Vectors and Tensors on Manifolds 2

ราชภัฏ นครจินดา

The Institute for Fundamental study (IF), Naresuan University

July 12, 2022: 13.15–14.30 น.

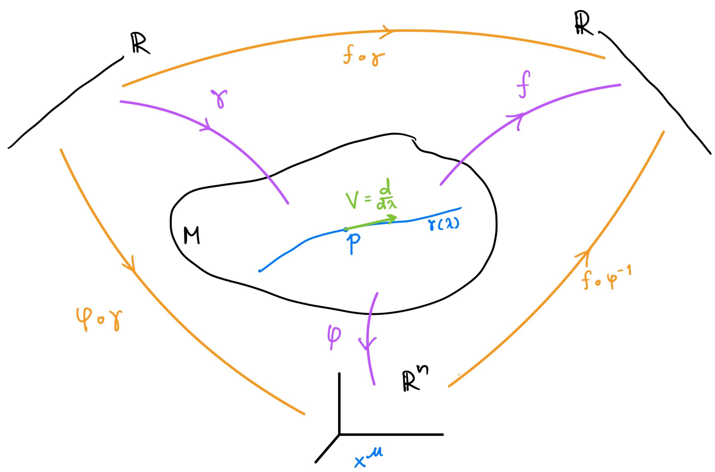
4th Thailand School on High-Energy and Astro-Physics (SHEAP 2022): Gravitational wave

---

Contents

1 เกริ่นนำ

เพื่อให้ทราบถึงกระบวนการทางคณิตศาสตร์บน manifold เรามาพิจารณา vector บน manifold n มิติ M อีกครั้ง โดยจะเลือกตัวอย่างที่สำคัญแบบหนึ่งคือ tangent vector $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ ที่สัมผัสกับ curve γ ซึ่งใช้ parameter λ ในการบรรยาย curve นั้น กำหนดให้ curve $\gamma(\lambda)$ เป็น map จากจำนวนจริงไปยัง manifold $\gamma : \mathbb{R} \to M$ โดยที่ $\lambda \in \mathbb{R}$ เนื่องจาก tangent vector เป็น operator แบบหนึ่ง เราสามารถให้มันกระทำบน test function f ที่เป็น map จาก manifold ไปยังจำนวนจริง $f : M \to \mathbb{R}$ แล้วเลือกพิจารณาใน coordinate chart $\varphi : M \to \mathbb{R}^n$ ดังแสดงในรูปที่ 1



รูปที่ 1: Tangent vector ที่สัมผัสกับ curve $\gamma(\lambda)$ บน manifold M

พิจารณา derivative ของ map f เทียบกับ parameter λ ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}f(\gamma) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(f\circ\gamma) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\Big[\big(f\circ\varphi^{-1}\big)\circ\big(\varphi\circ\gamma\big)\Big] \\ &= \frac{\mathrm{d}\big(\varphi\circ\gamma\big)^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial\big(f\circ\varphi^{-1}\big)}{\partial\big(\varphi\circ\gamma\big)^{\mu}} \\ &\equiv \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial f(x)}{\partial x^{\mu}} = \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda}\partial_{\mu}f \end{aligned} \tag{1}$$

ถึงแม้ว่าสมการข้างบนนั้นมีลักษณะเหมือนการทำ chain rule หลายตัวแปร แต่จริงๆแล้วกระบวนการต่างๆ จะต้องกระทำผ่าน coordinate chart เสมอ และเนื่องจากการกระทำดังกล่าวเป็นจริงสำหรับทุกๆ function f ทำให้เราสามารถเขียน tangent vector ในรูปของ component และ basis ได้เป็น

