

สัมพัทธภาพทั่ว ๆ ไป

อภิเมข วัชรางกูร

สถาบันวิจัยดาราศาสตร์แห่งชาติ (องค์การมหาชน)

Contents

1	บทนำ	5
2	แมนนิโฟลด์เรียบ ๆ	7
2.1	นิยามของแมนนิโฟลด์	7
2.2	ฟังก์ชันเรียบ (Smooth function)	10
2.3	เวกเตอร์บันเดิล และปริภูมิแทนเจนต์ (Vector bundle and tangent space)	10
2.4	โคเวกเตอร์	12
2.5	Tensors	14
2.6	Differential form	14
2.6.1	exterior derivative and interior product	16
2.7	Riemannian curvature	16
2.7.1	Infinitesimal and Riemannian metric	16
2.7.2	Connection and curvature	18
2.7.3	Curvature from acceleration	19
2.7.4	คุณสมบัติของเทนเซอร์ความโค้ง	23
3	กาลอวกาศ และสสาร	25
3.1	Spacetime	26
3.2	Energy-momentum tensor and Einstein equation	27
3.2.1	Einstein Hilbert action	30
4	Cosmology	33
4.1	Cosmological Principle	33
4.1.1	The Friedmann equations	34
4.1.2	What kind of fluid?	36
4.2	Cosmic Inflation	37

5	การกระเพื่อมของสนามโน้มถ่วง (Gravitational Perturbation)	41
5.1	สมการไอน์สไตน์แบบเชิงเส้น	42
5.2	เอกสารอ้างอิง	42

Chapter 1

บทนำ

In Newtonian gravity, gravity is a mysterious force pulling objects together and spacetime is just a non-interactive background. In this picture, the trajectory of an object in the spacetime (space is a 3-dimensional Euclidean space) under the influence of gravitational field is not a shortest path. Unlike Newtonian gravity, general relativity (GR) is a theory of spacetime and how energy and matter affect the geometry of spacetime. In GR space, and time play a crucial role in the description of gravity, and any free falling object in GR always take the shortest path. Of course such a phenomenon does not occur in Euclidean space. The type of geometry that we use in GR is Riemannian geometry (or rather pseudo-Riemannian geometry), which is what we will discuss next.

Chapter 2

แมนนิโฟลด์เรียบ ๆ

ในธรรมชาติเราจะพบวัตถุที่มีลักษณะความโค้งมากกว่าวัตถุที่มีลักษณะราบเรียบ มนุษย์จึงมีความคุ้นเคยกับวัตถุที่มีความโค้งเป็นอย่างดี โดยเฉพาะคนที่ทำงานกับพื้นผิวโค้ง ตัวอย่างเช่น ช่างเขียนรูป ช่างปั้นหม้อ เป็นต้น จากการสังเกตคุณสมบัติต่าง

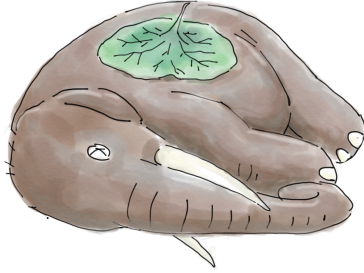


รูปที่ 2.1 ถ้วยตราไก่ ลำปาง [Dhanabadee.com]

ๆ ของผิวโค้งที่พบในชีวิตประจำวัน เราจะสามารถสร้างนิยามวัตถุทางคณิตศาสตร์ที่รวมเอาคุณสมบัติต่าง ๆ ของพื้นผิวโค้งไว้ ซึ่งเราเรียกวัดุดังกล่าวว่าเป็นแมนนิโฟลด์ (Manifold) คุณสมบัติต่าง ๆ ของพื้นผิวโค้งสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปริมาณต่าง ๆ ทางฟิสิกส์ เช่น การไหลของของไหล การเลี้ยวเบนของแสง ความเข้มสนามแม่เหล็กไฟฟ้า และแรงโน้มถ่วง ฯลฯ

2.1 นิยามของแมนนิโฟลด์

ในการนิยามแมนนิโฟลด์ อันดับแรกเซตที่เราพิจารณาจะต้องมีโทโพโลยีเสียก่อน โดยหลักการแล้วปริภูมิโทโพโลยีก็คือเซตที่เราสามารถจะนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องได้ ส่วนการจะเป็นแมนนิโฟลด์ต้องมีคุณสมบัติเพิ่มเติมดังจะได้กล่าวถึงต่อไปนี้



(a) แผ่นพิกัดบนแมนนิโฟลด์



(b) แผนที่โลก

รูปที่ 2.2 ตัวอย่างของแผ่นพิกัด

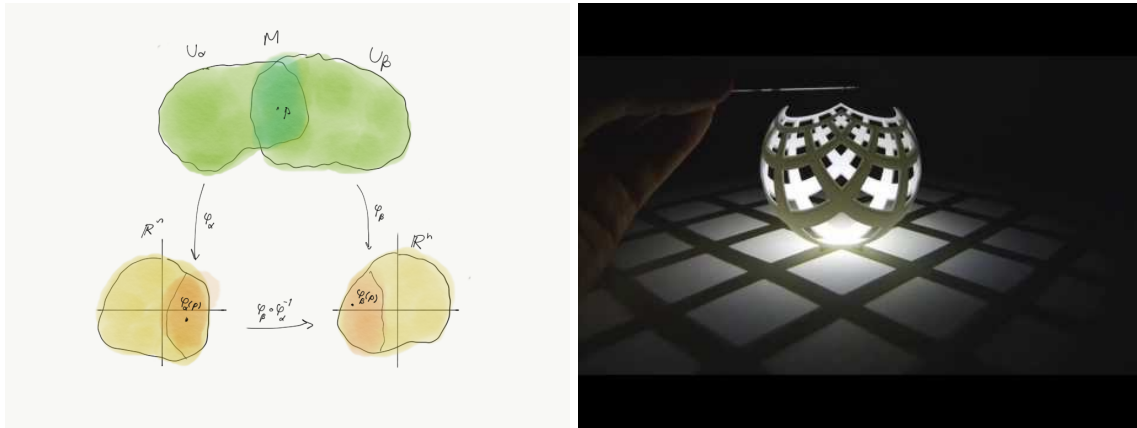
นิยาม 2.1.1 (แมนนิโฟลด์เชิงโทโพโลยี) ปริภูมิโทโพโลยี M เป็นแมนนิโฟลด์ถ้าสอดคล้องเงื่อนไขดังต่อไปนี้

- M เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ (Hausdorff): จุดสองจุดใด ๆ สามารถแยกจากกันได้ด้วยเซตเปิดสองเซตซึ่งมีอินเตอร์เซกชันเป็นเซตว่าง
- second countable: เบสิสของโทโพโลยีเป็นจำนวนนับได้
- ราบเรียบในบริเวณจำกัด (Locally Euclidean): ทุก ๆ จุด $p \in M$ มีย่านจุด (neighbourhood) U และฟังก์ชัน $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ โดยที่ φ โฮมิโอโมρφิค (homeomorphic) กับอิมเมจของมัน เราเรียก (U, φ) ว่าแผ่นพิกัด (coordinate chart)

โดยทั่วไปแล้ว เราจะต้องการแผ่นพิกัดมากกว่าหนึ่งเพื่อที่จะคลุมแมนนิโฟลด์ทั้งหมด เพื่อให้เห็นภาพเราอาจจะนึกถึงสำนวนไทยที่ว่า “ช่างตายทั้งตัวเอาใบบัวมาปิดไม่มิด” อีกตัวอย่างที่สำคัญคือแผนที่โลก (รูปที่ 2.2b) เนื่องจากโลกไม่ได้แบน เราไม่สามารถจะทำแผนที่ให้เป็นแผ่นได้โดยที่ไม่ตัดหรือเจาะรูลูกโลกได้ การที่เราสมมติให้แมนนิโฟลด์มีคุณสมบัติราบเรียบในบริเวณจำกัดนั้นเพื่อ 1. ผิดโค้งทั่ว ๆ ไปไม่มีคุณสมบัติดังกล่าว 2. ในบริเวณจำกัดนั้น ๆ เราสามารถจะใช้แคลคูลัสในปริภูมิยูคลิดได้ ในฟิสิกส์เรามักจะเขียนพิกัดโดยไม่พูดถึงของเซตของพิกัดที่ใช้ เช่น เวลาเขียนลอย ๆ ขึ้นมาว่า x^μ จะหมายถึงพิกัดของแผ่นพิกัดแผ่นหนึ่ง $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ ของจุด $p \in M$

ตัวอย่าง 2.1.2 Stereographic projection บน S^2 สมมติว่า $n, s \in S^2$ เป็นจุดที่ขั้วเหนือ และใต้ของผิวทรงกลมตามลำดับ เรานิยามฟังก์ชัน $\varphi_n : S^2 - \{n\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ โดย

$$\varphi(x, y, z) = \frac{2}{1-z}(x, y) \quad (2.1.1)$$



(a) แผ่นพิกัดบนแมนนิโฟลด์

(b) พิกัดที่ได้จากเงาจากทรงกลม

รูปที่ 2.3 แผ่นพิกัดต่าง ๆ

เราสามารถจะส่งทุกจุดที่อยู่บนผิวทรงกลมไปยังพื้นผิว \mathbb{R}^2 จุดต่อจุดได้ทั้งหมด ยกเว้นจุดที่ขั้วเหนือของผิวทรงกลม รูป 2.3b นั้นหมายความว่าเราจะต้องใช้แผ่นพิกัดอย่างน้อยที่สุดสองแผ่นนั่นคือ $(S^2 - \{n\}, \varphi_n)$ และ $(S^2 - \{s\}, \varphi_s)$ เพื่อที่จะครอบคลุมทุกจุดบน S^2

แบบฝึกหัด 2.1.3 จงแสดงว่า $\varphi_{s,n}$ และอินเวอร์สของมัน เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

เมื่อเราสามารถใช้แคลคูลัสบนแต่ละแผ่นพิกัดได้แล้ว สิ่งที่เราควรคำนึงถึงก็คือผลการคำนวณควรจะเหมือนเดิมเมื่อเราย้ายไปคำนวณบนแผ่นพิกัดข้างเคียงที่ซ้อนทับกันอยู่

นิยาม 2.1.4 แมนนิโฟลด์ M เป็นแมนนิโฟลด์เรียบถ้ามีแอตลาส (atlas): แอตลาสคือเซตที่รวบรวมเอาแผ่นพิกัด $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ซึ่งเพียงพอที่จะใช้ปกคลุม M และหาก U_α, U_β เป็นสองแผ่นพิกัดที่ซ้อนทับกันแล้ว ฟังก์ชันที่นิยามโดย $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ จะเป็นฟังก์ชันเรียบ

