Psi_{e,R} + \tilde{\Psi}_{e,L} \Psi_{e,R} \right) + \dots$$

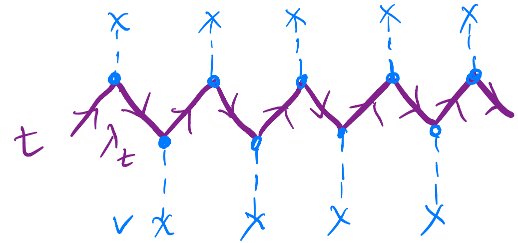
* Interpretation:
  - ↳ Fermionen ursprünglich masselos $\longleftrightarrow$ Lichtgeschwindigkeit.
  - ↳ WW mit dem Higgs (dem Vakuum) ⇝ Abbremsung $\Rightarrow$ Masse
  - ↳ stärkere WW mit $H(x)$ $\longleftrightarrow$ m_f größer

Das Higgs Vakuum als Schnee

leichtes Fermion



schweres Fermion



Zusammenfassung

* Symmetrien fundamental in Theoretischer Physik
  ↳ Eichsymmetrien ⇒ Wechselwirkungen

* Symetrien spielen nicht gut zusammen mit Massen
  ↳ BEH Mechanismus bricht die Symmetrie spontan
    ⇒ Eichbosonen mit Massen
  ↳ chirale Theorien: (ad-hoc) Kopplung mit Higgs ⇒ $m_f \neq 0$

3. Quantenfeldtheorie

$QFT = QM \otimes SRT$

* Quantenmechanik (QM)

Schrödinger Gl.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x},t) = \hat{H}\,\psi(\vec{x},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\right]\psi(\vec{x},t)$$

⊕ Beschreibung mikroskopischer Natur (Δx klein)

⊖ nicht relativistisch: $\hat{x}$ (Op) vs. t (Param), ∂_t vs. Δ

⊖ Teilchenzahl fix (abgesehen von zweiter Quantisierung)

* Spezielle Relativitätstheorie (SRT)

Prinzip der Relativität $\Leftrightarrow$ Invarianz bzgl. Lorentz Trafo

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$ (Drehungen & "Boosts")

⊕ Prozesse mit hoher Geschw. / Energie ($v \sim c$)

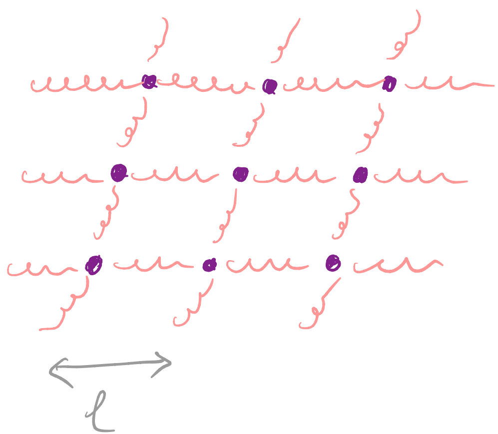
Quantenfeldtheorie

Hochenergiephysik: z.B. Kollision von energetischen Teilchen um kleine Distanzen aufzulösen (⇝ fundamentale Struktur)

* Teilchen ξ ⟷ Feld $\phi_\xi(\underbrace{t,\vec{x}}_{x^\mu})$ ⇝ Anregungen

* $E=mc^2$ & QM ⇒ Teilchenerzeugung / Vernichtung

* QFT ist eine Matratze:



$$L = \frac{1}{2}\sum_a m\dot{q}_a^2 - \sum_{a,b} k_{ab}\, q_a q_b - \dots$$

⇝ Euler Lagrange

$$m\ddot{q}_a - \sum_a k_{ab}\, q_b - \dots$$

(k_{ab} diagonalisieren ⇒ Eigenmoden / Eigenfreq
⇝ allg. Lsg. Wellenpakete von Moden)

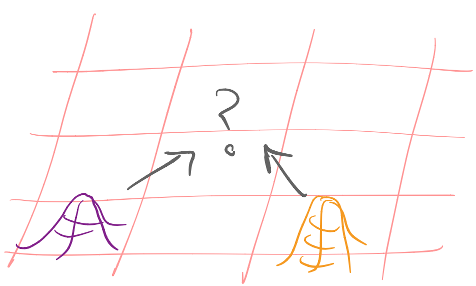
Quantenfeldtheorie

Hochenergiephysik: z.B. Kollision von energetischen Teilchen um kleine Distanzen aufzulösen (⇝ fundamentale Struktur)

* Teilchen ξ ⟷ Feld $\phi_\xi(\underbrace{t,\vec{x}}_{x^\mu})$ ⇝ Anregungen

* $E=mc^2$ & QM ⇒ Teilchenerzeugung / Vernichtung

* QFT ist eine Matratze:



$$L = \frac{1}{2}\sum_a m\dot{q}_a^2 - \sum_{a,b} k_{ab}\, q_a q_b - \dots$$

⇝ Euler Lagrange

$$m\ddot{q}_a - \sum_a k_{ab}\, q_b - \dots$$

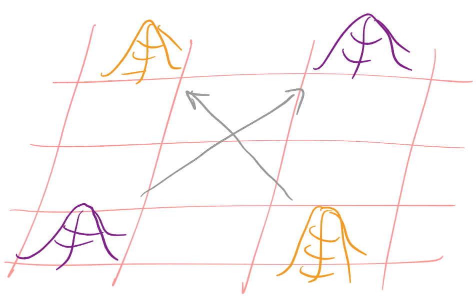
Quantenfeldtheorie

Hochenergiephysik: z.B. Kollision von energetischen Teilchen um kleine Distanzen aufzulösen (⇝ fundamentale Struktur)

* Teilchen ξ $\longleftrightarrow$ Feld $\phi_\xi(\underbrace{t,\vec{x}}_{x^\mu})$ ⇝ Anregungen

* $E=mc^2$ & QM ⇒ Teilchenerzeugung / Vernichtung

* QFT ist eine Matratze:



$$L = \frac{1}{2}\sum_a m\dot{q}_a^2 - \sum_{a,b} k_{ab}\, q_a q_b - \dots$$

⇝ Euler Lagrange

$$m\ddot{q}_a - \sum_a k_{ab}\, q_b - \dots$$

linear → Superposition → keine WW

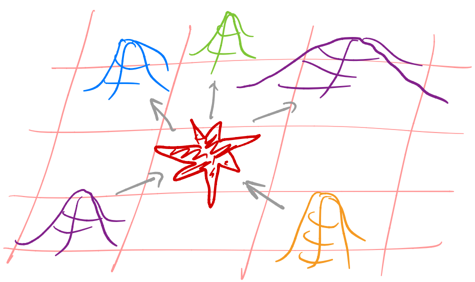
Quantenfeldtheorie

Hochenergiephysik: z.B. Kollision von energetischen Teilchen um kleine Distanzen aufzulösen (⇝ fundamentale Struktur)