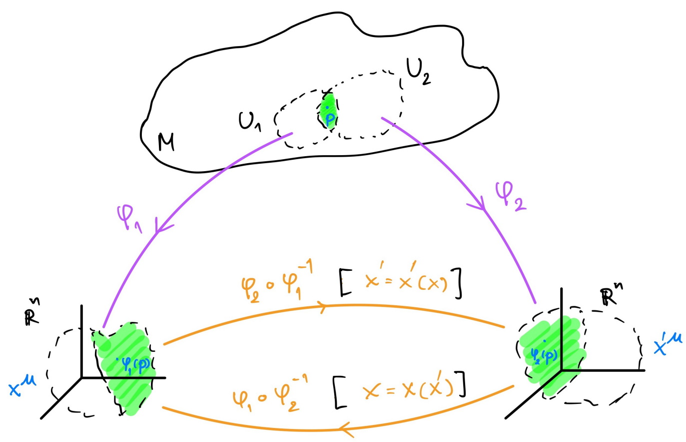
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda}\partial_{\mu} \tag{2}$$

สังเกตได้ว่าตัวอย่างที่เราพิจารณานี้ เราเลือกบรรยายด้วย coordinate เดียว ต่อไปจะพิจารณากรณีหลาย coordinate เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่าง coordinate เหล่านั้น

2 Coordinate transformation

จากที่ได้กล่าวทิ้งท้ายในหัวข้อที่แล้วว่า เราสนใจที่ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง coordinate โดยเริ่มจากการพิจารณาจุด p ใดๆบน manifold n มิติ M โดยที่จุด p นี้อยู่ในพื้นที่ซ้อนทับระหว่าง open sets U_1 และ U_2 ซึ่งมี coordinate charts ของตัวเองเป็น $\varphi_1 : M \to \mathbb{R}^n$ และ $\varphi_2 : M \to \mathbb{R}^n$ ตามลำดับ

เห็นได้ว่าเราสามารถเชื่อมระหว่าง coordinate 2 แบบนี้ได้ เมื่อเลือกให้ coordinate ที่ใช้บรรยายใน Euclidean space เป็น x^μ และ x'^μ ดังรูปที่ 2 ดังนั้น transition function $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ สอดคล้องกับความสัมพันธ์ $x' = x'(x)$ ในขณะที่ $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ สอดคล้องกับความสัมพันธ์ $x = x(x')$ ซึ่งเรียกว่า coordinate transformation ในฟิสิกส์นั่นเอง



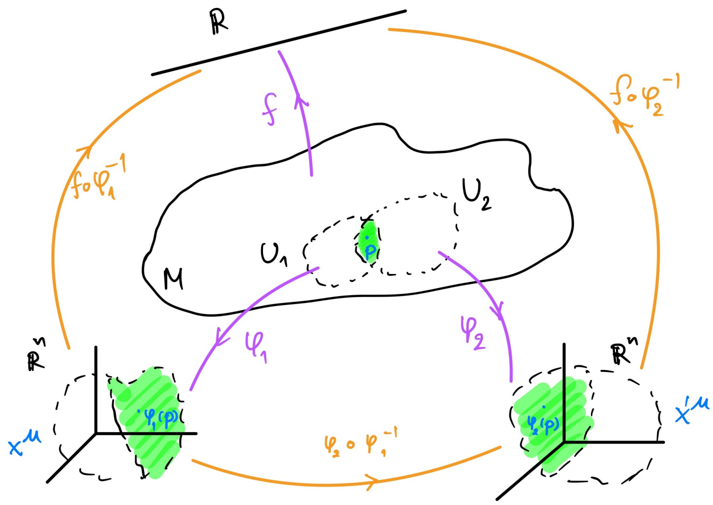
รูปที่ 2: จุดบน manifold ที่บรรยายด้วย coordinate 2 แบบ

<u>Transformation law ของ vector</u>

เริ่มจากการศึกษา transformation ของ basis ของ vector ∂_μ เราสามารถเลือกให้กระทำบน test function เหมือนกับที่เคยทำมาก่อนหน้านี้ ต่อมาพิจารณา partial derivative ของ function f เทียบกับ

coordinate x^μ ซึ่ง map ต่างๆ บน manifold ที่เกี่ยวข้องกับการพิจารณาครั้งนี้ได้แสดงในรูป 3