ความหมายของนิยามข้างบนในภาษาที่ง่ายขึ้นมาหน่อยก็คือ ถ้าเรามีแผ่นพิกัดสองแผ่นที่ทับกัน ส่วนที่ทับกันจะต้องต่อกันได้แบบเนียน ๆ เป็นเนื้อเดียวกัน

เราเรียกฟังก์ชัน $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ ว่าฟังก์ชันทรานสิชัน (transition function) หรือก็คือจาโคเบียนเมทริกซ์ที่เรารู้จักกันในแคลคูลัสนั่นเอง จะเห็นว่าเราจะต้องคำนวณจาโคเบียนเมทริกซ์ใหม่ทุกครั้งเมื่อพิจารณาแผ่นพิกัดใหม่ ต่างกับในในกรณีของ \mathbb{R}^n ซึ่งเราสามารถใส่แผ่นพิกัดเดียวทั่วทั้งปริภูมิได้ ในฟิสิกส์มักเขียนแทนการเปลี่ยนพิกัดโดย $x^\mu \rightarrow x'^\mu$

ตัวอย่าง 2.1.5 แมนนิโฟลด์เรียบ

- \mathbb{R}^n ปริภูมิยูคลิดีียน n -มิติ
- $S^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1\}$ ผิวทรงกลมหนึ่งหน่วย n -มิติ
- $SO(n)$ กรุ๊ปการหมุนใน n -มิติ (Special orthogonal group) ซึ่งเป็นลิกกรุ๊ป (Lie group)

2.2 ฟังก์ชันเรียบ (Smooth function)

เมื่อนึกถึงเราอุณหภูมิที่จุดต่าง ๆ บนผิวโลก เราสามารถจะนิยามฟังก์ชัน $T : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ได้ แล้วถ้านาย A สร้างพิกัด (x, y) ขึ้นมาเขาก็สามารถบอกได้ว่าอุณหภูมิ ณ จุดต่าง ๆ บริเวณใกล้บ้านเป็นเท่าไร ในขณะที่เดียวกันนาย B เพื่อนบ้านของเขาก็สามารถระบุอุณหภูมิรอบ ๆ บ้านตัวเองได้โดยเทียบกับพิกัดใกล้บ้านเขาเอง (w, v) แต่หากนาย A และนาย B มาเจอหน้า แล้วพูดถึงอุณหภูมิ ณ จุดเดียวกันในบริเวณใกล้บ้านของคนที่ทั้งสองคนก็ต้องมีวิธีสื่อสารกันให้เข้าใจว่าตอนนี้กำลังพูดถึงอุณหภูมิที่จุดไหน และสมบัติอื่น ๆ ของฟังก์ชัน T เช่น การหาอนุพันธ์ได้ ก็ไม่ควรจะขึ้นกับพิกัดที่แต่ละคนสร้างขึ้นเช่นกัน จากตัวอย่างนี้เราจะนิยามฟังก์ชันเรียบบนแมนนิโฟลด์ดังนี้

นิยาม 2.2.1 ให้ M เป็นแมนนิโฟลด์ m มิติ และ $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันบนแมนนิโฟลด์ ให้ $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ เป็นแผ่นพิกัดใดของจุด p ถ้า $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ เป็นฟังก์ชันเรียบ เราก็คจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันเรียบที่จุด p

ในทำนองเดียวกันเราสามารถจะนิยามความเรียบของฟังก์ชันระหว่างแมนนิโฟลด์ M และ N ได้โดยมองว่าสำหรับทุก (V_i, ψ_i) ซึ่งเป็นแผ่นพิกัดของ $f(p)$ ฟังก์ชัน $\psi_i \circ f$ ก็เป็นฟังก์ชันจาก M ไป \mathbb{R} แล้วใช้นิยามของฟังก์ชันเรียบด้านบนก็จะได้

นิยาม 2.2.2 ให้ M, N เป็นแมนนิโฟลด์ m และ n มิติตามลำดับ และ $f : M \rightarrow N$ เป็นฟังก์ชันระหว่างแมนนิโฟลด์ ให้ $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ เป็นแผ่นพิกัดของจุด p และ (V_i, ψ_i) เป็นแผ่นพิกัดของจุด $f(p)$ ถ้า $\psi_i \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ เป็นฟังก์ชันเรียบ เราก็คจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันเรียบบนแมนนิโฟลด์

แบบฝึกหัด 2.2.3 ถ้าฟังก์ชันอุณหภูมิบนทรงกลมเป็น $T(x, y, z) = z$ จงแสดงว่าฟังก์ชันอุณหภูมิดังกล่าวเป็นฟังก์ชันเรียบ

เราจะเห็นจากนิยามด้านบนว่าเรานิยามความเรียบของฟังก์ชันระหว่างแมนนิโฟลด์โดยการดึงฟังก์ชันนั้นมาพิจารณาบนปริภูมิยูคลิด ซึ่งเป็นสิ่งแวดล้อมที่เราคุ้นเคย และสามารถใช้แคลคูลัสบนปริภูมินี้ตัดสินความเรียบของฟังก์ชันได้ เทคนิคนี้จะถูกนำมาใช้เสมอ ๆ ในการคำนวณค่าต่าง ๆ บนแมนนิโฟลด์

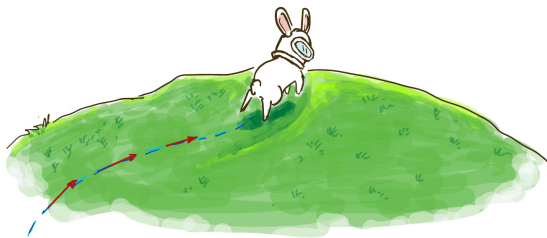
2.3 เวกเตอร์บันเดิล และปริภูมิแทนเจนต์ (Vector bundle and tangent space)

เพื่อที่จะให้เห็นภาพสนามเวกเตอร์บนแมนนิโฟลด์ เราลองนึกถึงหนวดของดอกไม้ทะเลที่พัดไปมา หรือจะนึกถึงยอดหญ้าในทุ่งหญ้าก็ได้ นั่นคือบนพื้นผิวของแมนนิโฟลด์จะมีเวกเตอร์แปะอยู่

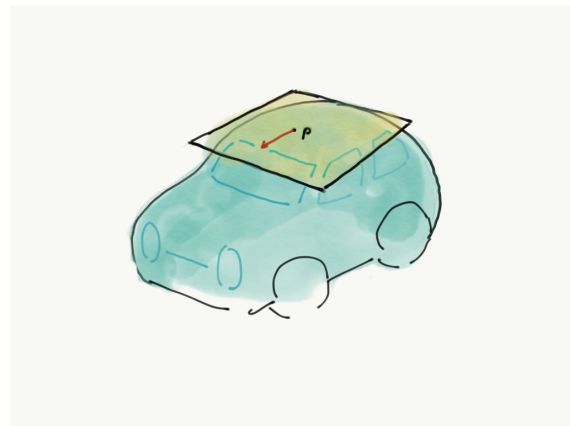
ในบริเวณเล็ก ๆ เราจะเห็นว่าเวกเตอร์ของเราเป็นสมาชิกของเซตหน้าตาแบบนี้ $U \times \mathbb{R}^n$ เราเรียกโครงสร้างที่มีปริภูมิเวกเตอร์แปะอยู่บนทุกจุดของแมนนิโฟลด์นี้ว่า **เวกเตอร์บันเดิล** หรือเมื่อพูดเป็นภาษาคณิตศาสตร์คือ เวกเตอร์บันเดิล คือ (E, π, M) โดยที่ $\pi : E \rightarrow M$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และเมื่อพิจารณาที่บริเวณเล็ก ๆ ใกล้ ๆ จุด $p \in M$ เซตเซตของ E จะมีหน้าตาเหมือน $U \times V$ ในที่นี้ U เป็นบริเวณใกล้เคียงจุด p และ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ตัวอย่างที่สำคัญของเวกเตอร์บันเดิล คือ แทนเจนต์บันเดิล ซึ่งสามารถสร้างได้บนแมนนิโฟลด์เรียบใด ๆ อย่างเช่นบนแมนนิโฟลด์หนึ่งมิติ 2.5a (เส้นโค้งเรียบ) เส้นสัมผัสเส้นโค้งก็คือ ปริภูมิแทนเจนต์ และความเร็ว ณ ตำแหน่งดังกล่าวก็คือสมาชิกใน ปริภูมิแทนเจนต์ หรือในสองมิติก็จะเป็นเหมือนรูป 2.5b ในแมนนิโฟลด์ 1,2 มิติเราจินตนาการภาพของปริภูมิแทนเจนต์ได้ง่าย นั่นคือเราเอาแมนนิโฟลด์มาฝัง (embed) ในแมนนิโฟลด์ที่มีมิติสูงกว่า แล้วดูปริภูมิเวกเตอร์สัมผัส แต่เมื่อเราอาจจะต้องฟังวิธีอื่น



รูปที่ 2.4 ดอกไม้ทะเล [waikikiaquarium.org]



(a) เส้นโค้งการเคลื่อนที่ของ SHEAPbit



(b) ผิวสัมผัสบนแมนนิโฟลด์ที่หน้าตาเหมือนรถ

รูปที่ 2.5 ปริภูมิแทนเจนต์

เราเคยเรียนกันมาว่า ความเร็วเป็นเวกเตอร์สัมผัสของเส้นโค้ง ซึ่งสามารถหาได้โดยไม่ต้องพึ่งมิติที่สูงขึ้น ถ้าเราให้ $a \in \mathbb{R}^n$, โดยนิยาม $\mathbb{R}_a^n = \{(a, v); v \in \mathbb{R}^n\}$ และให้ $T(\mathbb{R}^n)$ เป็นเซตที่รวมการส่ง $\tilde{v}_a : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งนิยามดังนี้

$$\tilde{v}_a f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv). \quad (2.3.1)$$

จากนิยาม เราสามารถแสดงได้อย่างง่าย ๆ ว่า

$$\begin{aligned} \tilde{v}_a f &= \left. \frac{d}{dt} \left(f(a) + tv^\mu \partial_\mu f(a) + \frac{t^2}{2!} v^\nu v^\mu \partial_\nu \partial_\mu f(a) + \dots \right) \right|_{t=0} \\ &= \left(v^\mu \partial_\mu f(a) + \frac{t}{2} v^\nu v^\mu \partial_\nu \partial_\mu f(a) + \dots \right) \Big|_{t=0} \\ &= v^\mu \partial_\mu f(a). \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

กลายเป็นว่าการส่ง $(a, v) \mapsto \tilde{v}_a$ เป็นการส่งที่รักษาโครงสร้างของปริภูมิเวกเตอร์ (isomorphism : bijective linear map) เราจึงสามารถมองเวกเตอร์ให้เป็นตัวดำเนินการอนุพันธ์ได้ โดยจาก Eq. (2.3.2) เราก็บอกได้อีกว่า $\{\partial_\mu\}$ เป็นเบสิสของ $T(\mathbb{R}^n)$.

