เฉลยแบบฝึกหัด

สำหรับคาบ Vectors and Tensors on Manifolds 2

ราชภัฏ นครจินดา

The Institute for Fundamental study (IF), Naresuan University

July 12, 2022: 15.00–17.00 น.

4th Thailand School on High-Energy and Astro-Physics (SHEAP 2022): Gravitational wave

---

1. ใช้ข้อเท็จจริงที่ว่า vector $V = V^\mu \partial_\mu$ เป็น geometrical object ซึ่งไม่ควรขึ้นกับ coordinate (V is invariant under GCT) เพื่อหา transformation law ของ component ของ vector V^μ เมื่อเรามี transformation law ของ basis ตามที่ได้กล่าวมาในคาบ

$$\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \tag{5}$$

และตรวจสอบว่าสอดคล้องกับสมการ (9) หรือไม่

วิธีทำ

เราสามารถเขียนปริมาณ vector ที่บรรยายด้วย coordinate x' โดยใช้ transformation law ของ basis ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} V'(x') &= V'^\mu(x') \partial'_\mu \\ &= V'^\mu(x') \left[\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \right] \\ &= \left[\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V'^\mu(x') \right] \partial_\nu \end{aligned}$$

เพื่อให้ได้ว่า vector บรรยายด้วย coordinate x', $V'(x')$ เป็นปริมาณที่ invariant ภายใต้ GCT หรือก็คือเท่ากับ vector บรรยายด้วย coordinate x, $V(x) = V^\nu(x)\partial_\nu$ ดังนั้นเราต้องได้ความสัมพันธ์ของ component ในทั้งสอง coordinates x และ x' คือ

$$V^\nu(x) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V'^\mu(x')$$

หรือ inverse transformation เป็น

$$V'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu(x)$$

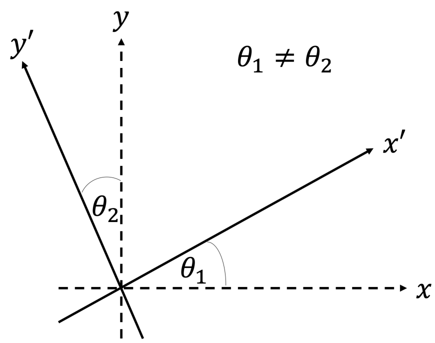
ซึ่งจริงๆ แล้วมันก็คือ transformation law ที่แสดงในสมการ (9) ใน note (ที่แก้คำผิดแล้ว) นั่นเอง

2. พิจารณา metric tensor บน manifold 2 มิติ พบว่าสามารถเขียน component ของ metric tensor และ inverse ของมันในรูปของ matrix ที่บรรยายด้วย coordinate (x, y) ได้เป็น

$$g_{\mu\nu}(x,y) = g^{\mu\nu}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

เมื่อทำ coordinate transformation $(x, y) \to (x', y')$ ดังรูปด้านล่างแล้ว ลองแสดงว่า

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu}(x',y') &\neq g'^{\mu\nu}(x',y') \qquad \text{เมื่อ } \theta_1 \neq \theta_2 \\ \text{และ} \qquad g'_{\mu\nu}(x',y') &= g'^{\mu\nu}(x',y') \qquad \text{เมื่อ } \theta_1 = \theta_2 \end{aligned}$$



วิธีทำ

จากรูปเราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง coordinates $(x, y) \leftrightarrow (x', y')$ โดย project ลงค่า x' และ y' ไปแกน x และ y ได้เป็น

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\theta_1 - y' \sin\theta_2 \\ y &= x' \sin\theta_1 + y' \cos\theta_2 \end{aligned}$$

หรือในทางกลับกัน

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\theta_1 + y \sin\theta_2 \\ y' &= -x \sin\theta_1 + y \cos\theta_2 \end{aligned}$$