* Teilchen ξ ⟷ Feld $\phi_\xi(\underbrace{t,\vec{x}}_{x^\mu})$ ⇝ Anregungen

* $E=mc^2$ & QM ⇒ Teilchenerzeugung / Vernichtung

* QFT ist eine Matratze:



$$L = \frac{1}{2}\sum_a m\dot{q}_a^2 - \sum_{a,b} k_{ab}\, q_a q_b - \sum_{abc} g_{abc}\, q_a q_b q_c \ldots$$

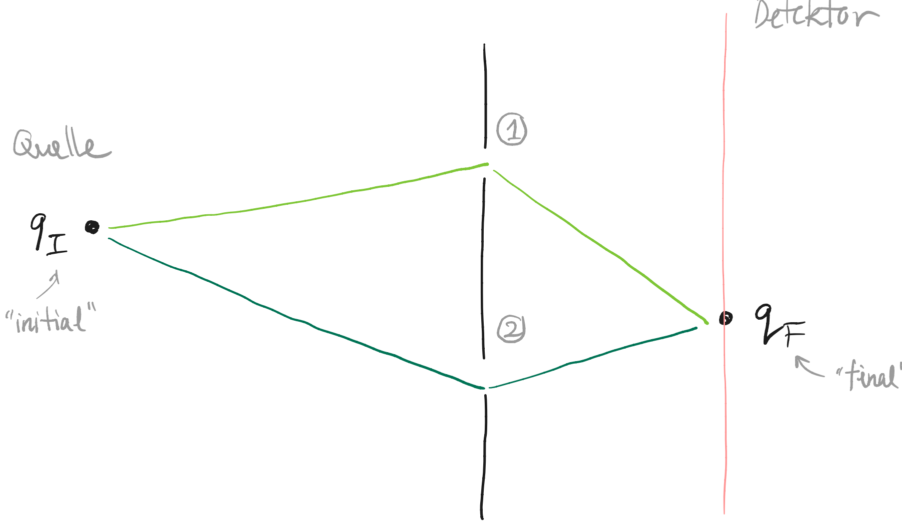
⇝ Euler Lagrange

$$m\ddot{q}_a - \sum_a k_{ab}\, q_b - \sum_{b,c} g_{abc}\, q_b q_c \ldots$$

nicht linear ⇒ WW

Pfadintegralquantisierung

Das Doppelspaltexperiment



klassisch:

$$P_{q_I \to q_F} = P_1 + P_2$$

QM:

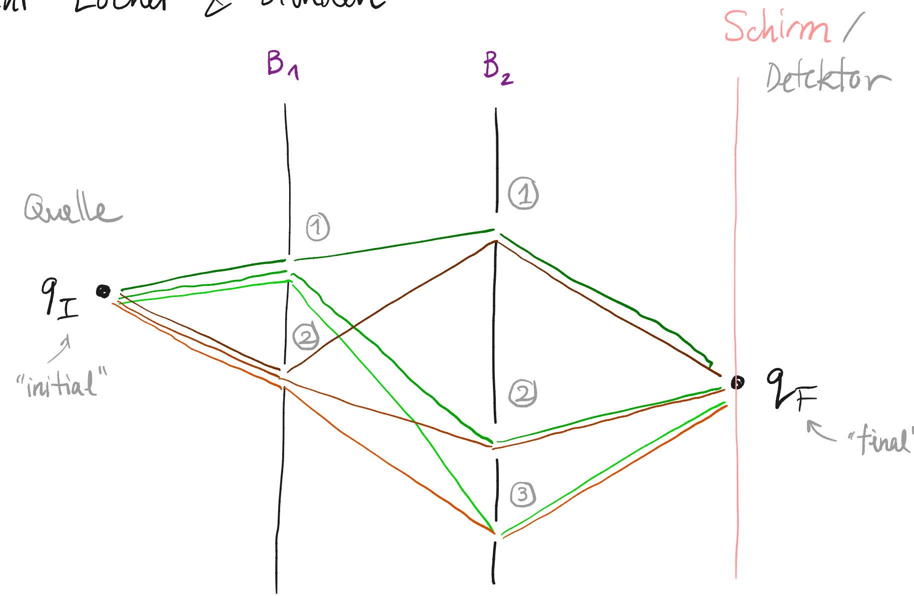
$$P_{q_I \to q_F} = |\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2|^2$$

$$= |\mathcal{A}_1|^2 + |\mathcal{A}_2|^2 + \underbrace{2\,\mathrm{Re}\{\mathcal{A}_1^* \mathcal{A}_2\}}_{\text{Interferenz!}}$$

↳ Wellennatur (WSK) des Elektrons!

Pfadintegralquantisierung

⊳ Mehr Löcher & Blenden

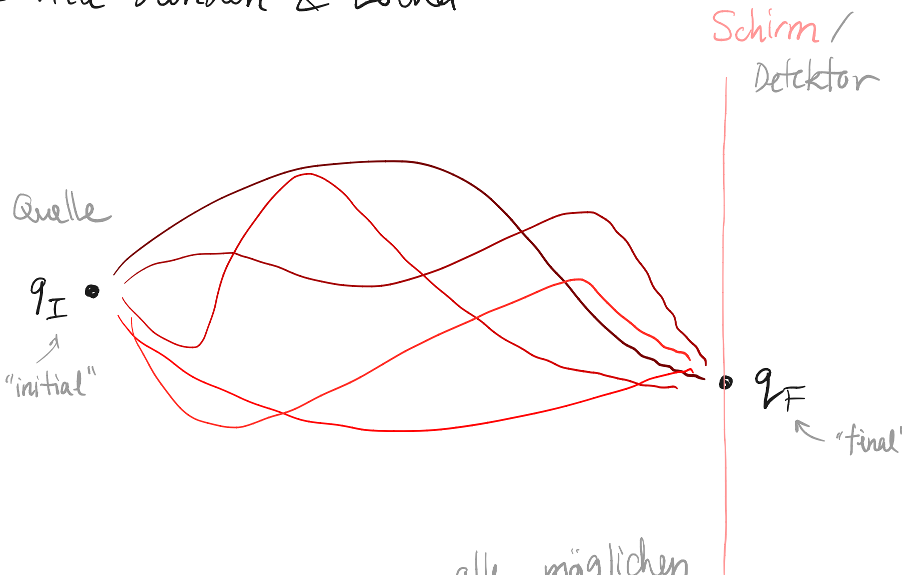


$$P = |\mathcal{A}|^2$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{12} + \mathcal{A}_{13} + \mathcal{A}_{21} + \mathcal{A}_{22} + \mathcal{A}_{23}$$