เนื่องจากแมนนิโฟลด์ M ของเราน้ำตาเหมือนปริภูมิ \mathbb{R}^n ในบริเวณเล็ก ๆ (Locally Euclidean) เราก็สร้างการส่งเหมือนกันกับด้านบน นั่นคือ $X_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นอนุพันธ์ที่จุด $p \in M$ โดยจะมีสมบัติสอดคล้องกับความสัมพันธ์

$$X_p f g = f(p) X_p g + (X_p f) g(p) , \quad (2.3.3)$$

โดยที่ $f, g \in C^\infty(M)$ เราจะเขียนแทนเซตของอนุพันธ์นี้ด้วย $T_p M$ และเรียกมันว่าปริภูมิแทนเจนท์ (สมาชิกก็คือเวกเตอร์แทนเจนท์) เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าเบสิสของ $T_p M$ สัมพันธ์กับเบสิสของ $T_a(\mathbb{R}^n)$ ดังนี้

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p f = \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_{\varphi(p)} f \circ \varphi^{-1} . \quad (2.3.4)$$

แล้วแทนเจนท์บันเดิลก็เป็นการยูเนียนของปริภูมิแทนเจนท์

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M , \quad (2.3.5)$$

โดยที่ TM เป็นแมนนิโฟลด์เรียบ สมาชิกของ TM ก็คือสนามเวกเตอร์ (หรือ เรียกอีกชื่อว่า section) เราจะบอกว่าสนามเวกเตอร์ X เป็นสนามเวกเตอร์เรียบ ถ้า Xf เป็นฟังก์ชันเรียบ และเราจะเขียนแทนเซตของสนามเวกเตอร์เรียบด้วย $\Gamma(TM)$ ต่อจากนี้เราจะพิจารณาสนามเวกเตอร์เรียบเป็นหลัก และในฟิสิกส์มักจะเขียนแต่คอมโพเนนท์

$$V_p = V^\mu(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right|_p \rightarrow V^\mu$$

แบบฝึกหัด 2.3.1 ถ้าให้ $V_p \in T_p M$ และ $f \in C^\infty(M)$ จงแสดงว่า $V_p f$ เป็นฟังก์ชันเรียบ ก็ต่อเมื่อ V^μ เป็นฟังก์ชันเรียบ จำไว้ว่า การคำนวณใด ๆ ในแมนนิโฟลด์มักจะต้องผ่านการเลือกพิกัดเสียก่อน และการคำนวณดังกล่าวต้องให้ผลเหมือนกันในทุกแผ่นพิกัดจึงจะสามารถบอกได้ว่าเป็นจริงบนแมนนิโฟลด์ (ฟิสิกส์มักจะใช้คำว่า ไม่ขึ้นกับการแปลงพิกัด)

2.4 โคเวกเตอร์

ปริภูมิโคแทนเจนท์ $T_p^* M$ เป็นเซตของฟังก์ชันเชิงเส้น $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ และด้วยสมบัติเชิงเส้นทำให้ $T_p^* M$ มีสมบัติเป็นปริภูมิเวกเตอร์ด้วยตัวของมันเอง

ตัวอย่าง 2.4.1 (ฮามิลโทเนียน) ให้ $p \in M$ และ (q^1, \dots, q^n) เป็นพิกัด จุดใน configuration space เขียนเป็นคู่อันดับ $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ สังเกตว่าจุดที่วาก็คือจุดในปริภูมิแทนเจนท์นั่นเอง สมมติว่าเส้นทางที่ประกอบจากจุดเหล่านี้เกิดจากการเคลื่อนที่ของมวลภายใต้ศักย์ $V(\mathbf{q})$ เราเขียนลากรางเจียนเป็นฟังก์ชันได้

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} m \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 - V(\mathbf{q}) , \quad (2.4.1)$$

จากลากรางเจียน $L \in \mathbb{R}$ เรานิยามคาโนนิคัลโมเมนตา $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$ เรานิยามปริภูมิใหม่เรียกว่าปริภูมิเฟส โดยจุดในปริภูมินี้คือ $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ เราหาฮามิลโตเนียนโดยการแปลงเลอจองด์

$$p_i \dot{q}^i = L + H , \quad (2.4.2)$$

โดย $H = \|\mathbf{p}\|^2/2m + V(\mathbf{q})$ เห็นชัดเจนว่า $\mathbf{p}(\dot{\mathbf{q}}) \mapsto \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่ส่งเวกเตอร์ $\dot{\mathbf{q}}$ ไปเป็นจำนวนจริง ดังนั้น $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in T^*M$.

On the tangent space there is a natural inner product $g : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$. This is the Riemannian metric (which we will discuss in details very soon.) Let $X_p, Y_p \in T_pM$

$$\begin{aligned} g(X_p, Y_p) &= g(X^\mu \partial_\mu|_p, Y^\nu \partial_\nu|_p) \\ &= X^\mu Y^\nu g(\partial_\mu, \partial_\nu) \\ &= X^\mu Y^\nu g_{\mu\nu} . \end{aligned}$$

Using the Riemannian metric, one can define covector

$$\omega_X := g(X_p, \cdot) , \quad (2.4.3)$$

which is easy to check that it is a linear functional. From the **Riesz representation theorem**, all linear functional in an inner product space are in this form. We know that the basis of T_pM is $\{\partial_\mu\}$. The following proposition will give us a clue to find a basis for T_p^*M

Proposition 2.4.2 *Let $\{E_i\}$ be a basis of a vector space V . The set of linear functional $\{\varepsilon^i\}$ satisfying*

$$\varepsilon^i(E_j) = \delta_j^i , \quad (2.4.4)$$

is the basis for V^ , in particular $\dim V = \dim V^*$.*

One can check that derivative of smooth function define by

$$df(X_p) = X_p f$$

is also a linear functional i.e. $df \in T_p^*M$. Since each x^μ is a smooth function, dx^μ is a covector, moreover

$$dx^\mu(\partial_\nu|_p) = \partial_\nu x^\mu(p) = \delta_\nu^\mu .$$

Hence from the previous proposition $\{dx^\mu\}$ is a basis for T_p^*M , and we also write

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu . \quad (2.4.5)$$

From the Riesz's theorem, there exists a vector X such that $g(X, \cdot) = \omega = \omega_\mu dx^\mu$, so the component of the covector is

$$\omega_\nu = g(X^\mu \partial_\mu, \partial_\nu) = X^\mu g_{\mu\nu} . \quad (2.4.6)$$

For convenient we use the same symbol but use a subscript i.e. X_μ .

2.5 Tensors

Let V be a vector space. Tensor is a multilinear map (of rank n)

$$T : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.5.1)$$

Suppose we have tensors T , and S of rank k and l respectively. Tensor product is a map $T \otimes S : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k+l} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$T \otimes S(X_1, \dots, X_{k+l}) = T(X_1, \dots, X_k)S(X_{k+1}, \dots, X_{k+l}) \quad (2.5.2)$$

ตัวอย่าง 2.5.1 *If we take $V = T_p M$ or $T_p^* M$ then*

- *vectors and covectors are tensors of rank $(0, 1)$ and $(1, 0)$ respectively.*
- *Riemannian metric g is a tensor $(2, 0)$, in a local coordinate $g = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.*
- *The inverse metric $g^{-1} := g^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu$, s.t. $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu$, is a $(0, 2)$ tensor.*

2.6 Differential form

Now let us explore a special type of tensor called totally antisymmetric tensors. Let $\{X_\mu\}_{\mu=1, \dots, n}$ be a collection of linearly independent vector fields, consider a $(2, 0)$ tensor, which can be decomposed into symmetric and anti-symmetric parts i.e.

$$\begin{aligned} T(X_1, X_2) &= \frac{1}{2} (T(X_1, X_2) + T(X_2, X_1)) + \frac{1}{2} (T(X_1, X_2) - T(X_2, X_1)) \\ &:= \alpha(X_1, X_2) + \omega(X_1, X_2) , \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

where α, ω are symmetric and anti-symmetric $(2, 0)$ tensor respectively. Likewise, for any $(k, 0)$ tensor, $T(X_1, \dots, X_k)$ one can define a totally anti-symmetric tensor

$$\omega(X_1, \dots, X_k) = \sum_{\sigma} \frac{\text{sign}(\sigma)}{k!} T(X_{\sigma(1)}, \dots, T_{\sigma(k)}) . \quad (2.6.2)$$

The collection of such totally anti-symmetric tensor of rank k is called k -form, denoted by $\wedge^k T^* M$, or $\Omega^k(T^* M)$. Note that, a smooth function and its derivative f, df are defined as 0-form and 1-form respectively, and the maximum rank of forms is equal to the dimension of the manifold i.e. n -form.

ตัวอย่าง 2.6.1 (Wedge product) *Let $\{x^\mu\}_{\mu=1, \dots, n}$ be a local coordinate, dx^μ is a $(1, 0)$ tensor, so one defines*

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu . \quad (2.6.3)$$

Notice that, $dx^I := dx^\mu \wedge dx^\nu$; $\nu > \mu$ form a collection of linearly independent 2-forms, so there are $\binom{n}{2}$ of them. The set $\{dx^I\}$ will be basis of 2-forms if it needs to span Ω^k . Since a 2-form is a tensor, it can be written as (not linearly independent)

$$\omega(\partial_\alpha, \partial_\beta) = \tilde{\omega}_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu (\partial_\alpha, \partial_\beta) ,$$

then using the fact that it is anti-symmetric, we have $\tilde{\omega}_{\alpha\beta} = -\tilde{\omega}_{\beta\alpha}$. The 2-form can be rewritten in the following way.