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(f\circ\varphi_1^{-1}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big[\left(f\circ\varphi_2^{-1}\right)\circ\left(\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}\right)\Big] \\
&= \frac{\partial\left(f\circ\varphi_2^{-1}\right)^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial\left(f\circ\varphi_2^{-1}\right)}{\partial\left(f\circ\varphi_2^{-1}\right)^\nu} \\
&\equiv \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial f(x')}{\partial x'^\nu} \qquad (3)
\end{aligned}$$



รูปที่ 3: Map ต่างๆ ที่ใช้พิจารณา transformation ของปริมาณใดๆ บน manifold

หรืออาจเขียนในรูปที่เป็น operator ได้ว่า

$$\partial_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} \equiv \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\partial'_\nu \qquad (4)$$

และยังสามารถจัดรูปได้เป็น

$$\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu \qquad (5)$$

โดยที่ $\partial x'^\mu/\partial x^\nu$ เป็น transformation matrix ที่มีมิติ $n\times n$ และมี inverse เป็น $\partial x^\nu/\partial x'^\mu$ สอดคล้องกับคุณสมบัติ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu \qquad (6) \\
\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x'^\nu} = \delta^\mu_\nu \qquad (7)
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถหา transformation law ของ component ของ tangent vector $\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\lambda$ ได้เป็น

$$\frac{\mathrm{d}x'^\mu}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \tag{8}$$

ซึ่งทำให้ทั่วไปสำหรับ vector ใดๆ $V = V^\mu \partial_\mu$ คือ

$$V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu(x) \tag{9}$$

เรียก transformation ดังกล่าวว่า general coordinate transformation (GCT) ซึ่งมันทั่วไปมากๆ หน้าตาของ $x' = x'(x)$ ไม่จำเป็นต้องเป็น linear function เหมือนกับของกรณีของ Lorentz transformation ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า Lorentz transformation เป็นกรณีเฉพาะของ GCT เน้นอีกครั้งว่า ถึงแม้หน้าตาของ transformation law ในสมการ (5) และ (9) จะเหมือนกันกับการทำ chain rule แต่จริงๆ แล้วเราต้องกระทำตามกระบวนการดังที่กล่าวไปแล้วจึงจะถูกต้อง นอกจากนี้ยังพบว่า เมื่อเราพิจารณา transformation law ของทั้ง vector ไม่แปรเปลี่ยน (invariant) ภายใต้ GCT $V'(x') = V(x)$ เนื่องจากการใช้ coordinate พิจารณา vector หรือ geometrical object บน manifold ไม่ควรส่งผลทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงกับวัตถุนั้น

Transformation law ของ scalar และ covector

ในกรณีของ scalar function ϕ นั้น เราไม่สามารถกระจายเป็น linear combination ของ basis ได้ ดังนั้น transformation rule ของปริมาณ scalar คือ

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{10}$$

สำหรับกรณีของ covector ตัวอย่างหนึ่งคือ gradient ของ scalar function $\mathrm{d}\phi$ ซึ่งสามารถกระจายได้เป็น

$$\mathrm{d}\phi = \partial_\mu \phi \, \mathrm{d}x^\mu \tag{11}$$

เห็นได้ว่า component และ (coordinate) basis ของ $\mathrm{d}\phi$ ก็คือ $\partial_\mu\phi$ และ $\mathrm{d}x^\mu$ ตามลำดับ และมี transformation law ดังนี้

$$\partial'_\mu \phi = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\, \partial_\nu \phi \tag{12}$$

$$\mathrm{d}x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\, \mathrm{d}x^\nu \tag{13}$$

และเนื่องจาก transformation law ใช้ได้สำหรับ covector ใดๆ $\omega = \omega_\mu \mathrm{d}x^\mu$ ดังนั้น component ของ covector ต้องเปลี่ยนไปภายใต้ GCT

$$\omega'_\mu(x') \;=\; \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\,\omega_\nu(x) \tag{14}$$

เหมือนกับ scalar และ vector ทั้งตัว covector เองก็ไม่ขึ้นกับ coordinate ที่เลือกใช้ ดังนั้นมันจะ invariant ภายใต้ GCT $\omega'(x') = \omega(x)$ เช่นเดียวกัน

