Covariant Derivatives

4th Thailand School on High-Energy and Astro-Physics (SHEAP2022): Gravitational Wave

Pitayuth Wongjun

The Institute for Fundamental Study,
Naresuan University, Phitsanulok 65000, Thailand

July 12, 2022

Contents

1 Covariant derivatives

โดยทั่วไปแล้ว การทำ derivatives ของเวกเตอร์ คือการเปรียบเทียบเวกเตอร์ที่อยู่ตำแหน่งใกล้ๆกัน ผลต่างจากการเปรียบเทียบนี้จะสื่อถึงการทำ derivatives โดยตรง อย่างไรก็ตาม การทำ derivatives บนกาลอวกาศที่มีความโค้งนั้นมีความยุ่งยากกว่าการทำ derivatives กาลอวกาศแบบแบนราบ เนื่องจากเวกเตอร์ที่นำมาเปรียบเทียบกันนั้นอยู่คนละ tanget space กัน ด้วยเหตุนี้ partial derivatives ของเวกเตอร์, V^μ, จึงไม่ invariant ภายใต้การแปลงพิกัดทั่วไป กล่าวคือ

$$\begin{aligned}
\partial'_\mu V'^\nu &= \frac{\partial}{\partial x'^\mu} V'^\nu, \\
&= \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\right)\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} V^\sigma\right), \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial}{\partial x^\rho} V^\sigma + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} V^\sigma, \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}\partial_\rho V^\sigma + \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} V^\sigma. \qquad (1)
\end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า $\partial_\mu V^\nu$ ไม่ได้แปลงแบบ tensor rank (1,1) ทั้งนี้เนื่องจากว่า มีพจน์ $\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} V^\sigma$ เพิ่มขึ้นมาจากสมการ (1)

ใน section นี้ เราจะหาวิธีการทำ derivatives เหมาะๆ โดยที่การทำ derivatives นั้นไม่เปลี่ยนรูปแบบภายใต้การแปลงพิกัดทั่วไป จากที่กล่าวไปแล้วว่า การทำ derivatives นั้น สัมพันธ์โดยตรงกับ การหาผลต่างของเวกเตอร์ที่ตำแหน่งต่างกัน เพื่อให้เห็นภาพลองพิจารณา เวกเตอร์ใน 3 มิติ 2 ตัว $V^i(x^j)$ and $V^i(x^j + dx^j) = V^i + dV^i$ (ตามรูป 1), derivatives ของเวกเตอร์สามารถเขียนได้เป็น

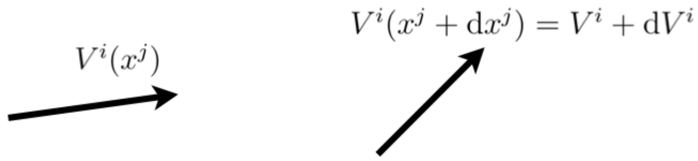

Figure 1: ในกาลอาวกาศ 3 มิติแบบแบนราบ เวกเตอร์ 2 ตัว สามารถนำมาเปรียบเทียบกันได้โดยตรง

$$\frac{\partial V^i}{\partial x^j} = \lim_{\mathrm{d}x^j \to 0} \frac{V^i(x^j + \mathrm{d}x^j) - V^i(x^j)}{\mathrm{d}x^j}. \qquad (2)$$

ในกรณีของ กาลอวกาศแบนราบ เราสามารถนิยาม derivatives ในลักษณะเช่นนี้ได้ เพราะ เวกเตอร์ทั้งสองตัวนั้น อยู่ที่ tangent space เดียวกัน อย่างไรก็ตาม เราไม่สามารถทำในลักษณะเช่นเดียวกันนี้ได้ในกาลอาวกาศโค้ง เนื่องจาก ทั้งสองเวกเตอร์นั้น อยู่คนละตำแหน่ง (โดยทั่วไปแล้ว อยู่คนละ tangent space กัน)