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu &= \frac{1}{2} (\tilde{\omega}_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu + \tilde{\omega}_{\nu\mu} dx^\nu \otimes dx^\mu) \\ &= \frac{\tilde{\omega}_{\mu\nu}}{2} (dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu) \\ &= \omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu . \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

We can generalise this example to any k-form.

$$\omega = \omega_{\mu\nu\dots\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \dots \wedge dx^\sigma , \quad (2.6.5)$$

The operation $\wedge : \Omega^k \times \Omega^l \rightarrow \Omega^{k+l}$, for $k+l \leq n$, is called **the wedge product** defined by

$$\omega \wedge \eta = \omega_{\mu_1\dots\mu_k} \eta_{\nu_1\dots\nu_l} (dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_k}) \wedge (dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_l}) . \quad (2.6.6)$$

The rank of forms is limited by dimension of manifold, the algebra of form defined by

$$\wedge^\bullet T^*M = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(T^*M) \quad (2.6.7)$$

is called the exterior algebra, which is a finite dimensional algebra with $\dim \wedge^\bullet T^*M = 2^n$. The highest, or the top form is n-form, written as follow

$$\omega_{1\dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n . \quad (2.6.8)$$

Note that for any orthonormal basis $\{E_1, \dots, E_n\}$ there is only one n-form, denoted by dV or Ω , such that $\Omega(E_1, \dots, E_n) = 1$. This is the “volume form” on a manifold.

แบบฝึกหัด 2.6.2 Show that, for a Riemannian manifold $\Omega_{1\dots n} = \sqrt{\det g_{ij}}$.

If we have a volume form, one can define integration on a coordinate chart as

$$\int_U \omega = \int_{\varphi(U)} \omega_{12\dots n} dV , \quad (2.6.9)$$

where dV is a volume in \mathbb{R}^n . To obtain the integral over a manifold, one needs to sum over all charts modulo the overlap area (use partition of unity).

2.6.1 exterior derivative and interior product

Let $\omega \in \Omega^k$, we define a map $d : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}$ on a local coordinate as follow

$$d\omega = \left(\frac{\partial}{\partial x^\rho} \omega_{\mu\nu\dots\sigma} \right) dx^\rho \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \dots \wedge dx^\sigma \quad (2.6.10)$$

แบบฝึกหัด 2.6.3 Show that d is dempotemp operator ,i.e. for any $\omega \in \Omega^k, d^2\omega = 0$.

One can also define a map that decrease the rank of p -form called the interior product. Let $V \in TM$, and $\omega \in \Omega^p(TM)$

$$i_V\omega(X_1, \dots, X_p) = \omega(V, X_1, \dots, X_p) . \quad (2.6.11)$$

This operator will play a part in Divergence theorem. Let consider a simple integral of a one-form df over a curve C connecting points p and q . We know that

$$\int_C df = f(q) - f(p) = \int_{\partial C} f .$$

We may think of this as an equality between pairing (similar to inner product) of one-form and a one-dimensional submanifold with the zero-form and the zero-dimensional submanifold i.e. $\langle df, C \rangle = \langle f, \partial C \rangle$. Actually, this fact is true for all p -form, we call this the Stoke's theorem.

ทฤษฎีบท 2.6.4 (Stoke's Theorem)

If $\omega \in \Omega^p(T^*M)$ and N is a $p + 1$ -dimensional submanifold, then

$$\langle d\omega, N \rangle = \langle \omega, \partial N \rangle \quad (2.6.12)$$

2.7 Riemannian curvature

The special feature of Riemannian manifold is that one can always find the distance between any two points. The distance is defined in the similar manner as in the Euclidean space i.e. integrate over the norm of the velocity vector.

2.7.1 Infinitesimal and Riemannian metric

In Euclidean space, the distance function between $p, q \in \mathbb{R}^n$ along a curve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ is

$$s(p, q) = \int_\gamma \sqrt{(dx^1(\gamma))^2 + \dots + (dx^n(\gamma))^2} = \int_0^1 dt \underbrace{\sqrt{(\dot{x}^1(t))^2 + \dots + (\dot{x}^n(t))^2}}_{\|\mathbf{v}\|} . \quad (2.7.1)$$

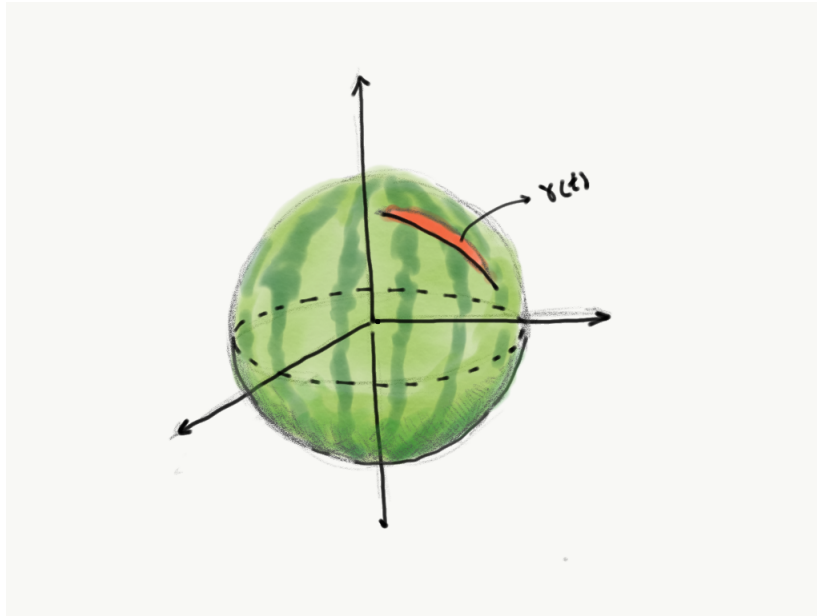
Consider the distance δs between p, q is sufficiently small such that $\|\mathbf{v}\|$ is constant, so that

$$\delta s^2 \sim \delta t^2 \left(\left(\frac{\delta x^1}{\delta t} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta x^n}{\delta t} \right)^2 \right) = (\delta x^1)^2 + \dots + (\delta x^n)^2 . \quad (2.7.2)$$

We call δs , or rather ds an infinitesimal. In a Riemannian manifold, the ds^2 is given by the local expression of a metric tensor

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (2.7.3)$$

Thus, for a given coordinate, if one knows the metric tensor on that manifold, then in principle one can calculate the distance between any two points on that manifold.



รูปที่ 2.6 surface of a watermelon

Suppose we denote the surface of a watermelon of radius R by $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. The fruit lives in the 3-dimensional space, or mathematically speaking, it is a subset of \mathbb{R}^3 . Hence, it inherits the infinitesimal distance from \mathbb{R}^3 i.e.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 . \quad (2.7.4)$$

Note that the coordinates x, y and z are on all independent on the sphere, i.e. $xdx + ydy + zdz = 0$, and therefore,

$$dz = -\frac{xdx + ydy}{(R^2 - x^2 - y^2)^{1/2}} . \quad (2.7.5)$$

Combining Eq. (2.7.4) and (2.7.5), the infinitesimal distance on the sphere reads

$$ds^2 = \left(\frac{R^2 - y^2}{R^2 - x^2 - y^2} \right) dx^2 + \left(\frac{2xy}{R^2 - x^2 - y^2} \right) dx dy + \left(\frac{R^2 - x^2}{R^2 - x^2 - y^2} \right) dy^2 . \quad (2.7.6)$$

Hence in this example the metric (in the matrix form) reads

$$g = \frac{1}{R^2 - x^2 - y^2} \begin{pmatrix} R^2 - y^2 & xy \\ xy & R^2 - x^2 \end{pmatrix} \quad (2.7.7)$$

แบบฝึกหัด 2.7.1 Show that if we let $x = R \sin \theta \cos \phi$, and $y = R \sin \theta \sin \phi$, then the metric will take a form

$$g = R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.7.8)$$

แบบฝึกหัด 2.7.2 Find the distance around the equator of S^2

2.7.2 Connection and curvature

The connection a way to define derivative for vector field. Why are we interested in finding derivative of vector field in the first place? Because we want to know acceleration of curves on manifold.

นิยาม 2.7.3 An affine (or linear) connection is a map $\nabla : TM \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ satisfying

- $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$, for $f, g \in C^\infty(M)$
- $\nabla_X(aZ_1 + bZ_2) = a\nabla_XZ_1 + b\nabla_XZ_2$, for $a, b \in \mathbb{R}$
- $\nabla_X(fZ) = f\nabla_XZ + (Xf)Z$, for $f \in C^\infty(M)$

Let $\{x^\mu\}$ be a coordinate basis at point $p \in M$. Since the range of ∇ is in $\Gamma(TM)$

$$\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \partial_\sigma, \quad (2.7.9)$$

where $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ is a smooth function called **Christoffel symbol**, and for a smooth vector field $V \in \Gamma(TM)$

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_\mu} V^\nu \partial_\nu &= (\partial_\mu V^\nu) \partial_\nu + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma V^\nu \partial_\sigma \\ &= (\partial_\mu V^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma V^\nu) \partial_\sigma. \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

Proposition 2.7.4 Every manifold admits an affine connection

A given connection on TM can be extended on tensor bundle $T_l^k M$ such that

- $\nabla_{\partial_\mu} \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \omega_\sigma$
- $\nabla_{\partial_\mu} T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\sigma_1 \dots \sigma_l} = \partial_\mu T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\sigma_1 \dots \sigma_l} + \sum_{i=1}^k \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu_i} T^{\nu_1 \dots \alpha \dots \nu_k}_{\sigma_1 \dots \sigma_l} - \sum_{i=1}^l \Gamma_{\mu\sigma_i}^\alpha T^{\nu_1 \dots \nu_k}_{\sigma_1 \dots \alpha \dots \sigma_l}$

Obviously the choice of connection is not unique on a Manifold; each choice of Christoffel symbol gives rise to different connection. However, In GR we are interested in a special type of connection called **Levi-Civita** connection.

ทฤษฎีบท 2.7.5 *Let (M, g) be a Riemannian (or pseudo-Riemannian) manifold. There exists unique affine connection that is **metric compatible** and **torsion free**.*

We call this connection the **Levi-Civita** connection. We shall now describe the meaning of the words metric compatible and torsion free. Metric compatibility is the generalisation of the property of derivative on Euclidean space which is compatible with the inner product i.e. for $V, W \in \mathbb{R}^n$

$$\partial_i(V \cdot W) = (\partial_i V) \cdot W + V \cdot (\partial_i W) , \quad (2.7.11)$$

so we require that the Levi-Civita connection to be compatible with the metric

$$\nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) , \quad (2.7.12)$$

for $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. A connection is torsion free if it satisfies a condition

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] . \quad (2.7.13)$$

The Christoffel symbol of the Levi-Civita connection can be written in terms of metric tensor as follow

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{g^{\sigma\alpha}}{2} (\partial_{\mu} g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu} g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}) . \quad (2.7.14)$$

Note that, for convenient, we will write $\nabla_{\partial_{\mu}} := \nabla_{\mu}$.