สังเกตว่าที่ผ่านมาเราสนใจแค่การใช้ coordinate ที่ต่างกันอธิบายจุดๆเดียวบน manifold และหาความสัมพันธ์ของ coordinate คนละแบบ $x \leftrightarrow x'$ เท่านั้น ไม่ได้กล่าวถึงการเปรียบเทียบจุดที่ต่างกันบน manifold ซึ่งจะได้เรียนในวันต่อไป หัวข้อ Covariant derivatives and Parallel transport สอนโดย อ.พิทยุทธ และมีข้อสังเกตเพิ่มเติมคือ coordinate ของตัวเศษ (หรือตัวส่วน) ใน transformation matrix จะสอดคล้องกันกับตำแหน่งของ index ที่อยู่ข้างบน (หรือข้างล่าง) เสมอ

3 Tensor

จากที่ได้เรียนในคาบที่แล้ว เราสามารถนิยาม vector V ที่แต่ละจุด p บน manifold M ได้ โดย vector นี้จะอาศัยอยู่ใน vector space ที่เรียกว่า tangent space T_pM, $V \in T_pM$ นอกจากนี้ยังนิยาม covector เป็น map จากสมาชิกใน T_pM ไปเป็นจำนวนจริง โดย covector ω จะอาศัยอยู่ใน dual vector space ของ T_pM เรียกว่า cotangent space T_p^*M, $\omega \in T_p^*M$ ด้วยมุมมองดังกล่าว เราสามารถตีความกลับไปได้เช่นกันว่า vector เป็น map จากสมาชิกใน T_p^*M ไปเป็นจำนวนจริงได้เหมือนกัน ส่วน scalar นั้นก็คือ map จากจำนวนจริงไปยังจำนวนจริง

ในทำนองเดียวกันกับการนิยามก่อนหน้านี้เราสามารถนิยามปริมาณที่ทั่วไปกว่าเรียกว่า tensor โดย tensor ชนิด (k, l) นิยามเป็น multi-linear map จากชุดของ vector และ covector ไปเป็นจำนวนจริง

$$T^{(k,l)} \;:\; \underbrace{T_p^*M \times \cdots \times T_p^*M}_{\text{จำนวน } k \text{ ตัว}} \times \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{\text{จำนวน } l \text{ ตัว}} \to \mathbb{R} \tag{15}$$

โดยที่ $\times$ เป็น Cartesian product ระหว่าง vector space สังเกตได้ว่า ปริมาณ scalar, vector และ covector เป็น tensor ชนิด $(0,0)$, $(1,0)$ และ $(0,1)$ ตามลำดับ คำว่า multi-linear map ในที่นี้หมายความว่าแต่ละ argument ของ tensor เป็น linear map ยกตัวอย่างเช่น กรณีของ tensor ชนิด (1,1) $T(\omega, V) \in \mathbb{R}$ ต้องมีคุณสมบัติดังนี้

- Multiplication by real number: $T(\alpha\omega, \beta V) = \alpha\beta\, T(\omega, V) \in \mathbb{R}$
- Addition: $T(\omega + \eta, V + W) = T(\omega, V) + T(\eta, V) + T(\omega, W) + T(\eta, W)$

เนื่องจาก tensor ชนิด (k,l) เป็น map จากชุดของ covector จำนวน k ตัวและ vector จำนวน l ตัว

$$T^{(k,l)}\big(\omega^{(1)},\ldots,\omega^{(k)},V^{(1)},\ldots,V^{(l)}\big)\in\mathbb{R} \tag{16}$$

ดังนั้นเราอาจเขียน tensor ดังกล่าวในรูป component (ที่มี index บน k ตัวและ index ล่าง l ตัว) และ basis ได้เป็น

$$T^{(k,l)}=T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}\partial_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_k}\otimes \mathrm{d}x^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{\nu_l} \tag{17}$$