เมื่อกำหนด coordinate ในการพิจารณาเป็น $x^\mu = (x^1, x^2) = (x, y)$ และ $x'^\mu = (x'^1, x'^2) = (x', y')$ เราสามารถเขียน transformation matrix ได้เป็น

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & -s_2 \\ s_1 & c_2 \end{pmatrix}}_{\equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} \qquad \text{และ} \qquad \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & s_2 \\ -s_1 & c_2 \end{pmatrix}}_{\equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

ในที่นี้ใช้สัญลักษณ์ $s_1 \equiv \sin\theta_1, s_2 \equiv \sin\theta_2, c_1 \equiv \cos\theta_1$ และ $c_2 \equiv \cos\theta_2$ เพื่อความสะดวก

metric tensor ใน coordinate (x', y') ที่คำนวณจาก transformation law ของ tensor ชนิด (0,2) คือ

$$g'_{\mu\nu}(x'^1, x'^2) = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x^1, x^2) \tag{□}$$

ทำทีละ component ได้เป็น

$$\begin{aligned}
[\mu = \nu = 1] \quad \rightarrow \quad g'_{11} &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^1}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^1} g_{\rho\sigma} \\
&= \frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} g_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\cancelto{0}{g_{21}} + \frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\cancelto{0}{g_{12}} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\frac{\partial x^2}{\partial x'^1} g_{22} \\
&= (c_1)(c_1)(1) + 0 + 0 + (s_1)(s_1)(1) \\
&= s_1^2 + c_1^2 = 1, \\
[\mu = 2, \nu = 1] \quad \rightarrow \quad g'_{21} &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^2}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^1} g_{\rho\sigma} \\
&= \frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} g_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\cancelto{0}{g_{21}} + \frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\cancelto{0}{g_{12}} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\frac{\partial x^2}{\partial x'^1} g_{22} \\
&= (-s_2)(c_1)(1) + 0 + 0 + (c_2)(s_1)(1) \\
&= s_1 c_2 - c_1 s_2, \\
[\mu = 1, \nu = 2] \quad \rightarrow \quad g'_{12} &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^1}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^2} g_{\rho\sigma} \\
&= \frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\frac{\partial x^1}{\partial x'^2} g_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\cancelto{0}{g_{21}} + \frac{\partial x^1}{\partial x'^1}\frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\cancelto{0}{g_{12}} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1}\frac{\partial x^2}{\partial x'^2} g_{22} \\
&= (c_1)(-s_2)(1) + 0 + 0 + (s_1)(c_2)(1) \\
&= s_1 c_2 - c_1 s_2, \\
[\mu = \nu = 2] \quad \rightarrow \quad g'_{22} &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^1}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^1} g_{\rho\sigma} \\
&= \frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\frac{\partial x^1}{\partial x'^2} g_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\cancelto{0}{g_{21}} + \frac{\partial x^1}{\partial x'^2}\frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\cancelto{0}{g_{12}} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^2}\frac{\partial x^2}{\partial x'^2} g_{22} \\
&= (-s_2)(-s_2)(1) + 0 + 0 + (c_2)(c_2)(1) \\
&= s_2^2 + c_2^2 = 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น metric tensor ใน coordinate (x', y') เป็น

$$g'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & s_1 c_2 - c_1 s_2 \\ s_1 c_2 - c_1 s_2 & 1 \end{pmatrix} \tag{\#}$$

ในทำนองเดียวกัน เราจะได้ inverse ของ metric tensor ใน coordinate (x', y') เป็น

$$g'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & -s_1 c_2 + c_1 s_2 \\ -s_1 c_2 + c_1 s_2 & 1 \end{pmatrix}$$

เห็นได้อย่างชัดเจนว่า

$$\begin{aligned} & g'_{\mu\nu}(x',y') && \neq && g'^{\mu\nu}(x',y') && \text{เมื่อ } \theta_1 \neq \theta_2 \\ \text{และ} \quad & g'_{\mu\nu}(x',y') && = && g'^{\mu\nu}(x',y') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{เมื่อ } \theta_1 = \theta_2 \end{aligned}$$