ดังนั้น เราอาจจะจำเป็นที่จะต้อง พยายามหาหนทางที่จะนำเวกเตอร์ให้มาอยู่ตำแหน่งเดียวกันก่อนแล้วค่อยนำมาเปรียบเทียบกัน เพื่อความสะดวก เราจะให้เวกเตอร์ที่ถูกเลือนมาแล้วมายังที่ตำแหน่งเดียวกันแล้วเขียนได้เป็น $V^\mu(x^\nu) + \delta V^\mu$ แสดงตามรูป Fig. 2

จะเห็นได้ว่า ตอนนี้เรามีเวกเตอร์ 2 ตัวที่ตำแหน่งเดียวกันแล้ว กล่าวคือ $V^\mu(x^\nu + \mathrm{d}x^\nu) = V^\mu(x^\nu) + \mathrm{d}V^\mu$ เป็นเวกเตอร์ที่เปลี่ยนแปลงโดยตัวของมันเองเนื่องจากการเปลี่ยนตำแหน่ง (โดยทั่วไปแล้วการเปลี่ยนแปลงนี้จะยังคงมีอยู่ในกาลอวกาศแบนราบ) และ $V^\mu(x^\nu + \mathrm{d}x^\nu) = V^\mu(x^\nu) + \delta V^\mu$ เป็นเวกเตอร์ทีเปลี่ยนไปเนื่องจากเราเลื่อนเวกเตอร์นี้ไปโดยวิธีการหนึ่ง ซึ่งจะเรียกต่อไปว่า การเลื่อนทางขนาน (การเปลี่ยนแปลงนี้จะหายไปเมื่อพิจารณาในกาลอวกาศแบนราบ)

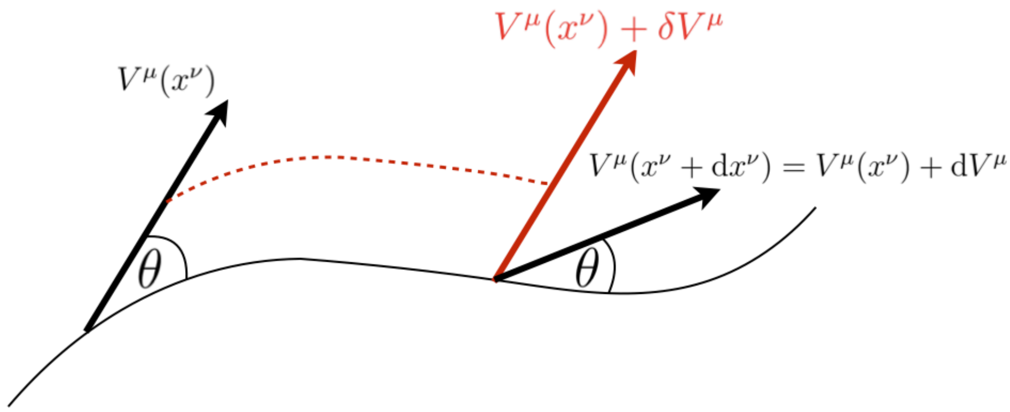

Figure 2: เวกเตอร์ 2 ตัวที่ตำแหน่งเดียวกันสามารถนำเอามาเปรียบเทียบกันเพื่อที่จะการ derivatives เหมาะๆได้

จากที่กล่าวไปข้างต้นนั้น เราสามารถนำเวกเตอร์สองตัวมาเปรียบเทียบกันได้โดยผลต่างของทั้งสองนั้นเขียนได้ดังนี้ $V^\mu(x^\nu) + \delta V^\mu$ and $V^\mu(x^\nu) + \mathrm{d}V^\mu$ as

$$\mathrm{D}V^\mu = (V^\mu(x^\nu) + \mathrm{d}V^\mu) - (V^\mu(x^\nu) + \delta V^\mu) = \mathrm{d}V^\mu - \delta V^\mu. \tag{3}$$

เราจะหา δV^μ ได้อย่างไร
จากที่กล่าวไปก่อนหน้านั้น $\mathrm{d}V^\mu$ นั้นสัมพันธ์โดยตรงกับ partial derivatives คำถามสำคัญอย่างหนึ่งคือ เราจะหาδV^μ ได้อย่างไรในเมื่อ การเลื่อนเวกเตอร์นี้เราใส่เองเข้าไปเฉยๆ? สิ่งที่เราพอจะรู้อย่างหนึ่งคือ δV^μ มันควรจะขึ้นอยู่กับว่า V^μ มากน้อยแค่ไหนหรือมีทิศทางอย่างไร หรืออีกนัยหนึ่ง δV^μ จะต้องแปรผันโดยตรงกับ V^μ นั่นเอง