เห็นได้ว่าเราสร้าง basis ของ tensor โดยการใช้ tensor product $\otimes$ ระหว่าง basis ของ vector และ covector หลายๆ ตัวขึ้นมา ดังนั้นเห็นได้ว่าเราสามารถใช้ tensor product เพื่อสร้าง tensor ที่มี rank ใหญ่กว่าเดิมได้ rank ของ tensor ชนิด (k,l) นิยามเป็น $k+l$ โดยทั่วไปแล้วไม่สามารถสลับลำดับของ tensor ในการทำ tensor product ได้ $T\otimes S\neq S\otimes T$

เมื่อใช้ transformation law ของ basis และเงื่อนไขที่ว่า ตัว tensor นั้น invariant ภายใต้ GCT เราสามารถเขียน transformation law ของ tensor ชนิด (k,l) ได้เป็น

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}(x')=\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_k}}{\partial x^{\rho_k}}\frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\sigma_l}}{\partial x'^{\nu_l}}T^{\rho_1\cdots\rho_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l}(x) \tag{18}$$

ต่อไปจะกล่าวถึง tensor operation ที่สำคัญอย่างหนึ่ง เรียกว่า contraction โดย operation นี้จะทำให้ rank ของ tensor ลดลงได้

Contraction ของ index

พิจารณา GCT ของปริมาณ tensor ชนิด (1,1) ที่มี index ซ้ำกัน (summation) $Q^{\mu}{}_{\mu}$ พบว่า

$$\begin{aligned}
Q^{\mu}{}_{\mu}(x)\to Q'^{\mu}{}_{\mu}(x') &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}}Q^{\rho}{}_{\sigma}(x)\\
&= \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\rho}}Q^{\rho}{}_{\sigma}(x)\\
&= \delta^{\sigma}_{\rho}Q^{\rho}{}_{\sigma}(x)\\
&= Q^{\sigma}{}_{\sigma}(x)
\end{aligned} \tag{19}$$

ซึ่งเป็นแบบเดียวกับ transformation ของปริมาณ scalar ดังที่แสดงในสมการ (10) สังเกตได้ว่าหากเราทำให้ index ของ tensor ตัวบนกับล่างคู่ใดคู่หนึ่งเหมือนกัน (summation) แล้วจะพบว่ามันให้ผลเหมือนกับว่าเราตัด index คู่นั้นทิ้งไป เกิดเป็น tensor ชนิดใหม่ขึ้นมา โดยที่ tensor ใหม่นี้มี rank ลดลง 2 เทียบกับ tensor เดิม ยกตัวอย่างเช่น

$$T^{\mu\nu\gamma}{}_{\rho\sigma}\quad\xrightarrow[\text{indices }\nu\text{ and }\rho]{\text{sum over}}\quad T^{\mu\nu\gamma}{}_{\nu\sigma}\equiv S^{\mu\gamma}{}_{\sigma} \tag{20}$$

เราเรียกการกระทำนี้ว่า contraction โดยหลังจากที่ทำ contraction ของ tensor ชนิด (k,l) จะได้เป็น tensor ชนิด $(k-1,l-1)$ ซึ่ง contraction นี้สามารถทำระหว่าง tensor หลายๆตัวได้เช่นกัน

$$T^{\mu\nu\gamma}{}_{\rho\sigma}V^{\tau} \quad \xrightarrow[\text{indices } \sigma \text{ and } \tau]{\text{sum over}} \quad T^{\mu\nu\gamma}{}_{\rho\sigma}V^{\sigma} \equiv S^{\mu\nu\gamma}{}_{\rho} \tag{21}$$

หากเป็นกรณีของ tensor ชนิด $(0,k)$ หรือ tensor ชนิด $(k,0)$ จะไม่สามารถทำ contraction ด้วยตัวมันเองได้ เนื่องจากมีแค่ index ชนิดล่างหรือบนเพียงชนิดเดียวเท่านั้น