เพิ่มเติม

Transformation law ในสมการ (□) สามารถเขียนเป็น matrix form ได้คือ

$$\begin{aligned} [g'] &= \left[\frac{\partial x}{\partial x'}\right]^T [g] \left[\frac{\partial x}{\partial x'}\right] \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & -s_2 \\ s_1 & c_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & -s_2 \\ s_1 & c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & s_1 \\ -s_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & -s_2 \\ s_1 & c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s_1^2 + c_1^2 & -c_1 s_2 + s_1 c_2 \\ -s_2 c_1 + s_1 c_2 & s_2^2 + c_2^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ซึ่งเท่ากันกับผลลัพธ์ในสมการ (#) ส่วน transformation สำหรับ inverse ของ metric tensor จะเขียนใน matrix form ได้เป็น

$$[g'^{-1}] = \left[\frac{\partial x'}{\partial x}\right]^T [g^{-1}] \left[\frac{\partial x'}{\partial x}\right]$$

สังเกตว่าลำดับการดำเนินการกรณีที่เป็น matrix form จะต้องเรียงลำดับอย่างถูกต้อง ไม่เหมือนกับ component form ในสมการ (□) เป็นเพียงตัวเลขที่มีคุณสมบัติสลับที่การคูณได้ (แค่ต้องระวังเรื่อง dummy indices ให้ถูกต้อง) นอกจากนี้ยังสังเกตได้ว่า เราไม่สามารถเขียน transformation law ของ tensor ที่มี rank สูงกว่า 2 ได้ เนื่องจากเราไม่สามารถ represent ตัว tensor ดังกล่าวในรูป matrix ได้นั่นเอง

---

3. ในทฤษฎีสนามไฟฟ้าแม่เหล็กใน flat spacetime, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1)$ เมื่อพิจาณา component ของปริมาณ antisymmetric tensor ชนิด (0,2) ที่เรียกว่า field strength tensor

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

เมื่อ E_i และ B_i คือสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในทิศทาง $x^i = (x,y,z)$ ตามลำดับ สังเกตได้ว่า $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ ซึ่งก็คือคุณสมบัติ antisymmetric ของ tensor นี้

3.1 ลองเขียนหน้าตาของ $F_{\mu\nu}$ ในรูปของ matrix

3.2 หาว่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเป็นอย่างไร สำหรับคนวัดที่เคลื่อนด้วย Lorentz boost ไปในทิศทาง y ด้วยความเร็วคงที่ v ซึ่งสามารถบรรยายด้วย transformation matrix คือ

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma v & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \left(1 - v^2\right)^{-1/2}$$

โดยใช้ transformation law สำหรับ component ของ tensor นี้

$$F'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}F^{\rho\sigma}$$

3.3 จงแสดงว่าปริมาณ

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2\Big[\left(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2\right) - \left(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2\right)\Big]$$

เป็นปริมาณที่ invariant ภายใต้ Lorentz boost ในทิศทาง y

วิธีทำ

3.1

เนื่องจาก tensor $F_{\mu\nu}$ มีคุณสมบัติ antisymmetric ซึ่งหมายความว่า มี component อิสระอยู่แค่ 6 ตัว (จำนวนดังกล่าวเป็นจริงแค่ในกรณี 4 มิติเท่านั้น) คือ $F_{01} = -F_{10}$, $F_{02} = -F_{20}$, $F_{03} = -F_{30}$, $F_{12} = -F_{21}$, $F_{13} = -F_{31}$, $F_{23} = -F_{32}$ ส่วน component ที่เหลือ $F_{00}, F_{11}, F_{22}, F_{33}$ จะต้องเป็นศูนย์เท่านั้น ถึงจะสอดคล้องกับเงื่อนไข $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$