Exercise Show that (i) Eq. (2.7.12) and (ii) Eq. (2.7.13) lead to

$$(i). \quad \nabla_{\mu} g_{\alpha\beta} = 0$$

$$(ii). \quad \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} .$$

2.7.3 Curvature from acceleration

For mathematician, curvature is a local invariant that distinguishes one Riemannian manifold from another. However, physicists are more interested in the dynamics of objects moving in Riemannian manifold. To understand the notion of curvature, let us start with curves in 2-dimensional space. Suppose we have a circle of radius R and $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^1$, is a curve with unit velocity i.e. $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$, the curvature at a point $p = \gamma(t_0)$ is defined by $\kappa(t_0) = \|\ddot{\gamma}(t_0)\|$. From classical mechanics we know that

$$\|\ddot{\gamma}(t)\| = \frac{\|\dot{\gamma}\|^2}{R} = \frac{1}{R} . \quad (2.7.15)$$

For more general curves, the curvature can be computed by attaching a circle with appropriate radius to the curve. Note that in this case, the curvature is quite easy to calculate since the manifold (curve) is embedded inside the higher dimensional manifold (\mathbb{R}^2). However, one can obtain intrinsic (no embedding require) definition of curvature using the notion of **parallel transport**.

Parallel transport is the way to transport a vector along vector fields such that there is no acceleration. Let $Z \in \Gamma(TM)$ be a vector field, and $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ be a curve. A vector field is parallel transport along a curve γ if

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} Z = 0 , \quad (2.7.16)$$

In other words, the vector field is constant with respect to the velocity of the curve. In particular, we may consider the parallel transport of the velocity vector itself from p to $q \in M$. We may express the velocity in coordinate basis $\dot{\gamma} = (\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \nabla_{\dot{x}^\nu \partial_\nu} \dot{x}^\mu \partial_\mu \\ &= \dot{x}^\nu \nabla_\nu (\dot{x}^\mu \partial_\mu) = \dot{x}^\nu (\partial_\nu (\dot{x}^\mu) \partial_\mu + \dot{x}^\mu \Gamma_{\nu\mu}^\sigma \partial_\sigma) \\ &= (\ddot{x}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) \partial_\sigma . \end{aligned}$$

The equation

$$\ddot{x}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 , \quad (2.7.17)$$

is called the geodesic equation. Think of parallel transport in Euclidean space, the trajectory of the parallel transport vector is the straight line which is the shortest path between any two points. Likewise, the solution of of this equation is the shortest curve connecting p and q in a curve space. Since it is the shortest curve between two points, the geodesic can also be derived through the least action principle. Assuming that a mass m is moving freely on curved spacetime, the action is given by the proper time integral of the kinetic energy

$$S[g] = \int d\tau L(x, \dot{x}) = \int d\tau \frac{1}{2} m g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (2.7.18)$$

Let us ignore the factor $\frac{1}{2}m$ for simplicity, using the Euler-Lagrange equation

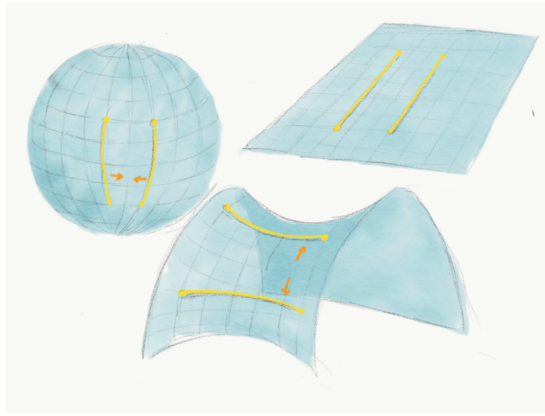
$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = \frac{d}{d\tau} 2g_{\mu\alpha} \dot{x}^\mu \\ &= 2g_{\mu\alpha} \ddot{x}^\mu + 2\partial_\nu g_{\mu\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu , \\ \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} &= \partial_\alpha g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \end{aligned} \quad (2.7.19)$$

So we have

$$\begin{aligned}
0 &= 2g_{\mu\alpha}\ddot{x}^\mu + 2\partial_\nu g_{\mu\alpha}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \\
&= \ddot{x}^\beta + \frac{g^{\alpha\beta}}{2}(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu})\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \\
&= \ddot{x}^\beta + \Gamma_{\mu\nu}^\beta\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu .
\end{aligned} \tag{2.7.20}$$

ตัวอย่าง 2.7.6 Find the geodesic equation on S^2 . Which curve is a geodesic?

Now from the idea of geodesic, let us try to understand the concept of curvature. As we mentioned before, the concept of curvature arises from the concept of acceleration. In the flat space all the geodesics are straight lines, and the two parallel lines do not accelerate toward each other. However, in curve space, two geodesic can accelerate toward/away from each other.



รูปที่ 2.7 geodesic deviation

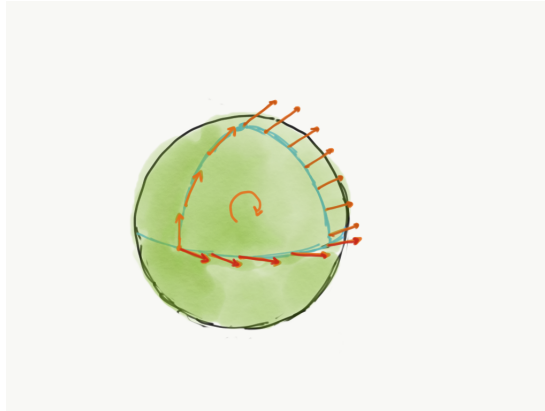
From this fact, we can define curvature by looking at the deviation of geodesic curve. Suppose we have two geodesic curves $\gamma_1(x(\tau))$ and $\gamma_2(\tilde{x}(\tau))$ sitting next to each other (note that, Since they are closed we can use the same local coordinates). The coordinate of γ_2 can be written as $\tilde{x}^\alpha(\tau) = x^\alpha(\tau) + y^\alpha(\tau)$, where y^α denote the separation between the two curves. Since γ_2 is a geodesic

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2(x^\alpha + y^\alpha)}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha(x + y)\frac{d(x^\beta + y^\beta)}{d\tau}\frac{d(x^\mu + y^\mu)}{d\tau} \\
&= \ddot{x}^\alpha + \ddot{y}^\alpha + (\Gamma_{\beta\mu}^\alpha(x) + \partial_\gamma \Gamma_{\beta\mu}^\alpha(x)y^\gamma)(\dot{x}^\beta\dot{x}^\mu + \dot{x}^\beta\dot{y}^\mu + \dot{y}^\beta\dot{x}^\mu + \dot{y}^\beta\dot{y}^\mu) \\
&= \ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha(x)\dot{x}^\beta\dot{x}^\mu + \ddot{y}^\alpha + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha(x)(\dot{x}^\beta\dot{y}^\mu + \dot{y}^\beta\dot{x}^\mu + \dot{y}^\beta\dot{y}^\mu) \\
&\quad + \partial_\gamma \Gamma_{\beta\mu}^\alpha(x)y^\gamma(\dot{x}^\beta\dot{x}^\mu + \dot{x}^\beta\dot{y}^\mu + \dot{y}^\beta\dot{x}^\mu + \dot{y}^\beta\dot{y}^\mu) \\
&= \ddot{y}^\alpha + 2\Gamma_{\beta\mu}^\alpha(x)\dot{x}^\beta\dot{y}^\mu + \partial_\gamma \Gamma_{\beta\mu}^\alpha(x)y^\gamma\dot{x}^\beta\dot{x}^\mu
\end{aligned} \tag{2.7.21}$$

The last line is obtained using the fact that $x^\alpha(\tau)$ is the coordinate of the geodesic curve, the first two terms vanish. We also assuming that y^α is small, so the second order terms can be ignored. Let us find the second derivative of deviation

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\tau^2}(y^\alpha \partial_\alpha) &= \frac{d}{d\tau} (\dot{y}^\alpha + \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \dot{x}^\nu y^\beta) \partial_\alpha \\
&= (\ddot{y}^\alpha + \partial_\delta \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \dot{x}^\delta \dot{x}^\nu y^\beta + \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \ddot{x}^\nu y^\beta + \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \dot{x}^\nu \dot{y}^\beta + \Gamma_{\beta\nu}^\delta \Gamma_{\delta\mu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu y^\beta + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{y}^\beta) \partial_\alpha \\
&= (-2\Gamma_{\beta\mu}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{y}^\mu - \partial_\gamma \Gamma_{\beta\mu}^\alpha y^\gamma \dot{x}^\beta \dot{x}^\mu + \partial_\delta \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \dot{x}^\delta \dot{x}^\nu y^\beta - \Gamma_{\beta\delta}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\delta \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu y^\beta \\
&\quad + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{y}^\beta + \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \dot{x}^\nu \dot{y}^\beta + \Gamma_{\beta\nu}^\delta \Gamma_{\delta\mu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu y^\beta) \partial_\alpha \\
&= (-\partial_\gamma \Gamma_{\beta\mu}^\alpha y^\gamma \dot{x}^\beta \dot{x}^\mu + \partial_\delta \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \dot{x}^\delta \dot{x}^\nu y^\beta - \Gamma_{\beta\delta}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\delta \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu y^\beta + \Gamma_{\beta\nu}^\delta \Gamma_{\delta\mu}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu y^\beta) \partial_\alpha \\
&= (-\partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha + \partial_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \Gamma_{\nu\delta}^\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\delta + \Gamma_{\mu\delta}^\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\delta) \dot{x}^\mu \dot{x}^\beta y^\nu \partial_\alpha \\
&= R_{\mu\nu\beta}{}^\alpha \dot{x}^\mu \dot{x}^\beta y^\nu \partial_\alpha
\end{aligned} \tag{2.7.22}$$

The quantity $R_{\mu\nu\beta}{}^\alpha$ is called the **Riemannian curvature tensor**.