สังเกตเพิ่มเติมได้ว่าเราสามารถบอกชนิดของปริมาณ tensor รวมไปถึงคุณสมบัติภายใต้ GCT จะสามารถทำได้โดยการพิจารณาเพียงแค่ component ของมันก็พอแล้ว (กรณี tensor หลายตัวก็ยังใช้ได้อยู่) ดังนั้นสำหรับการใช้งาน (อาจจะเห็นในคาบต่อๆไป) เรามักจะละการเขียน basis ของ tensor เพื่อความสะดวก

4 Metric tensor

ในส่วนสุดท้ายนี้จะแนะนำ tensor ที่สำคัญมากในทฤษฎีสัมพัทธภาพเรียกว่า metric tensor ซึ่งเป็น symmetric tensor ชนิด $(0,2)$

$$g = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu} \otimes \mathrm{d}x^{\nu} = g_{\nu\mu}\mathrm{d}x^{\mu} \otimes \mathrm{d}x^{\nu} \tag{22}$$

ดังนั้น metric tensor ก็คือ map จาก vector 2 ตัวไปเป็นจำนวนจริง

$$g^{(0,2)} : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} \tag{23}$$

แล้วเมื่อกำหนดให้ V และ W เป็น vector 2 ตัวใดๆ เราสามารถเขียนได้ว่า

$$g(V,W) = V \cdot W = g_{\mu\nu}V^{\mu}W^{\nu} = g(V,W) \in \mathbb{R} \tag{24}$$

ซึ่งก็คือ inner product ของ vector 2 ตัว ที่มี component เป็น V^{μ} และ W^{μ} นั่นเอง โดยเครื่องหมายเท่ากับสุดท้ายได้มาจากการใช้คุณสมบัติที่ว่า metric tensor เป็น symmetric tensor นอกจากนี้ยังสังเกตได้ว่าคล้ายคลึงกับการทำ dot product ระหว่าง vector 2 ตัวที่เคยเห็นมาก่อน ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะของ inner product ที่กล่าวไปนั่นเอง

ในการนิยามขนาดของ vector เราสามารถทำได้ในทำนองเดียวกันกับที่เคยทำ คือให้ขนาดของ vector V ยกกำลังสองเป็น inner product ของตัว vector เอง

$$||V||^2 = g_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu} \tag{25}$$

สังเกตได้ว่าที่ขนาดยกกำลังสองดังกล่าวสามารถเป็นได้ทั้งค่าบวก ลบ และ ศูนย์ (โดยที่ V ไม่จำเป็นต้องเป็น vector ศูนย์) ซึ่งบ่งบอกว่า vector ตัวนี้เป็นประเภท space-like vector, time-like vector และ light-like vector ตามลำดับ [1]

สำหรับกรณี manifold n มิติ เราพิจารณา metric tensor ในรูปของ $n \times n$ matrix [2] ได้เป็น

$$[g] \equiv \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \tag{26}$$

ดังนั้น inverse ของ metric tensor ก็คือ inverse matrix ของ $g_{\mu\nu}$ โดยทั่วไปใช้สัญลักษณ์เป็น $g^{\mu\nu}$ ทำให้เขียนได้ว่า

$$g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} \tag{27}$$

ความสัมพันธ์ในสมการ (27) เป็นจริงสำหรับทุกๆ coordinate system โดยเห็นได้ว่า δ_{ν}^{μ} เป็น tensor ชนิด (1,1) ที่เกิดจาก contraction ระหว่าง tensor 2 ตัว ซึ่งสอดคล้องกับการให้ inverse ของ metric tensor จึงต้องเป็น tensor ชนิด (2,0) นั่นเอง โดยทั่วไปจะกำหนดว่าให้ metric tensor มีคุณสมบัติ non-degenerate สอดคล้องกับ $\det([g]) \neq 0$ ในรูปแบบ matrix นั่นก็คือเงื่อนไขที่ทำให้มี inverse ของ metric tensor เสมอนั่นเอง