เราทราบแล้วว่า component $F_{\mu\nu}$ สามารถคำนวนได้โดยใช้ lowering ด้วย metric tensor ดังนี้

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma}$$

คิดทีละ component ได้เป็น

$$\begin{aligned}
[\mu = 0,\, \nu = 1] \quad \rightarrow \quad F_{01} &= g_{0\rho} g_{1\sigma} F^{\rho\sigma} \\
&= g_{00} g_{11} F^{01} \quad \text{[เหลือเพียงแค่กรณีที่ } \rho = 0 \text{ และ } \sigma = 1 \text{ เท่านั้น} \\
&\qquad\qquad\qquad \text{เนื่องจากถ้า } \rho \neq 0 \text{ จะให้ } g_{0\rho} \text{ เป็นศูนย์} \\
&\qquad\qquad\qquad \text{และถ้า } \sigma \neq 1 \text{ จะให้ } g_{1\sigma} \text{ เป็นศูนย์]} \\
&= (-1)(1) F^{01} = -F^{01}
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $F_{02} = -F^{02}$ และ $F_{03} = -F^{03}$

$$\begin{aligned}
[\mu = 1,\, \nu = 2] \quad \rightarrow \quad F_{01} &= g_{1\rho} g_{2\sigma} F^{\rho\sigma} \\
&= g_{11} g_{22} F^{12} \quad \text{[เหลือเพียงแค่กรณีที่ } \rho = 1 \text{ และ } \sigma = 2 \text{ เท่านั้น} \\
&\qquad\qquad\qquad \text{เนื่องจากถ้า } \rho \neq 1 \text{ จะให้ } g_{1\rho} \text{ เป็นศูนย์} \\
&\qquad\qquad\qquad \text{และถ้า } \sigma \neq 2 \text{ จะให้ } g_{2\sigma} \text{ เป็นศูนย์]} \\
&= (1)(1) F^{12} = F^{12}
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $F_{13} = F^{13}$ และ $F_{23} = F^{23}$ นอกจากนี้ยังสังเกตได้ว่าคุณสมบัติ antisymmetric ของ $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ ยังคงมีอยู่ ดังนั้นเราสามารถเขียน tensor $F_{\mu\nu}$ ได้เป็น

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

นอกจากนี้ผลลัพธ์ของการ lowering ของ index ดังกล่าวสามารถเขียนในรูปการคูณของ matrix ได้เป็น

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= [g]^T [F^{\mu\nu}] [g] \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3.2