อีกประเด็นหนึ่งที่เราต้องพิจารณาคือ δV^μ อยู่ tangent space เดียวกันกับ $\mathrm{d}V^\mu$ เพราะฉะนั้นแล้ว δV^μ จะต้องแปรผันตรงกับ $\mathrm{d}x^\mu$ ซึ่งโดยทั่วไปแล้วจะเขียนได้เป็น

$$\delta V^\mu \propto V^\rho \mathrm{d}x^\sigma \qquad \rightarrow \qquad \delta V^\mu = -\Gamma^\mu_{\rho\sigma} V^\rho \mathrm{d}x^\sigma, \tag{4}$$

โดยที่ $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ คือ connection coefficient หรือเรียกสั้นๆว่า connection (ผมขอไม่แปลแล้วกัน)

Note connection เป็นปริมาณที่สองที่เรานำเข้ามาใน manifold ต่อจาก metric tensor
Note (อีกที) connection มีความหมายเชิงฟิสิกส์คือปริมาณที่เชื่อมระหว่างจะสองจุดบน manifold ตามที่เราพยายามจะเลื่อนเวกตอร์ระหว่างจุดสองจุดนั่นเอง
Note (อีกรอบ) connection สามารถคำนวนหาได้จากการเปลี่ยนแปลงของ basis ของเวกเตอร์ $\partial_\mu \hat{e}_\nu = \Gamma^\rho_{\mu\nu} \hat{e}_\rho$

ในกาลอวกาศโค้ง เราสามารถหาเส้นทางโค้งใดๆระหว่างจุดสองจุดได้ และเส้นโค้งดังกล่าวนั้น ก็สามารถ parameterize ได้โดย parameter λ เพราะฉะนั้น ถ้าเราจะหาผลต่างของเวกเตอร์ระหว่างจุดสองจุดในกาลอวกาศโค้งนั้น มันเป็นธรรมชาติที่เราจะนิยามผลต่างนี้เมื่อเทียบกับ parameter λ

จากที่กล่าวมานี้ เราสามารถนิยาม derivatives ตามแนวเส้นโค้งนี้ได้เป็น (ใช้สมการ (3))

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}V^\mu}{\mathrm{d}\lambda} &\equiv \frac{\mathrm{d}V^\mu}{\mathrm{d}\lambda} - \frac{\delta V^\mu}{\mathrm{d}\lambda}, \\ &\equiv \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} V^\rho \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda}, \\ \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda}\nabla_\sigma V^\mu &= \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} V^\rho\right)\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda}, \end{aligned} \tag{5}$$

โดยที่เรานิยาม covariant derivative ของ vector V^μ ตามนี้

$$\nabla_\sigma V^\mu = \partial_\sigma V^\mu + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} V^\rho. \tag{6}$$

เราจะหา covariant derivative ของ dual vector W_μ ได้อย่างไร

สำหรับ dual vector เราสามารถหา covariant derivative ของมันได้จากข้อมูลที่ว่าปริมาณ scalar จะไม่เปลี่ยนภายใต้การเปลี่ยนพิกัด กล่าวคือ

$$\nabla_\sigma (V^\mu W_\mu) = 0. \tag{7}$$

Exercise1 ให้ผู้เข้าร่วมใช้สมการข้างบนเพื่อแสดงว่า covariant derivative ของ dual vector สามารถเขียนได้เป็น

$$\nabla_\sigma W_\mu = \partial_\sigma W_\mu - \Gamma^\rho_{\sigma\mu} W_\rho. \tag{8}$$

โดยทั่วไปแล้ว เราสามารถใช้หลักการณ์เดียวกันนี้ เขียน covariant derivatives ของ tensor ได้เป็น

$$\begin{aligned}\nabla_\rho T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} &= \partial_\rho T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} + \sum_{i=1}^{p} \Gamma^{\mu_i}_{\rho\sigma} T^{\mu_1\cdots\mu_{i-1}\sigma\mu_{i+1}\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{q} \Gamma^{\sigma}_{\rho\nu_i} T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_{i-1}\sigma\nu_{i+1}\cdots\nu_q}.\end{aligned} \tag{9}$$