Pfadintegralquantisierung

⊳ ∞ viele Blenden & Löcher



$$P = |\mathcal{A}|^2$$

$$\mathcal{A} = \sum_{\text{Pfade}} \mathcal{A}_{\text{Pfad}}$$

$$\boxed{\text{eine Blende mit unendlich vielen Löchern} \;\hat{=}\; \text{keine Blende}}$$

⊳ Im Heisenberg Bild

alle möglichen Pfade

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle = \int \mathcal{D}[q(t)] \, e^{i\int_0^T dt \, L(\dot{q}, q)}$$

(Pfadintegral-darstellung)

Operator

keine Operatoren

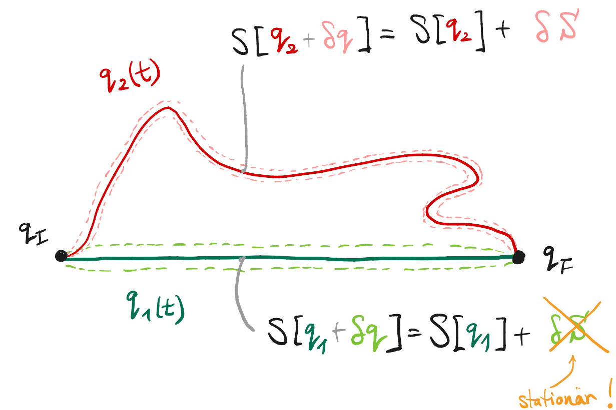
Der klassische Limes $(\hbar \to 0)$

$$\int \mathcal{D}[q(t)]\; e^{\frac{i}{\hbar} S[q(t)]}$$

$q(0) = q_I$

$q(T) = q_F$

$$S[q(t)] = \int_0^T dt\, \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$$



* $q_1(t) \rightsquigarrow \delta S = 0 \Rightarrow$ benachbarte Pfade haben $\sim$ gleiche Phase $\rightsquigarrow$ summieren sich kohärent auf

   $\Rightarrow$ Beitrag zum Pfadintegral

   $\Leftrightarrow$ $\delta S \overset{!}{=} 0$ $\hat{=}$ Euler-Lagrange Gl. der kl. Mechanik

* $q_2(t) \rightsquigarrow$ benachbarte Pfade hoch oszillierend !

$\rightsquigarrow$ Aufhebung $\Rightarrow$ kein Beitrag

Feldquantisierung

$$t \longmapsto (t, \vec{x}) = x^\mu$$
$$q(t) \longmapsto \phi(t,\vec{x}) = \phi(x)$$
$$\mathcal{D}[q(t)] \longmapsto \mathcal{D}[\phi(x)]$$
$$L(\dot{q}(t), q(t)) \longmapsto \mathcal{L}(\partial_\mu \phi(x), \phi(x))$$

Pfadintegral der QFT

$$Z = \int \mathcal{D}[\phi] \, e^{i \int d^4x \, \mathcal{L}(\partial_\mu \phi, \phi)}$$

* Entspricht einem Vakuum $\rightsquigarrow$ Vakuum Übergang ($|I\rangle = |F\rangle = |0\rangle$)
  - $\hookrightarrow$ nicht sonderlich interessant
  - $\hookrightarrow$ wollen das Vakuum stören $\longleftrightarrow$ Teilchen erzeugen/vernichten

Feldquantisierung + J

$$
\left.\begin{array}{lcl}
t & \longmapsto & (t,\vec{x}) = x^\mu \\
q(t) & \longmapsto & \phi(t,\vec{x}) = \phi(x) \\
\mathcal{D}[q(t)] & \longmapsto & \mathcal{D}[\phi(x)] \\
L(\dot{q}(t), q(t)) & \longmapsto & \mathcal{L}(\partial_\mu \phi(x), \phi(x))
\end{array}\right\}
$$

Pfadintegral der QFT

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}[\phi]\, e^{i \int d^4x \left[\mathcal{L}(\partial_\mu\phi, \phi) + J(x)\phi(x)\right]}$$

Enthält vollständige Information d. Theorie (extrem schweres Integral zu lösen)

* Entspricht einem Vakuum ⇝ Vakuum Übergang $(|I\rangle = |F\rangle = |0\rangle)$

⊳ nicht sonderlich interessant

⊳ wollen das Vakuum stören ⟷ Teilchen erzeugen/vernichten

$\Rightarrow$ $J(x) \hat{=}$ Quellen/Senken ("springen" auf der Matratze)

$$\frac{\delta}{iJ(x_1)}\, i\int d^4x\; J(x)\phi(x) = \int d^4x\; \delta(x-x_1)\,\phi(x) = \phi(x_1)$$

4. Störungstheorie & Feynmandiagramme

Wenn nicht exakt, approximativ (systematisch verbesserbar)

Idee: Wechselwirkungen sind "kleine" Störungen um die freie Theorie

$$\alpha_{em} \sim 1/137$$

$$\alpha_{schwach} \sim \alpha_{em}/\sin^2\theta_W \sim 1/30$$

$$\alpha_s \sim 1/10$$

$$\Rightarrow \mathcal{O} = \mathcal{O}^{(0)} + \alpha\,\mathcal{O}^{(1)} + \alpha^2\,\mathcal{O}^{(2)} + \ldots$$