คิดทีละ component ของ transformation

$$F'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}F^{\rho\sigma}$$

ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
[\mu = 0,\, \nu = 1] \quad \rightarrow \quad F'^{01} &= \frac{\partial x'^{0}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{1}}{\partial x^{\sigma}}F^{\rho\sigma} \\
&= \frac{\partial x'^{0}}{\partial x^{0}}\frac{\partial x'^{1}}{\partial x^{1}}F^{01} + \frac{\partial x'^{0}}{\partial x^{2}}\frac{\partial x'^{1}}{\partial x^{1}}F^{21} \\
& \qquad \left[\frac{\partial x'^{0}}{\partial x^{\rho}} \text{ ที่ไม่เป็นศูนย์ มีแค่ } \frac{\partial x'^{0}}{\partial x^{0}} \text{ และ } \frac{\partial x'^{0}}{\partial x^{2}} \right. \\
& \qquad \left. \text{ส่วน } \frac{\partial x'^{1}}{\partial x^{\rho}} \text{ ที่ไม่เป็นศูนย์ มีแค่ } \frac{\partial x'^{1}}{\partial x^{1}} \text{ เท่านั้น} \right] \\
&= (\gamma)(1)(E_x) + (-\gamma v)(1)(-B_z) \\
\rightarrow \quad E'_x &= \gamma(E_x + vB_z) \\
[\mu = 0,\, \nu = 2] \quad \rightarrow \quad F'^{02} &= \frac{\partial x'^{0}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{2}}{\partial x^{\sigma}}F^{\rho\sigma} \\
&= \frac{\partial x'^{0}}{\partial x^{0}}\frac{\partial x'^{2}}{\partial x^{0}}\cancelto{0}{F^{00}} + \frac{\partial x'^{0}}{\partial x^{2}}\frac{\partial x'^{2}}{\partial x^{0}}F^{20} + \frac{\partial x'^{0}}{\partial x^{0}}\frac{\partial x'^{2}}{\partial x^{2}}F^{02} + \frac{\partial x'^{0}}{\partial x^{2}}\frac{\partial x'^{2}}{\partial x^{2}}\cancelto{0}{F^{22}} \\
& \qquad \left[\frac{\partial x'^{0}}{\partial x^{\rho}} \text{ ที่ไม่เป็นศูนย์ มีแค่ } \frac{\partial x'^{0}}{\partial x^{0}} \text{ และ } \frac{\partial x'^{0}}{\partial x^{2}} \right. \\
& \qquad \left. \text{ส่วน } \frac{\partial x'^{2}}{\partial x^{\rho}} \text{ ที่ไม่เป็นศูนย์ มีแค่ } \frac{\partial x'^{2}}{\partial x^{0}} \text{ และ } \frac{\partial x'^{2}}{\partial x^{2}} \right] \\
&= 0 + (-\gamma v)(-\gamma v)(-E_y) + (\gamma)(\gamma)(E_y) + 0 \\
\rightarrow \quad E'_y &= \gamma^2(-v^2 + 1)E_y = E_y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\mu=0,\,\nu=3] \quad \rightarrow \quad F'^{03} &= \frac{\partial x'^0}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^3}{\partial x^\sigma}F^{\rho\sigma} \\
&= \frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\frac{\partial x'^3}{\partial x^3}F^{03} + \frac{\partial x'^0}{\partial x^2}\frac{\partial x'^3}{\partial x^3}F^{23} \\
&= (\gamma)(1)(E_z) + (-\gamma v)(1)(B_x) \\
\rightarrow \quad E'_z &= \gamma(E_z - vB_x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\mu=1,\,\nu=2] \quad \rightarrow \quad F'^{12} &= \frac{\partial x'^1}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^2}{\partial x^\sigma}F^{\rho\sigma} \\
&= \frac{\partial x'^1}{\partial x^1}\frac{\partial x'^2}{\partial x^0}F^{10} + \frac{\partial x'^1}{\partial x^1}\frac{\partial x'^2}{\partial x^2}F^{12} \\
&= (1)(-\gamma v)(-E_x) + (1)(\gamma)(B_z) \\
\rightarrow \quad B'_z &= \gamma(B_z - vE_x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\mu=1,\,\nu=3] \quad \rightarrow \quad F'^{13} &= \frac{\partial x'^1}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^3}{\partial x^\sigma}F^{\rho\sigma} \\
&= \frac{\partial x'^1}{\partial x^1}\frac{\partial x'^3}{\partial x^3}F^{13} \\
&= (1)(1)F^{13} \\
\rightarrow \quad -B'_y &= -B_y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\mu=2,\,\nu=3] \quad \rightarrow \quad F'^{23} &= \frac{\partial x'^2}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^3}{\partial x^\sigma}F^{\rho\sigma} \\
&= \frac{\partial x'^2}{\partial x^0}\frac{\partial x'^3}{\partial x^3}F^{03} + \frac{\partial x'^2}{\partial x^2}\frac{\partial x'^3}{\partial x^3}F^{23} \\
&= (-\gamma v)(1)(E_z) + (\gamma)(1)(B_x) \\
\rightarrow \quad B'_x &= \gamma(B_x - vE_z)
\end{aligned}
$$