$\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ แปลงอย่างไร ภายใต้การแปลงพิกัดทั่วไป

เนื่องจากว่า $\nabla_\sigma V^\mu$ ไม่เปลี่ยนรูปแบบภายใต้การแปลงพิกัดทั่วไป แต่ $\partial_\sigma V^\mu$ เปลี่ยน ดังนั้น $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ จึงต้องเปลี่ยนเพื่อที่จะให้ผลไปตัดกันกับส่วนที่เกินมา จะได้ว่า $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ ไม่ได้เป็น tensor เพื่อให้เห็นภาพยิ่งขึ้น

Exercise2 ให้ผู้เข้าร่วมแสดงว่า, $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ เปลี่ยนภายใต้การแปลงพิกัดทั่วไปดังนี้

$$\Gamma'^\rho_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} + \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma}\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu}$$

Note จากสมการข้างบน จะเห็นได้ว่า $\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}$ มีการแปลงเหมือน tensor หรือผลต่างของ connection เป็น tensor นั่นเอง ดังนั้น เราสามารถนิยามปริมาณ tensor ที่เกี่ยวเนื่องกับผลต่างนี้ได้ โดยเรียกว่า torsion tensor

$$T^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} \tag{10}$$

ซึ่ง torsion นี้เกิดจากการที่เราทำ round trip transport ของปริมาณ scalar $T^\rho_{\mu\nu} \propto [\nabla_\mu, \nabla_\nu] f$ อย่างไรก็ตามในสัมพัทธภาพทั่วไปนี้ เราจะพิจารณากาลอวกาศแบบไม่มี torsion หรือ $T^\rho_{\mu\nu} = 0$

โดยหลักการณ์แล้ว $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ จะไม่ขึ้นกับ metric tensor $g_{\mu\nu}$ มันเป็นโครงสร้างอย่างหนึ่งที่เรานำเข้ามาเหมือนกับ $g_{\mu\nu}$ อย่างไรก็ตามถ้าเราเลือก metric tensor ในบางเงื่อนไขเรียกว่า metric compatibility $\nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = 0$, เราจะสามารถหาความสัมพันธ์ของ metric tensor กับ connection ได้

<u>Exercise3</u> โดยใช้ metric compatibility $\nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = 0$ จงแสดงว่า

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu} \right). \tag{11}$$

ซึ่ง connection นี้จะเรียกว่า Christoffel symbol โดยสรุปแล้ว จะได้ว่า สัมพัทธภาพทั่วไปนั้นอยู่ภายใต้สมมุติฐานสองอย่างคือ กาลอวกาศไม่มี torsion และ connection คือ Christoffel symbol

<u>Exercise4</u> เพื่อเป็นการฝึกคำนวน ให้ผู้เข้าร่วม แสดงว่า

$$\nabla_{\mu} V^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} \left(\sqrt{-g} V^{\mu} \right). \tag{12}$$

โดยที่ g คือ determinat ของ metric tensor

2 Parallel transport and geodesic equation

จากสมการ (5), เราสามารถเขียนสมการใหม่ให้ขึ้นกับ tangent vector ได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}\, V^{\nu}}{d\lambda} &= \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \nabla_{\mu} V^{\nu}, & (13) \\ &= t^{\mu} \nabla_{\mu} V^{\nu}. & (14) \end{aligned}$$

จากสมการนี้ เราตีความได้ว่า มันคือการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ตามทิศทางของ tangent vector อย่างเหมาะๆ (covariantly) บางตำราจะเรียกการเปลี่ยนแปลงในลักษณะเช่นนี้ว่า directional derivatives ในอีกมุมหนึ่ง เราอาจจะมองได้ว่า มันเป็นการเลื่อนตำแหน่งของเวกเตอร์ตามเส้นทางที่ parameterize โดย λ ดังนั้น ถ้าเราต้องการที่จะเลื่อนเวกเตอร์นี้โดยที่ตัวเวกเตอร์ไม่เปลี่ยนแปลงเลย เราสามารถเขียนสมการได้เป็น

$$\frac{\mathrm{D} V^{\nu}}{d\lambda} = t^{\mu} \nabla_{\mu} V^{\nu} = 0 \tag{15}$$