Beispiel Elektron g-2: $a_e = \dfrac{g_e - 2}{2}$

$$a_{e^-}^{exp} = 1\,159\,652\,180.73(.28) \times 10^{-12} \quad (0.24\text{ ppb})$$

$$a_e^{\text{th}} = 1\,159\,652\,182.032(13)(12)(720) \times 10^{-12}$$

contribution	value in units of 10^{-12}
$A_1^{(2)}(\alpha/\pi)$	$1\,161\,409\,733.640 \pm 0.720$
$A_1^{(4)}(\alpha/\pi)^2$	$-\,1\,772\,305.065 \pm 0.003$
$A_1^{(6)}(\alpha/\pi)^3$	$14\,804.203$
$A_1^{(8)}(\alpha/\pi)^4$	$-\,55.667$
$A_1^{(10)}(\alpha/\pi)^5$	0.451 ± 0.013
$A_2^{(4)}(m_e/m_\mu)(\alpha/\pi)^2$	2.804
$A_2^{(6)}(m_e/m_\mu)(\alpha/\pi)^3$	$-\,0.092$
$A_2^{(8)}(m_e/m_\mu)(\alpha/\pi)^4$	0.026
$A_2^{(10)}(m_e/m_\mu)(\alpha/\pi)^5$	$-\,0.0002$
$A_2^{(4)}(m_e/m_\tau)(\alpha/\pi)^2$	0.010
$A_2^{(6)}(m_e/m_\tau)(\alpha/\pi)^3$	$-\,0.0008$
a_e(hadronic v.p.)	1.8490 ± 0.0108
a_e(hadronic v.p.,NLO)	$-\,0.2213 \pm 0.0012$
a_e(hadronic v.p.,NNLO)	0.0280 ± 0.0002
a_e(hadronic l-l)	0.0370 ± 0.0050
a_e(weak)	0.03053 ± 0.00023

Lösung der Freien Theorie

Wir können das Pfadintegral der freien Theorie (quadr. in Feldern) lösen

$$Z_\phi[J] = \int \mathcal{D}[\phi] \; \exp\left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \phi (\Box + m^2) \phi + J\phi \right] \right\}$$

Vgl. mit 1D Gauß Integral

$$\int dx \; \exp\left\{ -\frac{1}{2} d\, x^2 + j x \right\} \sim \exp\left\{ \frac{1}{2} d^{-1} j^2 \right\}$$

$$\sim \exp\left\{ \int d^4x \int d^4y \; \frac{1}{2} \, i J(x) \; i \Delta_\phi(x-y) \; i J(y) \right\}$$

* Feynman Propagator $\Delta_\phi(x-y) \longleftrightarrow$ das Inverse zu $(\Box + m^2)$

$\Leftrightarrow \quad (\Box + m^2) \, \Delta_\phi(x-y) = -\delta(x-y) \qquad \Delta_\phi(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$

$\Leftrightarrow \quad x^0 \lessgtr y^0 \quad \begin{cases} \text{(i) erzeuge Teilchen bei } x \; (y) \\ \text{(ii) propagiere von } x \; (y) \longrightarrow y \; (x) \\ \text{(iii) vernichte Teilchen bei } y \; (x) \end{cases}$

Quellen / Senken J $\rightsquigarrow$ $\frac{\delta}{i\delta J(x)}$ $\longleftrightarrow$ präpariere Teilchen bei x

$$Z_\phi[J] \sim \exp\left\{ \int d^4x \int d^4y \, \frac{1}{2} \, iJ(x) \, i\Delta_\phi(x-y) \, iJ(y) \right\}$$

$$= 1 + \int d^4z \int d^4z' \, \frac{1}{2} \, iJ(z) \, i\Delta_\phi(z-z') \, iJ(z')$$

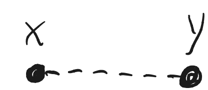
$$+ \frac{1}{2!} \int d^4z_1 \int d^4z_1' \, \frac{1}{2} \, iJ(z_1) \, i\Delta_\phi(z_1-z_1') \, iJ(z_1') \int d^4z_2 \int d^4z_2' \, \frac{1}{2} \, iJ(z_2) \, i\Delta_\phi(z_2-z_2') \, iJ(z_2')$$

$$+ \frac{1}{3!} \left(\text{"}J^6\text{"} \right) + \frac{1}{4!} \left(\text{"}J^8\text{"} \right) + \ldots$$

$$\frac{\delta}{i\delta J(x)} \frac{\delta}{iJ(y)} Z_\phi[J] \Big|_{J=\phi} = \frac{\delta}{i\delta J(x)} \left[\int d^4z' \, \frac{1}{2} \, i\Delta_\phi(y-z') \, iJ(z') + \int d^4z \, \frac{1}{2} \, iJ(z) \, i\Delta_\phi(z-y) \right]$$

nur "J^2" überlebt

$$= \frac{1}{2} \, i\Delta_\phi(y-x) + \frac{1}{2} \, i\Delta_\phi(x-y) = i\Delta_\phi(x-y) =$$



Quellen / Senken J $\rightsquigarrow$ $\frac{\delta}{i\delta J(x)}$ $\longleftrightarrow$ präpariere Teilchen bei x

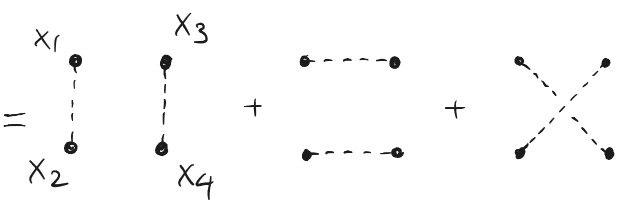
$$Z_\phi[J] \sim \exp\left\{ \int d^4x \int d^4y \, \frac{1}{2} \, i J(x) \, i \Delta_\phi(x-y) \, i J(y) \right\}$$

$$= 1 + \int d^4z \int d^4z' \, \frac{1}{2} \, i J(z) \, i \Delta_\phi(z-z') \, i J(z')$$

$$+ \frac{1}{2!} \int d^4z_1 \int d^4z_1' \, \frac{1}{2} \, i J(z_1) \, i \Delta_\phi(z_1-z_1') \, i J(z_1') \int d^4z_2 \int d^4z_2' \, \frac{1}{2} \, i J(z_2) \, i \Delta_\phi(z_2-z_2') \, i J(z_2')$$

$$+ \frac{1}{3!} \left(\text{"}J^6\text{"} \right) + \frac{1}{4!} \left(\text{"}J^8\text{"} \right) + \ldots$$

$$\frac{\delta}{i\delta J(x_1)} \frac{\delta}{i\delta J(x_2)} \frac{\delta}{i\delta J(x_3)} \frac{\delta}{i\delta J(x_4)} Z_0[J] \Big|_{J=\phi} =$$



$\Rightarrow$ sehr langweilige "Streuung" $\Longleftrightarrow$ brauchen <u>Wechselwirkungen</u>!