รูปที่ 2.8 parallel transport on a sphere

แบบฝึกหัด 2.7.7 Show that $u^\nu \nabla_\nu y^\mu = y^\nu \nabla_\nu u^\mu$, where $u^\mu := \dot{x}^\mu$. Then show that the geodesic deviation equation can be written as

$$\frac{d^2}{d\tau^2}(y^\alpha \partial_\alpha) = u^\mu y^\nu [\nabla_\mu, \nabla_\nu](u^\beta \partial_\beta). \tag{2.7.23}$$

Alternatively, one can define curvature by parallel transport a vector in a close loop. if a vector Z_p is parallel transported along a closed curve back to its starting point, then one may obtain a new vector \tilde{Z}_p that is different from the original one. The infinitesimal difference between these vectors give rise to a linear map given by the curvature tensor. For $X, Y \in \Gamma(TM)$, the map $R(X, Y) : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ is a smooth linear map defined by

$$R(X, Y)Z := [\nabla_X, \nabla_Y]Z + \nabla_{[X, Y]}Z. \tag{2.7.24}$$

Suppose we choose X, Y to be basis vectors

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma Z^\rho \partial_\sigma &:= R(\partial_\mu, \partial_\nu)^\sigma Z^\rho \partial_\sigma \\
&= \nabla_\mu \nabla_\nu (Z^\rho \partial_\rho) - \nabla_\nu \nabla_\mu (Z^\rho \partial_\rho) + \nabla_{[\partial_\mu, \partial_\nu]} Z^\rho \partial_\rho \\
&= \nabla_\mu (\partial_\nu Z^\rho \partial_\rho + Z^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \partial_\sigma) - \nabla_\nu (\partial_\mu Z^\rho \partial_\rho + Z^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \partial_\sigma) \\
&= (\partial_\mu \partial_\nu Z^\rho) \partial_\rho + \partial_\nu Z^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \partial_\sigma + \partial_\mu Z^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \partial_\sigma \\
&\quad + Z^\rho (\partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma) \partial_\sigma + Z^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \partial_\alpha \\
&\quad - (\partial_\nu \partial_\mu Z^\rho) \partial_\rho - \partial_\mu Z^\rho \Gamma_{\nu\rho}^\sigma \partial_\sigma - \partial_\nu Z^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \partial_\sigma \\
&\quad - Z^\rho (\partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma) \partial_\sigma - Z^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \partial_\alpha \\
&= (\partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma + \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma \Gamma_{\mu\rho}^\alpha) Z^\rho \partial_\sigma, \tag{2.7.25}
\end{aligned}$$

so we have

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma + \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma \Gamma_{\mu\rho}^\alpha. \tag{2.7.26}$$

2.7.4 คุณสมบัติของเทนเซอร์ความโค้ง

Proposition 2.7.8 *The curvature tensor has the following properties*

- $R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma}$
- $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$
- $R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\nu\rho\mu\sigma} + R_{\rho\mu\nu\sigma} = 0$

The third property is called the algebraic Bianchi identity (or the first Bianchi identity). From curvature tensor, one can define Ricci tensor $R_{\mu\nu}$, and Ricci scalar (or scalar curvature) R as

$$R_{\mu\nu} := g^{\rho\sigma} R_{\mu\rho\nu\sigma}, \quad R := g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{2.7.27}$$

We will see shortly that these two quantities play a crucial role in Einstein equation.

Exercise Show that $R_{\mu\nu}$ is symmetric tensor.

Proposition 2.7.9 *(Differential Bianchi identity) the total derivative of curvature tensor satisfies the following property*

$$\nabla_\alpha R_{\mu\nu\rho\sigma} + \nabla_\rho R_{\mu\nu\sigma\alpha} + \nabla_\sigma R_{\mu\nu\alpha\rho} = 0. \tag{2.7.28}$$

From the above proposition, one can find a divergent free second rank tensor, which is the most important quantity in the Einstein equation, i.e. the **Einstein tensor**. Contract the differential Bianchi

identity with the metric one obtains

$$\begin{aligned}
 0 &= g^{\mu\sigma} g^{\alpha\nu} (\nabla_\alpha R_{\mu\nu\rho\sigma} + \nabla_\rho R_{\mu\nu\sigma\alpha} + \nabla_\sigma R_{\mu\nu\alpha\rho}) \\
 &= g^{\mu\sigma} (\nabla_\alpha R_{\rho\sigma\mu}{}^\alpha - \nabla_\rho R_{\mu\sigma} + \nabla_\sigma R_{\mu\rho}) \\
 &= 2\nabla_\alpha R_\rho{}^\alpha - \nabla_\rho R \\
 &= 2g_{\rho\beta} \nabla_\alpha (R^{\beta\alpha} - \frac{1}{2}g^{\beta\alpha} R), \tag{2.7.29}
 \end{aligned}$$

so we have that $G^{\mu\nu} := R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} R$ has a vanishing divergence.

Chapter 3

กาลอวกาศ และสสาร

So far we have restricted our view to Riemannian manifold, where the metric in the local coordinate resembles those of the n -dimensional Euclidean space, \mathbb{R}^n . In classical physics, we are familiar with Euclidean space, where there is no speed limit. However, in relativity everything must respect the following rules

- The speed of light is the same to all observer (So no observer can move faster than light)
- The law of physics is the same in all inertia alreference frame

The first assumption is actually the new result (at that time) from the experiment by Morley and Michelson that starts the revolution in the theory of relativity. The second assumption is called **principle of relativity**, which exists long before the time of Einstein. It was first described by Galileo

“Shut yourself up with some friend in the main cabin below decks on some large ship, and have with you there some flies, butterflies, and other small flying animals. Have a large bowl of water with some fish in it; hang up a bottle that empties drop by drop into a wide vessel beneath it. With the ship standing still, observe carefully how the little animals fly with equal speed to all sides of the cabin. The fish swim indifferently in all directions; the drops fall into the vessel beneath; and, in throwing something to your friend, you need throw it no more strongly in one direction than another, the distances being equal; jumping with your feet together, you pass equal spaces in every direction. When you have observed all these things carefully (though there is no doubt that when the ship is standing still everything must happen in this way), have the ship proceed with any speed you like, so long as the motion is uniform and not fluctuating this way and that. You will discover not the least change in all the effects named, nor could you tell from any of them whether the ship was moving or standing still. In jumping, you will pass on the floor the same spaces as before, nor will you make larger jumps toward the stern than toward the prow even though the ship is moving quite rapidly, despite the fact that during the time that

you are in the air the floor under you will be going in a direction opposite to your jump. In throwing something to your companion, you will need no more force to get it to him whether he is in the direction of the bow or the stern, with yourself situated opposite. The droplets will fall as before into the vessel beneath without dropping toward the stern, although while the drops are in the air the ship runs many spans. The fish in their water will swim toward the front of their bowl with no more effort than toward the back, and will go with equal ease to bait placed anywhere around the edges of the bowl. Finally the butterflies and flies will continue their flights indifferently toward every side, nor will it ever happen that they are concentrated toward the stern, as if tired out from keeping up with the course of the ship, from which they will have been separated during long intervals by keeping themselves in the air..." However, Einstein did add a new feature to the principle of relativity; The inertia frame is now in 4-dimensional spacetime. We define the concept of spacetime, which is the setup of special relativity, using Minkowski space.

3.1 Spacetime

The infinitesimal distance in the Minkowski space is given by

$$\begin{aligned} ds^2 &= (cdt)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

where

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

So one notices that the distance only makes sense on/inside the light cone. The inertia frame are all related by Lorentz transformation. The transformation between the two inertia frames with relative velocity v in the x-axis is given by

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (3.1.2)$$

where $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ and $\beta = v/c$. It is not difficult to show that

$$\gamma^2 - (\gamma\beta)^2 = 1. \quad (3.1.3)$$

From Eq. (3.1.3), one can parametrise $\gamma = \cosh^2 \varphi$ and $\gamma\beta = \sinh^2 \varphi = 1$.

แบบฝึกหัด 3.1.1 What is the Lorentz transformation for the inertia frame with relative velocity v in y and z -axes.

แบบฝึกหัด 3.1.2 Show that, under Lorentz transformation (3.1.2), the infinitesimal ds^2 is unchanged.

Since we suddenly live in the four-dimensional spacetime, there are some important physical quantity we should mention in order to describe things around us. Let us try to define 4-velocity explicitly based on the definition of velocity mentioned in the previous chapter. suppose τ is the time in the same frame as the observer. Define the proper time to be the time in the coordinate $(\tau, 0, 0, 0)$, then we can write

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\tau \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma\tau \\ c\gamma\beta\tau \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

This defines a curve $\sigma(\tau) = (ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$, then one gets

$$u := \dot{\sigma}(\tau) = \gamma(c, v, 0, 0) .$$

In general we have $u = \gamma(c, \mathbf{v})$, where \mathbf{v} is the 3-velocity. We then define momentum to be $p = (p^0, \mathbf{p}) = (E/c, \mathbf{p})$, where E is the energy of the particle. For massive particle one can define $p = m\gamma(c, \mathbf{u})$... the norm of 4-momentum is given by

$$p_\mu p^\mu = \eta_{\mu\nu} p^\nu p^\mu = m^2 \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = m^2 \gamma^2 (c^2 - v^2) = (mc)^2$$

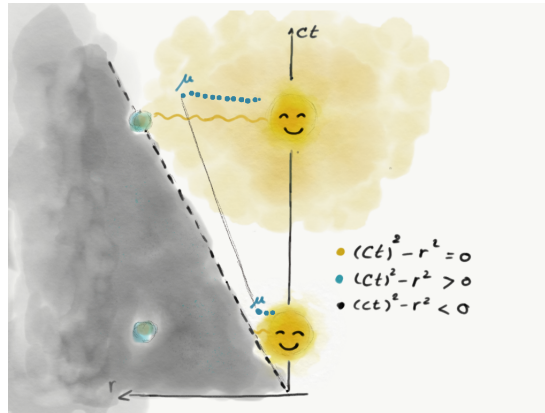
Using the definition of p we also have $p_\mu p^\mu = E^2/c^2 - p^2$, so as the result we obtain the energy-momentum dispersion relation

$$E^2 = (\mathbf{p}c)^2 + (mc^2)^2 . \quad (3.1.4)$$

Special relativity is well-defined within the frame work of Minkowski space, but this setup is still not enough for general relativity. For general relativity, we still want the spacetime to locally obey special relativity. Hence, in what follow, we choose Lorentzian geometry, which is similar to Riemannian geometry in the previous section, but it is locally Minkowski instead of locally Euclidean. Note that, the relations we have derived in the previous section are still valid. To simplify the calculation, we from this point on we will set $c = 1$.