สรุปได้ว่า สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในแต่ละทิศทางที่วัดโดยผู้ที่เคลื่อนที่ด้วย Lorentz boost ในทิศทาง y จะสัมพันธ์กับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่วัดโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง ดังนี้

$$
E'_x = \gamma(E_x + vB_z), \qquad E'_y = E_y, \qquad E'_z = \gamma(E_z - vB_x) \tag{$*$}
$$

$$
B'_x = \gamma(B_x - vE_z), \qquad B'_y = B_y, \qquad B'_z = \gamma(B_z - vE_x) \tag{$\dagger$}
$$

3.3

เราสามารถเขียนปริมาณ $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ ในรูปของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= F^{0i}F_{0i} + F^{i0}F_{i0} + F^{ij}F_{ij} \qquad \text{[ให้ index } i,j \text{ เป็น } 1,2,3 \text{ (ไม่รวม 0)]} \\
&= F^{0i}F_{0i} + (-F^{0i})(-F_{0i}) + F^{ij}F_{ij} \\
&= 2F^{0i}F_{0i} + F^{ij}F_{ij} \\
&= 2\Big[F^{01}F_{01} + F^{02}F_{02} + F^{03}F_{03}\Big] + \Big[(F^{12}F_{12} + F^{13}F_{13}) + (F^{21}F_{21} + F^{23}F_{23}) \\
&\quad + (F^{31}F_{31} + F^{32}F_{32})\Big] \\
&= 2\Big[E_x(-E_x) + E_y(-E_y) + E_z(-E_z)\Big] + B_z(B_z) + (-B_y)(-B_y) + (-B_z)(-B_z) \\
&\quad + B_x(B_x) + B_y(B_y) + (-B_x)(-B_x) \\
&= 2\Big[-(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) + (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)\Big]
\end{aligned}
$$

ในทำนองเดียวกัน ปริมาณ $F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu}$ ก็จะเขียนได้เป็น

$$
F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} = 2\Big[-(E_x'^2 + E_y'^2 + E_z'^2) + (B_x'^2 + B_y'^2 + B_z'^2)\Big]
$$

ใช้ผลลัพธ์จากข้อ 2.3 ในสมการ (∗) และ (†) สามารถแปลงปริมาณที่วัดโดยผู้สังเกตที่เคลื่อนด้วย Lorentz boost ในทิศ y ในรูปของปริมาณที่วัดโดยผู้สังเกตที่อยู่นิ่ง ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
&2\Big[-(E_x'^2 + E_y'^2 + E_z'^2) + (B_x'^2 + B_y'^2 + B_z'^2)\Big] \\
&= 2\Big[-\gamma^2(E_x + vB_z)^2 - E_y^2 - \gamma^2(E_z - vB_x)^2 + \gamma^2(B_x - vE_z)^2 + B_y^2 + \gamma^2(B_z - vE_x)^2\Big] \\
&= 2\Big[-\gamma^2(E_x^2 + \cancel{2vE_xB_z} + v^2B_z^2) - E_y^2 - \gamma^2(E_z^2 - \cancel{2vE_zB_x} + v^2B_x^2) \\
&\qquad + \gamma^2(B_x^2 - \cancel{2vE_zB_x} - v^2E_z^2) + B_y^2 + \gamma^2(B_z^2 - \cancel{2vE_xB_z} + v^2E_x^2)\Big] \\
&= 2\Big[-\gamma^2(1-v^2)E_x^2 + E_y^2 - \gamma^2(1-v^2)E_z^2 + \gamma^2(1-v^2)B_x^2 + B_y^2 + \gamma^2(1-v^2)B_z'^2\Big] \\
&= 2\Big[-(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) + (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)\Big] \\
&= F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

สรุปได้ว่าปริมาณ $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu}$ เป็นปริมาณที่ invariant ภายใต้ Lorentz boost ในทิศทาง y ซึ่งสอดคล้องกับความจริงที่ว่า component ของปริมาณ scalar จะไม่ขึ้นกับ coordinate กล่าวคือ

$$
F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu}(x') = F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(x)
$$