Störungstheorie

$$\phi(x) \longleftrightarrow \frac{\delta}{i\,\delta J(x)}$$

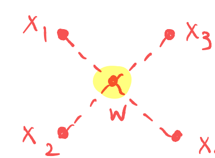
$$Z[J] = \int \mathcal{D}[\phi]\, \exp\left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{WW} + J\phi \right] \right\}$$

$$= \exp\left\{ i \int d^4x\, \mathcal{L}_{WW}\left(\phi(x) \to \frac{\delta}{i\,\delta J(x)} \right) \right\} \cdot \underbrace{\int \mathcal{D}[\phi]\, \exp\left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}_\phi + J\phi \right] \right\}}_{Z_0[J] \text{ (freie Theorie)}}$$

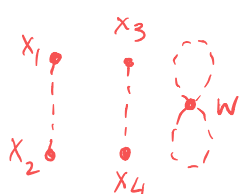
Beispiel: $\boxed{\mathcal{L}_{WW} = \frac{\lambda}{4!}\phi^4}$ mit 4 Teilchen

$$\frac{\delta}{i\,\delta J(x_1)} \cdots \frac{\delta}{i\,\delta J(x_4)} \left\{ 1 \underbrace{- \frac{i\lambda}{4!} \int d^4w \left[\frac{\delta}{i\,\delta J(w)} \right]^4}_{} + \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4w_1 \int d^4w_2 \left[\frac{\delta}{i\,\delta J(w_1)} \right]^4 \left[\frac{\delta}{i\,\delta J(w_2)} \right]^4 + \dots \right\} Z_0[J] \Big|_{J=\phi}$$

$$\rightsquigarrow -i\lambda \int d^4w \; i\Delta_\phi(x_1 - w)\, i\Delta_\phi(x_2 - w)\, i\Delta_\phi(x_3 - w)\, i\Delta_\phi(x_4 - w)$$

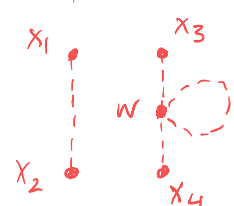


$+ \dots$



("Vakuumblasen")

$+ \dots$



(nicht zusammenhängend)

Feynman Regeln für Streuamplituden (Impulsraum)

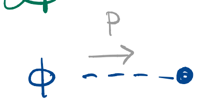
* nur zusammenhängende Diagramme

* amputiere externe Propagatoren & ersetze durch 1-Teilchen Wellenfktn.

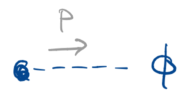
$$\left[\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m_\phi^2\,\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right]$$

$\Rightarrow$ Feynman Regeln für $\mathcal{A}$

- externe Linien

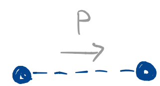


$\rightsquigarrow \quad 1$



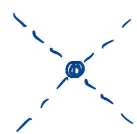
$\rightsquigarrow \quad 1$

- Propagator



$\rightsquigarrow \quad \dfrac{i}{p^2 - m_\phi^2}$

- Vertex



$\rightsquigarrow \quad -i\lambda$

$\hookrightarrow$ male alle zusammenhängende Diagramme

$\hookrightarrow$ Impulserhaltung an jedem Vertex $\left(\int d^4w\right)$

$\hookrightarrow$ Integriere über alle unbestimmten Impulse $\rightsquigarrow \displaystyle\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$ (Loops/ Schleifen)

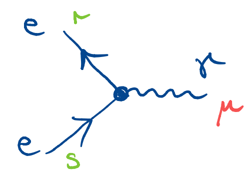
Feynman Regeln für das Standardmodell

Quelle für jedes Feld (sonst "analog")

$$Z[\tilde{J}_\psi, J_\psi, J_A^\mu, J_\phi] = \int \mathcal{D}[\psi]\,\mathcal{D}[\tilde{\psi}]\,\mathcal{D}[A_\mu]\,\mathcal{D}[\phi]\, \exp\Big\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}_{SM} + \tilde{J}_\psi \psi + \tilde{\psi} J_\psi + J_A^\mu A_\mu + J_\phi \phi \right]$$

⇒ direkte Korrespondenz zw. WW Term in $i\mathcal{L}_{SM}$ & Vertizes:

$$-ieA_\mu\, \tilde{\psi}_{e,r}\, \gamma^\mu_{rs}\, \psi_{e,s} \quad \rightsquigarrow$$

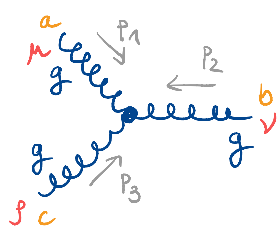


$$= -ie\gamma^\mu_{rs}$$

manchmal nicht so trivial ($\partial_\mu \to -ip_\mu$, identische Felder)

$$\frac{i g_s}{2} \left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu \right) f^{abc} A^{b,\mu} A^{b,\nu}$$

$\rightsquigarrow$

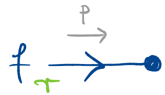


$$= -g_s f^{abc} \big[g_{\mu\nu} (p_1 - p_2)_\rho + g_{\nu\rho} (p_2 - p_3)_\mu + g_{\rho\mu} (p_3 - p_1)_\nu \big]$$

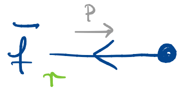
Mehr Regeln

(komplette Liste z.B. in "Feynman Diagrams for Pedestrians" von Thorsten Ohl)

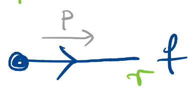
* Externe Felder

einlaufendes f 

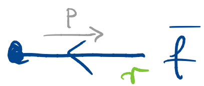
$= u_{f,r}(p,\sigma)$

einlaufendes $\bar{f}$ 

$= \tilde{v}_{f,r}(p,\sigma)$

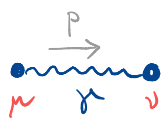
auslaufendes f 

$= \tilde{u}_{f,r}(p,\sigma)$

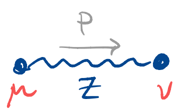
auslaufendes $\bar{f}$ 

$= v_{f,r}(p,\sigma)$

* Propagatoren

Photon 

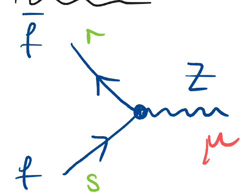
$$= \frac{-i g_{\mu\nu}}{p^2}$$

Z-Boson 

$$= \frac{-i g_{\mu\nu}}{p^2 - M_Z^2 + i\Gamma_Z M_Z}$$

Zerfallsbreite

* Vertex



$$= ie\gamma^{\mu}_{rt}\left(v_f \mathbb{1}_{ts} + a_f \gamma^5_{ts}\right)$$

$$v_f = \frac{I_3^f - 2Q_f s_W^2}{2 s_W c_W} \; ; \; a_f = \frac{I_3^f}{2 s_W c_W}$$