3.2 Energy-momentum tensor and Einstein equation

Einstein equation is the equation that describes how mass and energy distort the curvature (which leads to acceleration) of spacetime. We define the energy density in the spacetime using an energy-momentum



รูปที่ 3.1 Minkowski space as spacetime: photon and muon from the sun moving toward the Earth. The position of the photon is always on the surface of the light cone while the muon stay within the light cone.

tensor $T^{\mu\nu}$, which is a symmetric tensor defined by

- T^{00} energy density ρ
- T^{0i} energy flux through surface normal to x^i
- T^{ij} momentum flux in direction of x^i through surface normal to x^j

Let us look at an example of energy momentum tensor

ตัวอย่าง 3.2.1 Energy-momentum tensor

- Electromagnetic field

$$T^{\mu\nu} = F^\mu_\alpha F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad (3.2.1)$$

where $F_{\mu\nu}$ is the field strength tensor.

- Perfect fluid (which will be important when we start doing cosmology.) In the rest frame

$$T = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \quad (3.2.2)$$

Under the Lorentz boost, i.e. the observer is moving with relative velocity v to the fluid, we have

$$\begin{aligned}
T' &= \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma^2\rho + (\gamma\beta)^2P & -\gamma^2\beta(\rho + P) & 0 & 0 \\ -\gamma^2\beta(\rho + P) & (\gamma\beta)^2\rho + \gamma^2P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma^2\rho + [(\gamma\beta)^2 + 1]P & -\gamma^2\beta(\rho + P) & 0 & 0 \\ -\gamma^2\beta(\rho + P) & (\gamma\beta)^2\rho + (\gamma^2 - 1)P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma^2(\rho + P) & -\gamma^2\beta(\rho + P) & 0 & 0 \\ -\gamma^2\beta(\rho + P) & (\gamma\beta)^2(\rho + P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \\
&= (\rho + P)u \otimes u - P\eta .
\end{aligned}$$

Note that, we use relation (3.1.3) in the calculation above. In the component form, one can write the perfect fluid energy-momentum tensor as

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu - P\eta^{\mu\nu} , \quad (3.2.3)$$

where ρ is energy density, P is pressure and u is a normalised timelike 4-velocity i.e. $u^2 = 1$.

One can check that the two energy momentum tensors are divergence free (given that the matter fields obey their equation of motion.) Since Einstein tensor and energy momentum tensor are both divergence free, we can put

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} , \quad (3.2.4)$$

where κ is some (dimensionful) constant. The value of κ can be determined when consider Newtonian limit i.e. $\kappa = 8\pi G$.

3.2.1 Einstein Hilbert action

There is an alternative way of deriving Einstein equation using an action functional (the map from the vector space of function to real number). The action is called **Einstein-Hilbert** action

$$S = \int_M dx^4 \sqrt{-g} \left(\frac{1}{\kappa} R + \mathcal{L}_m \right). \quad (3.2.5)$$

Vary Eq. (3.2.5) with respect to the metric

$$0 = \delta S = \int_M dx^4 \left[\delta \sqrt{-g} \left(\frac{1}{\kappa} R + \mathcal{L}_m \right) + \sqrt{-g} \left(\frac{1}{\kappa} \delta R + \delta \mathcal{L}_m \right) \right]. \quad (3.2.6)$$

To find the expression of $\delta \sqrt{-g}$ in terms of $\delta g^{\mu\nu}$, let us consider a symmetric matrix M (so that it is diagonalisable), and let $C^{-1}MC = D = \text{diag}(D_{11}, D_{22}, \dots, D_{nn})$. Suppose t is a very small parameter such that we can ignore $t^n, n \geq 2$

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{1} + tM) &= \det(CC^{-1} + tCDC^{-1}) \\ &= \det(\mathbb{1} + tD) \\ &= (1 + tD_{11})(1 + tD_{22}) \dots (1 + tD_{nn}) \\ &= 1 + t \sum_{i=1}^n D_{ii} + t^2 \sum_{i \neq j}^n D_{ii} D_{jj} + \dots \\ &\approx 1 + \text{tr}(tD) = 1 + \text{tr}(tM). \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Hence for determinant of the metric

$$\begin{aligned} \delta g &= \det(g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) - g \\ &= g[\det(g^{\alpha\mu}) \det(g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}) - 1] \\ &= g[\det(\delta_\nu^\alpha + g^{\alpha\mu} \delta g_{\mu\nu}) - 1] \\ &\approx g \text{tr}(g^{\alpha\mu} \delta g_{\mu\nu}) \\ &= g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Put this back in Eq. (3.2.6) we obtain

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M dx^4 \left[-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{\kappa} R + \mathcal{L}_m \right) + \sqrt{-g} \left(\frac{1}{\kappa} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \delta \mathcal{L}_m \right) \right] \\ &= \int_M dx^4 \sqrt{-g} \left[\frac{1}{\kappa} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} + \left(\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m \right) \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Notice that if we define

$$T^{\mu\nu} = -\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{L}_m, \quad (3.2.10)$$

and $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ somehow vanishes then we will obtain Einstein equation. Let us consider $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} (\partial_\alpha\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \partial_\mu\delta\Gamma_{\alpha\nu}^\alpha + \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha\Gamma_{\mu\nu}^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha\delta\Gamma_{\mu\nu}^\beta \\ &\quad - \delta\Gamma_{\mu\beta}^\alpha\Gamma_{\alpha\nu}^\beta - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha\delta\Gamma_{\alpha\nu}^\beta) \\ &= g^{\mu\nu} (\partial_\alpha\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha\delta\Gamma_{\alpha\nu}^\beta - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta\delta\Gamma_{\mu\beta}^\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha\delta\Gamma_{\mu\nu}^\beta \\ &\quad - \partial_\mu\delta\Gamma_{\alpha\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha}^\beta\delta\Gamma_{\beta\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\beta\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta\delta\Gamma_{\beta\nu}^\alpha) \\ &= (\nabla_\alpha g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \nabla_\mu g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\alpha\nu}^\alpha), \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

which is the boundary term, therefore, using divergence theorem, the integral of (3.2.11) vanishes. Hence, we obtain Einstein equation.

Chapter 4

Cosmology

The most accepted model of our universe is Λ CDM which is based on the theory of general relativity. The metric used for describing the universe is one of the exact solutions of Einstein equation. The model includes three different kinds of energy density in our universe i.e. cosmological constant, cold dark matter, and normal matter, which we will explore in detail later on. For the time being, let us focus on the curvature side of the Einstein equation. Since no one knows the general solution of Einstein equation, the exact solutions are obtained by imposing some symmetry requirement that reduce the difficulty of the equation.

4.1 Cosmological Principle

Cosmological principle states that the universe is spatially homogeneous and isotropic or one can say that it looks the same (invariant) under translation and rotation. This is a kind of symmetry assumption. We also use the term “maximally symmetric space” for the homogeneous and isotropic space. The useful fact about maximally symmetric space is that the Ricci tensor take the form

$$R_{ij} = -2kh_{ij} , \quad (4.1.1)$$

where k is a constant.

แบบฝึกหัด 4.1.1 Show that the Ricci tensor of S^2 satisfies (4.1.1). What is the value of k ?

Assuming that the universe is the collection of 3-dimensional sheets i.e. $M = \mathbb{R} \times \Sigma$, where Σ is maximally symmetric. Since the universe is not static, one multiple the 3-dimensional metric with a function of time. In addition, being maximally symmetric automatically means spherical symmetric, therefore, the metric

can be written as

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - a^2(t)h_{ij}dx^i dx^j \\ &= dt^2 - a^2(t) (f(r)^2 dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) . \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Substitute spatial metric of (4.1.2) into (4.1.1) for R_{rr} and $R_{\theta\theta}$ one will obtain

$$\frac{2}{r} \frac{f'}{f} = 2k f^2 \quad (4.1.3)$$

$$r \frac{f'}{f^3} - \frac{1}{f^2} + 1 = 2kr^2, \quad (4.1.4)$$

which yield

$$f(r) = \frac{1}{1 - kr^2}. \quad (4.1.5)$$

The result is what so call the Friedmann-Lemaître-Robson-Walker metric or FLRW metric.

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right) \quad (4.1.6)$$

แบบฝึกหัด 4.1.2 Show that $f(r) = 1/(1 - kr^2)$.

It might seem unreasonable why we should concern about homogeneous isotropic spacetime while distribution of our neighbouring galaxies and stars do not look so uniform. The problem lies within the scale we observed the universe, which we will discuss in the next subsection.

4.1.1 The Friedmann equations

As we assuming that the universe is homogeneous and isotropic, matters that existed in the universe should possess the same properties. In our everyday life scale, matters do not appear to be uniformly distributed, but things look different in the cosmic scale. For example, each grain of sand in Fig. 4.1a looks very different, but one can see no different as we zoom out in Fig. 4.1b. In cosmology, we study the property of spacetime on a very very ... large scale, therefore, cosmologists treat all the matters in our universe as fluid, or more specifically, perfect fluid: owing the small interaction between most galaxies. In addition, It is reasonable to think that we are under the “flow” of the matter in the universe. So we choose co-moving frame, which means that the relative velocity between the observer and the fluid is zero i.e. $u = (1, 0, 0, 0)$.

Now let us put everything we have into the Einstein equation. It is not difficult (but tedious) to show that

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -3 \frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{ii} &= -\frac{g_{ii}}{a^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \end{aligned}$$



(a) Grains of sand [sandgrains.com]

(b) Sand [dreamstime.com]

รูปที่ 4.1 Closer look at grains of sand (a) every single grain is different, while they all look pretty much the same as we zoom out (b).

แบบฝึกหัด 4.1.3 Show that $R_{\alpha\beta} = 0$ for $\alpha \neq \beta$ and $R = -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right)$

Consider component tt . On the LHS of Einstein equation we have

$$\begin{aligned} R_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}R &= -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right) \\ &= 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 3\frac{k}{a^2}, \end{aligned}$$

and for RHS

$$8\pi G((\rho + P)u_t u_t - P g_{tt}) = 8\pi G\rho.$$

Hence, we partially obtain the Friedmann equation

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (4.1.7)$$

Now consider component ii we have

$$\begin{aligned} R_{ii} - \frac{1}{2}g_{ii}R &= -\frac{g_{ii}}{a^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) + 3g_{ii} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right) \\ &= g_{ii} \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right) \\ &= g_{ii} \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{8\pi G}{3}\rho \right), \end{aligned}$$

and

$$8\pi G T_{ii} = -8\pi G g_{ii} P,$$

So we obtain

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \quad (4.1.8)$$

Eq. (4.1.7) and (4.1.8) are called Friedmann equations. These two equations are what we use to understand the evolution of scale factor under the influence of matter. Alternatively, one might use continuity equation, which can be obtained either from the Friedmann equations or the conservation of energy momentum tensor i.e.