ความไม่สมเหตุสมผล เมื่อ matrix $[g]$ มี eigenvalue เป็นศูนย์

คุณสมบัติ non-degenerate ของ metric tensor กล่าวมานั้นจะสอดคล้องกับการที่ eigenvalue ของ metric tensor ในรูปแบบ matrix ไม่มีตัวใดเลยเป็นศูนย์ ในที่นี่จะแสดงให้เห็นถึงความไม่สมเหตุสมผล หากมี eigenvalue ของ matrix $(g_{\mu\nu})$ เป็นศูนย์ จากที่ได้เห็นในส่วนของทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ (ในส่วนของ online pre-school สอนโดย อ.ภาวิน อ.ปฏิภาณ และ อ.ชาคริต) เราใช้ metric tensor เพื่อนิยามระยะทางระหว่างจุด 2 จุดใน spacetime

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu} = [\mathrm{d}x]^T[g]\,[\mathrm{d}x] \tag{28}$$

---

[1]เครื่องหมายในกรณีนี้ สอดคล้องกับการพิจารณา vector ใน spacetime 4 มิติ โดยกำหนดให้ signature ของ metric tensor เป็น $(-,+,+,+)$

[2]rank-2 tensor ไม่จำเป็นที่จะสามารถเขียนในรูปของ matrix ได้เสมอไป เนื่องจากว่า matrix โดยทั่วไปแล้วไม่ได้ invariant ภายใน GCT

พบว่าสำหรับ $n \times n$ matrix g ใดๆ ที่มี eigenvalue ไม่ซ้ำกัน เราจะสามารถทำให้เป็น diagonalized matrix ได้เสมอ โดยการหา invertible $n \times n$ matrix $[P]$ ที่ทำให้

$$[P][g][P]^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \equiv [g_{\text{diag}}] \tag{29}$$

เมื่อ λ_i เป็น eigenvalue ของ matrix $[g]$ แล้วเมื่อพิจารณา line element จากสมการ (28)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= [\mathrm{d}x]^T [g]\,[\mathrm{d}x] \\ &= [\mathrm{d}x]^T \big([P]^T[P]\big)[g]\,\big([P]^T[P]\big)\,[\mathrm{d}x] \\ &= \big([P][\mathrm{d}x]\big)^T \big([P][g][P]^T\big)\,\big([P][\mathrm{d}x]\big) \\ &= [\widetilde{\mathrm{d}x}]^T [g_{\text{diag}}]\,[\widetilde{\mathrm{d}x}] \\ &= \lambda_\mu \big(\mathrm{d}\tilde{x}^\mu\big)^2 \end{aligned} \tag{30}$$

สมมุติว่าในกรณีที่ $\lambda_1 = 0$ และเลือกพิจารณาในทิศทางที่เปลี่ยนไปในทิศของ coordinate $\tilde{x}^1$ เท่านั้น ($\mathrm{d}\tilde{x}^j = 0$ เมื่อ $j \neq 1$) จะได้ว่าระยะทางระหว่างจุดสองจุดคือ

$$\mathrm{d}s^2 = \cancelto{0}{\lambda_1}\big(\mathrm{d}\tilde{x}^1\big)^2 = 0 \tag{31}$$

ถึงแม้ว่า $\mathrm{d}\tilde{x}^1 \neq 0$ ก็ตาม ทำให้สรุปได้ว่าถ้ามี eigenvalue ของ $[g]$ เป็นศูนย์แล้ว เราจะสามารถหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดได้เป็นศูนย์เสมอ ซึ่งไม่สมเหตุสมผล

Raising and lowering ของ index

อย่างที่ได้เห็นในคาบของ อ.อภิมุข (อีกแล้ว) ว่าหากพิจารณา contraction ระหว่าง metric tensor และ vector พบว่าจะมีการแปลงแบบเดียวกับการแปลงของ covector โดยเมื่อพิจารณาในรูป component จะเห็นว่าการ contraction ด้วย metric tensor ที่ vector V^μ จะเป็นการดึง index ชนิดบนของ vector ลงมาเป็นปริมาณที่มี index ชนิดล่างแทน

$$g_{\mu\nu}V^\nu = V_\mu \tag{32}$$

ซึ่งการดึง index ลงนี้สามารถใช้ได้กับ tensor ทั่วๆไปได้ด้วย เช่น

$$g_{\mu\nu}T^{\rho\nu\sigma}{}_\gamma = T^\rho{}_\mu{}^\sigma{}_\gamma \tag{33}$$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถยก index ขึ้น ด้วยการใช้ inverse ของ metric tensor เช่น