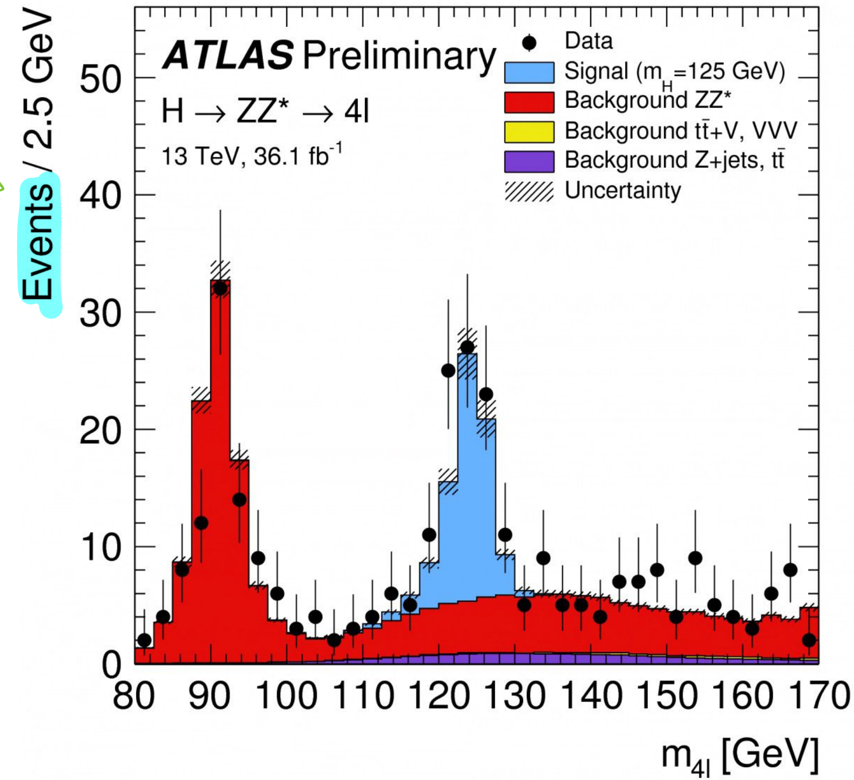
5. Streuprozesse & Wirkungsquerschnitte

* Im Experiment messen wir

  \# Ereignisse

  für Streuprozesse

  $a + b \longrightarrow 1 + 2 + \dots$



Wirkungsquerschnitt

$$dN = L \quad d\sigma$$

Luminosität

$\sim$ # Kollisionen

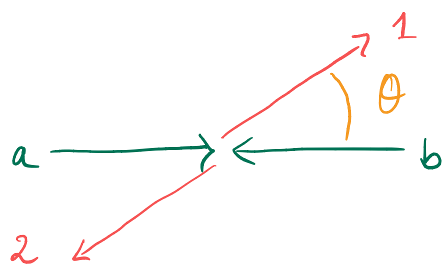
Fermi's Goldene Regel

$$d\sigma = \underbrace{\frac{1}{4(p_a \cdot p_b)}}_{\text{Fluß}} \underbrace{\left| \mathcal{A}_{a+b\to 1+\ldots+n} \right|^2}_{\substack{\text{WSK Dichte} \\ (\leadsto \text{Feynman Diags})}} \underbrace{d\Phi_n(p_1,\ldots,p_n;\, p_a+p_b)}_{n\text{-Teilchen Phasenraum}}$$

$$d\Phi_n(p_1,\ldots,p_n;\, Q) = \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \left[\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3\, 2E_i} \right]}_{\int \text{ über alle Impulskonfigurationen}} (2\pi)^4 \underbrace{\delta^{(4)}(p_1+\ldots+p_n - Q)}_{\text{Energie-Impuls Erhaltung}}$$

* Spezialfall $\quad a+b \to 1+2$

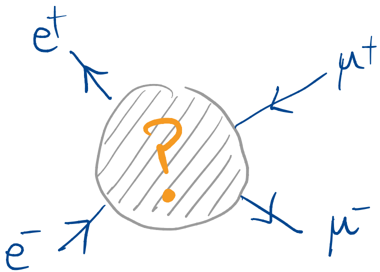
$$d\sigma = \frac{1}{4(p_a \cdot p_b)} \cdot \frac{d\cos\theta}{16\pi} \left| \mathcal{A}_{a+b\to 1+2} \right|^2$$



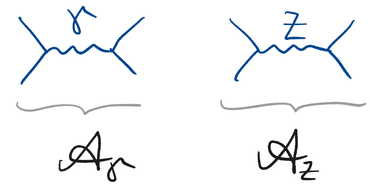
(Streuwinkel)

$$e^+ + e^- \longrightarrow \mu^+ + \mu^-$$

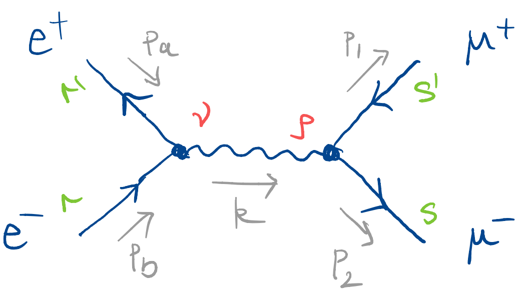
(Annahme: $m_e, m_\mu \ll E \Leftrightarrow$ Kollisionsenergie)



$\rightsquigarrow$ 2 Diagramme



$\mathcal{A}_\gamma =$



$$= \tilde{v}_{e,r}(p_a,\sigma_a)\left[-ie\gamma^\nu_{rr'}\right]u_{e,r'}(p_b,\sigma_b)$$

$$\times \frac{-i\, g_{\nu\rho}}{k^2}$$

$$\times \tilde{u}_{\mu,s}(p_2,\sigma_2)\left[-ie\gamma^\rho_{ss'}\right]v_{\mu,s'}(p_1,\sigma_1)$$

$$k \stackrel{!}{=} (p_a+p_b) = (p_1+p_2)$$

$$= i\,\frac{e^2}{(p_a+p_b)^2}\left[\tilde{v}_e\,\gamma^\rho u_e\right]\left[\tilde{u}_\mu\,\gamma_\rho v_\mu\right] \in \mathbb{C}$$