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu [(\rho + P)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}P] \\ &= \partial_\mu(\rho + P)u^\mu u^\nu + (\rho + P)(\nabla_\mu u^\mu u^\nu + u^\mu \nabla_\mu u^\nu) - g^{\mu\nu} \partial_\mu P \\ &= u^\nu u^\mu \partial_\mu \rho + u^\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\mu (\rho + P) + [u^\nu u^\mu \partial_\mu P + (\rho + P)u^\mu \nabla_\mu u^\nu - g^{\mu\nu}P] . \end{aligned}$$

Note that $u = (1, 0, 0, 0)$ and $u^2 = 1$, if we multiply the above equation with u_ν , then the terms in squared bracket would vanish, and then we have

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) (\rho + P) = 0 \quad (4.1.9)$$

4.1.2 What kind of fluid?

Since we use perfect fluid to represent all kind of matters In the universe, different kind of fluid would have different relation between their energy density and the pressure they exert on environment. In thermodynamics, we know that perfect gas satisfies equation of state

$$P = \frac{n}{V} RT \sim \frac{n}{V} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) , \quad (4.1.10)$$

where v is the thermal speed of the gas. It is easy to see that $\rho = nm/V$, so we can rewrite the equation of state as

$$P = w\rho . \quad (4.1.11)$$

Put (4.1.11) back in to the continuity equation

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)} \quad (4.1.12)$$

Now we shall discuss different kind of matters that give different contribution to the evolution Λ CDM universe

- Non-relativistic matter $w = 0$:

The thermal velocity $v \ll c = 1$, so it is safe to set $w = 0$. Hence,

$$\rho = \rho_{0,m} a^{-3} \quad (4.1.13)$$

Assuming that $k = 0$, Eq. (4.1.7) gives

$$a = (6\pi G \rho_{0,m})^{1/3} t^{2/3} . \quad (4.1.14)$$

- Relativistic matter $w = 1/3$:

One might have heard the term radiation pressure from electrodynamics or statistical mechanics. In the early state, all kind of particles are relativistic, so the universe is under the radiation pressure. Assuming $k = 0$, one obtains

$$\rho = \rho_{0,r} a^{-4} , \quad (4.1.15)$$

and

$$a = \left(\frac{32\pi G \rho_{0,r}}{3} \right)^{1/4} t^{1/2} \quad (4.1.16)$$

- Cold dark matter $w = 0$?:

The true equation of state is still unknown, but we assume that it behaves like the non-relativistic matter.

- Cosmological constant $w = -1$:

For $w = -1$, one get $\rho = \text{constant}$, which we may call Λ . Substitute this back into Eq. (4.1.8) yields

$$\ddot{a} - \frac{8\pi G \Lambda}{3} a = 0 , \quad (4.1.17)$$

which gives a general solution

$$a(t) = c_1 e^{\sqrt{8\pi G \Lambda/3} t} + c_2 e^{-\sqrt{8\pi G \Lambda/3} t} . \quad (4.1.18)$$

Since the scale factor is smaller in the past, we set $c_2 = 0$. So for matter with $w = -1$, we obtain exponential expansion. It is also called **dark energy**.

4.2 Cosmic Inflation

The need of inflation came from the following problems

- **Flatness problem:** Why our universe is very close to be spatially flat.
- **Horizon problem:** Why CMB photons have the same temperature even though some of them are not causally connected.
- **Monopole problem:** There should be a relic from symmetry breaking.

The easiest inflationary scenario is the scalar field inflation.

$$S[\phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right) \quad (4.2.1)$$

Using variational principle on field variable, we have the equation of motion

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \partial_\alpha \phi + \partial_\phi V(\phi) = 0 . \quad (4.2.2)$$

Since we assume homogeneity, $\partial_\mu \phi = 0$, hence

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \partial_\phi V = 0 . \quad (4.2.3)$$

Notice that, the scalar field couple with the scale factor. The term \dot{a}/a behaves like a damping coefficient.

To get the energy density, one may use the variational principle to find the energy momentum tensor

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right) , \quad (4.2.4)$$

then compare this energy momentum tensor to those of perfect fluid

$$\rho = T_{tt} = \dot{\phi}^2 - \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) . \quad (4.2.5)$$

Alternatively, one can use the Legendre transformation to get Hamiltonian from above Lagrangian. Next we calculate the pressure given by the scalar field

$$\begin{aligned} 3P = T_i^i &= g^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi - \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) = \frac{3}{2} \dot{\phi}^2 - 3V(\phi) , \\ \Rightarrow P &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) . \end{aligned}$$

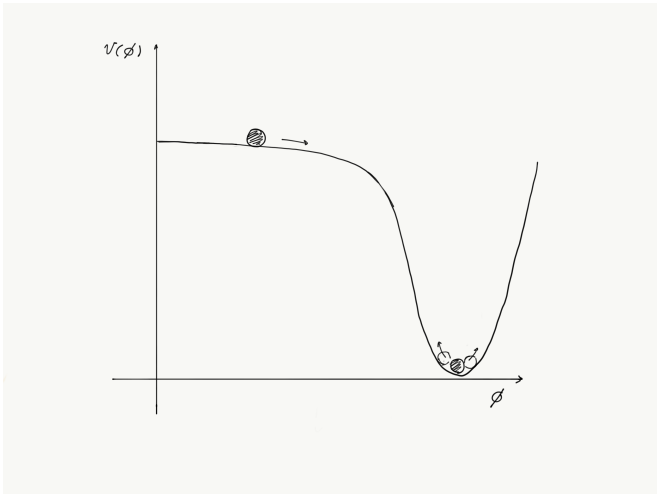
From the equation of state we have

$$w = \frac{P}{\rho} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (4.2.6)$$

To get inflation from scalar field, one choose the potential V to be very flat, so we can neglect the second derivative $\ddot{\phi} = 0$. The equation of motion implies that

$$\dot{\phi} = -\frac{1}{3} \frac{a}{\dot{a}} \partial_\phi V \sim 0 . \quad (4.2.7)$$

Hence, we have $w = -1$. The duration of slow-roll is correspond to the duration of inflation. But as the field rolls faster inflation stop



รูปที่ 4.2 potential of scalar field

Chapter 5

การกระเพื่อมของสนามโน้มถ่วง (Gravitational Perturbation)



รูปที่ 5.1 *water ripples*

ในบทนี้เราจะพูดถึงเรื่องการกระเพื่อมของกาล-อวกาศ และจะพิจารณากรณีที่การกระเพื่อมมีขนาดเล็กมาก ๆ เมื่อเทียบกับกาล-อวกาศพื้นหลัง ตัวอย่างที่พอจะเทียบเคียงได้ในชีวิตประจำวันก็อาจจะเป็นการกระเพื่อมของน้ำในสระ การกระเพื่อมที่
ว่านี้สามารถเดินทางจากแหล่งกำเนิด (จุดไหนสักจุดในสระ อาจเกิดจากมีคนตกในน้ำ หรือนกขี้อลงในสระก็แล้วแต่) มาถึง
ผู้สังเกตที่นั่นอยู่ที่ขอบสระด้วยความเร็วค่าหนึ่ง ถ้าพูดในเชิงคณิตศาสตร์ เราอาจจะบอกว่าการกระเพื่อมที่ว่าสามารถเขียนได้
ในรูปของการเปลี่ยนแปลงน้อย ๆ ของเมตริกเทนเซอร์

5.1 สมการไอน์สไตน์แบบเชิงเส้น

เรานิยามการกระเพื่อมของเมตริกได้ง่าย ๆ ดังนี้

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (5.1.1)$$

โดยสมมติว่าค่า $h_{\mu\nu}$ มีค่าน้อยมาก ๆ เมื่อเราหาเทนเซอร์ริชชี และสเกลาริชชีโดยใช้เมตริกนี้ก็จะได้

แบบฝึกหัด 5.1.1 จงหาเทนเซอร์ริชชี และสเกลาริชชี โดยใช้เมตริกด้านบน

และ เมื่อทำแบบฝึกหัดเสร็จแล้ว เราจะได้ว่าผลดังนี้ (ถ้าไม่ได้ตั้งนี่ก็เป็นไปได้ว่าผิด)

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma_\nu + \partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma_\mu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}) + O(h^2), \\ R &= \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h + O(h^2), \end{aligned}$$

โดยที่เรานิยามว่า $h := h^\sigma_\sigma$ และ $\square := \partial^\sigma \partial_\sigma$ Since we assume that the perturbation is very small, we shall ignore the second order terms. If this fluctuation occurs in vacuum, Einstein equation tell us that

$$0 = G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma_\nu + \partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma_\mu - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \square h) \quad (5.1.2)$$

Note that curvature tensor is unchanged under coordinate transformation ... Since we are interested in small perturbation, let us consider the transformation that keep the perturbation small, which of the form

$$h_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} = h_{\mu\nu} + 2\varepsilon \partial_{(\mu} \xi_{\nu)} \quad (5.1.3)$$

Put $h_{\mu\nu}^{(\varepsilon)}$ back into (5.1.2), one finds that

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} &= \varepsilon (\partial^\alpha \partial_\mu \partial_{(\alpha} \xi_{\nu)} + \partial^\alpha \partial_\nu \partial_{(\alpha} \xi_{\mu)} - 2\partial_\mu \partial_\nu \partial_\alpha \xi^\alpha - \square \partial_{(\mu} \xi_{\nu)}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

The transformation of the form (5.1.3) would not change the physics of linearised Einstein equation, i.e. there is a gauge symmetry in this theory. freedom to choose appropriate gauge we choose transverse gauge $\partial_\mu h^\mu_\nu = 0$, and redefine $\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}h$, the linearised Einstein equation (5.1.2) becomes

$$\square \tilde{h}_{\mu\nu} = 0, \quad (5.1.4)$$

which mean the perturbation $\tilde{h}_{\mu\nu}$ satisfies wave equation and propagate with speed of light. WLOG we will drop the tilde. ...

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\mu x^\mu} \quad (5.1.5)$$

5.2 เอกสารอ้างอิง

Bibliography