$$g^{\mu\rho}S_{\sigma\nu\mu} = S_{\sigma\nu}{}^{\rho} \tag{34}$$

นอกจากนี้ metric tensor ยังมีความสำคัญในแง่ของที่พิจาณา general relativity เป็น classical field theory แบบหนึ่ง เพราะตัว metric tensor นั้นทำหน้าที่เป็น dynamical field โดยเราสามารถ derive หา Einstein field equations ได้จากการ least action principle ของ Einstein–Hilbert action ซึ่งจะได้เรียนในคาบต่อๆ ไป

5 แบบฝึกหัด

1. ใช้ข้อเท็จจริงที่ว่า vector $V = V^\mu \partial_\mu$ เป็น geometrical object ซึ่งไม่ควรขึ้นกับ coordinate (V is invariant under GCT) เพื่อหา transformation law ของ component ของ vector V^μ เมื่อเรามี transformation law ของ basis ตามที่ได้กล่าวมาในคาบ

$$\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu \tag{5}$$

และตรวจสอบว่าสอดคล้องกับสมการ (9) หรือไม่

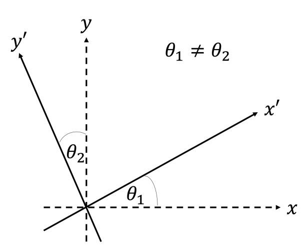
2. พิจารณา metric tensor บน manifold 2 มิติ พบว่าสามารถเขียน component ของ metric tensor และ inverse ของมันในรูปของ matrix ที่บรรยายด้วย coordinate (x, y) ได้เป็น

$$g_{\mu\nu}(x,y) = g^{\mu\nu}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

เมื่อทำ coordinate transformation $(x, y) \to (x', y')$ ดังรูปด้านล่างแล้ว ลองแสดงว่า

$$g'_{\mu\nu}(x',y') \neq g'^{\mu\nu}(x',y') \qquad \text{เมื่อ } \theta_1 \neq \theta_2 \tag{36}$$

$$\text{และ} \qquad g'_{\mu\nu}(x',y') = g'^{\mu\nu}(x',y') \qquad \text{เมื่อ } \theta_1 = \theta_2 \tag{37}$$



3. ในทฤษฎีสนามไฟฟ้าแม่เหล็กใน flat spacetime, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} =$ diag$(-1, 1, 1, 1)$ เมื่อพิจาณา component ของปริมาณ antisymmetric tensor ชนิด (0,2) ที่เรียกว่า field strength tensor

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

เมื่อ E_i และ B_i คือสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในทิศทาง $x^i = (x, y, z)$ ตามลำดับ สังเกตได้ว่า $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ ซึ่งก็คือคุณสมบัติ antisymmetric ของ tensor นี้

3.1 ลองเขียนหน้าตาของ $F_{\mu\nu}$ ในรูปของ matrix

3.2 หาว่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเป็นอย่างไร สำหรับคนวัดที่เคลื่อนด้วย Lorentz boost ไปในทิศทาง y ด้วยความเร็วคงที่ v ซึ่งสามารถบรรยายด้วย transformation matrix คือ

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma v & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \left(1 - v^2\right)^{-1/2} \tag{39}$$

โดยใช้ transformation law สำหรับ component ของ tensor นี้

$$F'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} F^{\rho\sigma} \tag{40}$$

3.3 จงแสดงว่าปริมาณ

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2\Big[\left(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2\right) - \left(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2\right) \Big] \tag{41}$$

เป็นปริมาณที่ invariant ภายใต้ Lorentz boost ในทิศทาง y

เอกสารอ้างอิง

- หนังสือ ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป (General Relativity) ของ ศ. ปริญญา การดำริห์
- หนังสือ Spacetime and Geometry An Introduction to General Relativity ของ Sean Carroll