Volle Amplitude ($\gamma + Z$ Austausch)

$$\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{Mittelung}} \underbrace{\sum_{\substack{\text{spins} \\ \sigma_a,\sigma_b,\sigma_1,\sigma_2}}}_{\text{unpolarisiert}} |\mathcal{A}_\gamma|^2 = \frac{1}{4} \frac{8 e^4}{(p_a \cdot p_b)^2} \left[(p_a \cdot p_1)(p_b \cdot p_2) + (p_a p_2)(p_b p_1) \right] = e^4 \left(1 + \cos^2\theta\right)$$

* mit Z-Boson Austausch

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{A}_\gamma + \mathcal{A}_Z|^2 = e^4 \left[G_1(k^2) \left(1 + \cos^2\theta\right) + G_2(k^2)\, 2 \cos\theta \right]$$

$$\hookrightarrow G_1(k^2) = \underbrace{1}_{|\mathcal{A}_\gamma|^2} + \underbrace{2 v_e v_\mu \,\mathrm{Re}\left\{ \frac{k^2}{k^2 - M_Z^2 + i\Gamma_Z M_Z} \right\}}_{2\mathrm{Re}[\mathcal{A}_\gamma^* \mathcal{A}_Z]} + \underbrace{(v_e^2 + a_e^2)(v_\mu^2 + a_\mu^2) \left| \frac{k^2}{k^2 - M_Z^2 + i\Gamma_Z M_Z} \right|^2}_{|\mathcal{A}_Z|^2}$$

$$\hookrightarrow G_2(k^2) = \emptyset + 2 a_e a_\mu \,\mathrm{Re}\left\{ \text{—— " ——} \right\} + 4 v_e a_e v_\mu a_\mu \left| \text{—— " ——} \right|$$

Wirkungsquerschnitte & Asymmetrie

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\alpha^2\pi}{2s}\left[(1+\cos^2\theta)\, G_1(s) + 2\cos\theta\, G_2(s)\right] \qquad (s = 4E^2)$$

$$\sigma = \int_{-1}^{+1} d\cos\theta\, \frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\alpha^2\pi}{2s}\,\frac{8}{3}\,G_1(s)$$

$$A_{FB} = \frac{\int_0^1 d\cos\theta\, \frac{d\sigma}{d\cos\theta} - \int_{-1}^{0} d\cos\theta\, \frac{d\sigma}{d\cos\theta}}{\sigma} = \frac{\cancel{\frac{\alpha^2\pi}{2s}}\left\{1-(-1)\right\} G_2(s)}{\cancel{\frac{\alpha^2\pi}{2s}}\,\frac{8}{3}\,G_1(s)} = \frac{3}{4}\,\frac{G_2(s)}{G_1(s)}$$

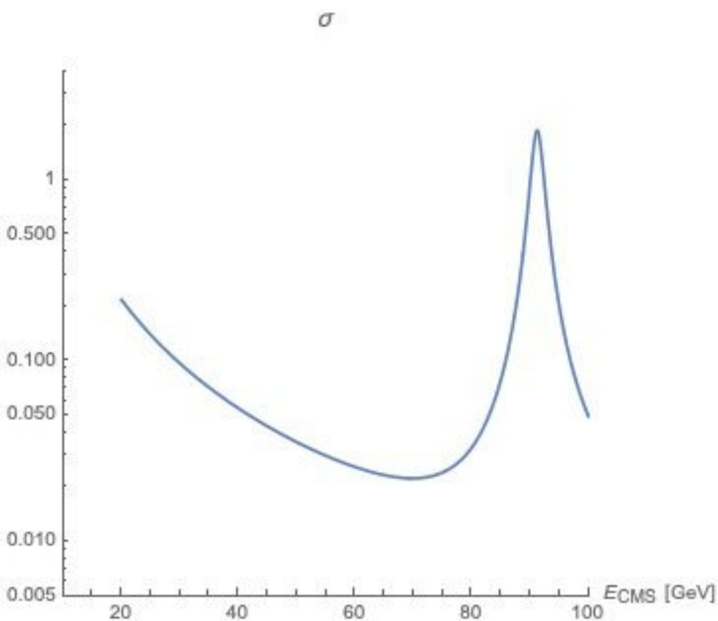
$$[\sigma] = \frac{1}{[A]} = \frac{1}{\mathrm{GeV}^2} \rightsquigarrow \frac{1}{\mathrm{GeV}^2} = 0.389\ldots\ \mathrm{mb} = 0.389\ldots \cdot 10^6\ \mathrm{nb}$$

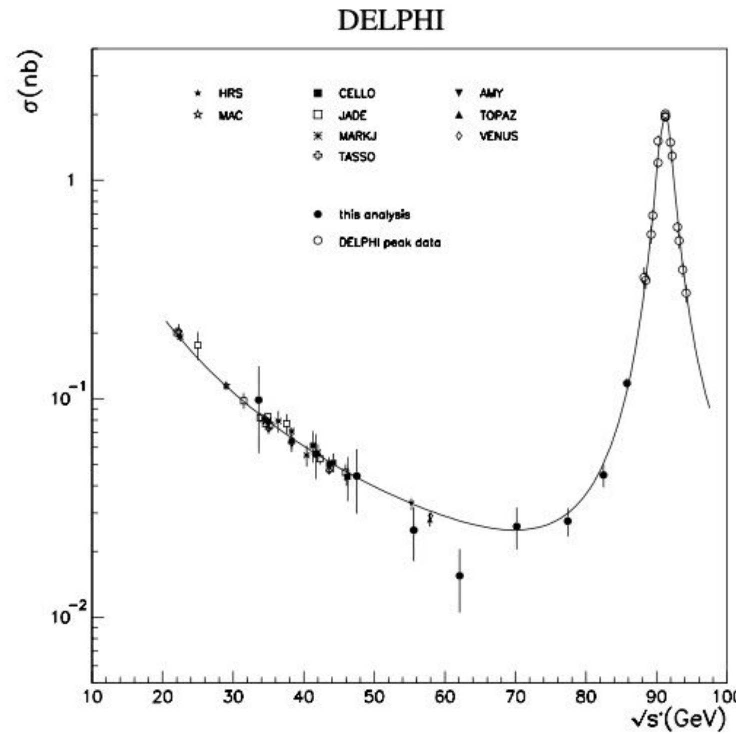
"Implementation"

```
sw2 = 0.223; cw2 = 1 - sw2; sw = Sqrt[sw2]; cw = Sqrt[cw2];
Qf = -1; I3 = -1/2;
vf = (I3 - 2 Qf sw2)/(2 sw cw); af = I3/(2 sw cw);
MZ = 91.1876; GZ = 2.4952;
α = 1/137; GeVnb = 0.389 * 10^6;
propZ[s_] := s/(s - MZ^2 - I GZ MZ)
G1[s_] := Qf^2 - 2 vf^2 Qf Re[propZ[s]] + (vf^2 + af^2)^2 Abs[propZ[s]]^2
G2[s_] := - 2 af^2 Qf Re[propZ[s]] + 4 vf^2 af^2 Abs[propZ[s]]^2
diffXS[s_, cosθ_] := GeVnb (α^2 π)/(2 s) ((1 + cosθ^2) G1[s] + 2 cosθ G2[s])
totXS[s_] := GeVnb (α^2 π)/(2 s) 8/3 G1[s]
AFB[s_] := 3/4 G2[s]/G1[s]
```

Theorie vs. Daten ⟶ totaler WQ

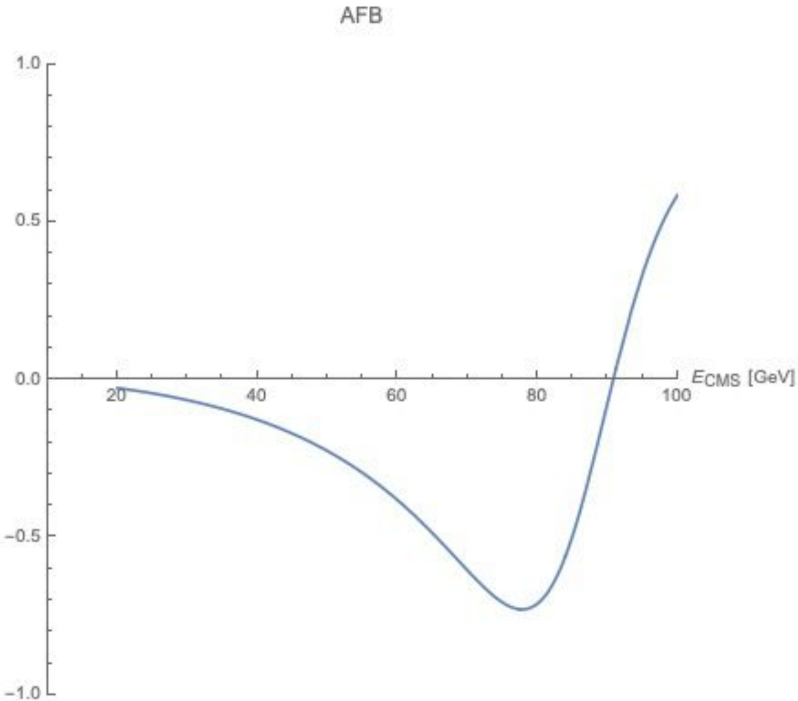
```
LogPlot[{totXS[Ecms^2]}, {Ecms, 20, 100},
 PlotRange → {{10, 100}, {5*10^-3, 4}}, AspectRatio → 1,
 PlotLabel → "σ", AxesLabel → {"E_CMS [GeV]", ""}]
```

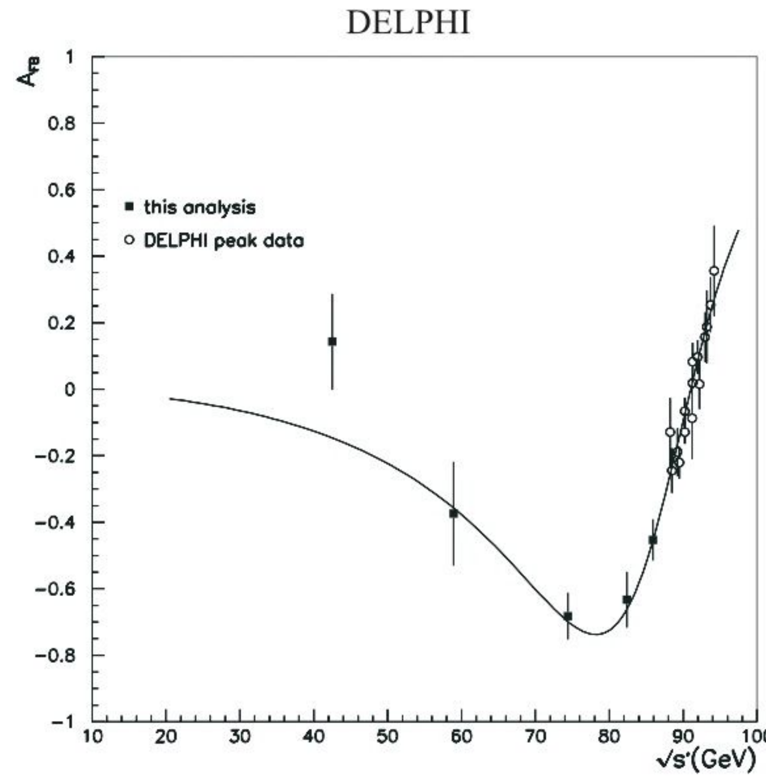




Theorie vs. Daten $\rightsquigarrow$ Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie

```
Plot[{AFB[Ecms²]}, {Ecms, 20, 100},
 PlotRange → {{10, 100}, {-1, 1}}, AspectRatio → 1,
 PlotLabel → "AFB", AxesLabel → {"Ecms [GeV]", ""}]
```



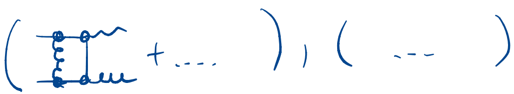


Theorie vs. Daten @ LHC

* $p+p \to \gamma + \text{jet}$

LO

NLO



$\pm\infty$ (UV)

$-\infty$ (IR)

(12 diag) (12 diag)

$+\infty$ (IR)

(8 diag) (8 diag)

NNLO $\mathcal{O}(100-1000)$ Diagramme

& komplizierte Integrale

⇒ komplizierte Funktionen