โดยการเลื่อนเวกเตอร์ในลักษณะเช่นนี้ คือการเลื่อนทางขนาน (parallel transport) โดยการเลื่อนทางขนานนี้จะเป็นไอเดียหลักอันหนึ่งที่ใช้นิยามความโค้งของกาลอวกาศ ทั้งนี้การหาความโค้งของกาลอวกาศสามารถหาได้โดยการเลื่อนทางขนานของเวกเตอร์ในเส้นทางปิด (อีกสองคาบจากนี้ บรรยายโดย พี่น๊อต ลัญจกร) โดยทั่วไปแล้วเราสามารถประยุกต์การเลื่อนทางขนานกับปริมาณ tensor ได้ กล่าวคือ

$$\rightarrow \qquad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\lambda} T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = t^\mu \nabla_\mu T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = 0. \tag{16}$$

$$\rightarrow \qquad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\lambda}(g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu) = 0. \tag{17}$$

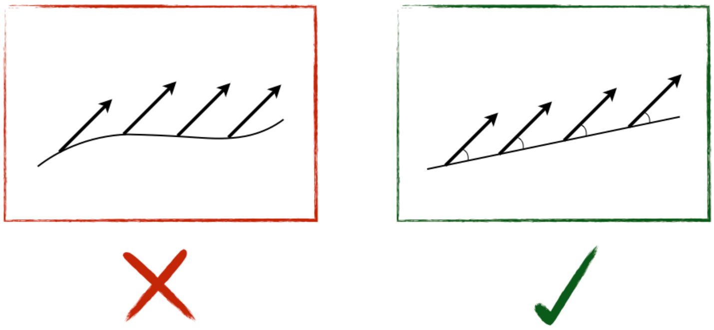

Figure 3: จะมีบางเส้นทางที่การเลื่อน tagent vector จะเป็นการเลื่อนทางขนาน ซึ่งเส้นทางนั้นเรียกว่า geodesic

ดังที่กล่าวไปก่อนหน้านี้ directional derivatives บงบอกถึงการเลื่อนเวกเตอร์ไปตามเส้นทางที่กำกับด้วย tangent vector ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว เราสามารถเลื่อนเวกเตอร์ใดๆได้ ดังนั้น ถ้าเราเลื่อน tengent vector ตามเส้นทางที่กำกับโดย tangent vector เอง $t^\mu \nabla_\mu t^\rho$ โดยทั่วไปแล้วการเลื่อนแบบนี้ อาจจะไม่เป็นการเลื่อนทางขนาน $t^\mu \nabla_\mu t^\rho \neq 0$

อย่างไรก็ตาม มันจะมีเส้นทางหนึ่งที่การเลื่อนนี้เป็นการเลื่อนทางขนาน และเส้นทางนั้นเรียกว่า เส้นทาง geodesic ตามรูป 3 ดังนั้น สมการที่กำกับเส้นทางดังกล่าวนั้น สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} t^\mu \nabla_\mu t^\rho &= 0, \\ \left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right)\left(\partial_\mu t^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu} t^\nu\right) &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}t^\rho}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} t^\mu t^\nu &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}^2 x^\rho}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

สมการนี้เรียกว่าสมการ geodesic นั่นเอง และ parameter, λ ที่สอดคล้องกับสมการดังกล่าว เรียกว่า affine parameter ในอีกมุมหนึ่ง สมการ geodesic ได้มาจากการที่เราเลื่อน tangent vector ตามเส้นทางที่กำกับด้วย tangent vector โดยที่ tangent vector นี้ไม่เปลี่ยนแปลงทั้งขนาดและทิศทาง $t^\mu \nabla_\mu t^\rho = 0$ อย่างไรก็ตาม เส้นทาง geodesic นั้นสามารถหาได้โดยการเลื่อน tengent vector โดยที่ให้เพียงทิศทางไม่เปลี่ยนแปลงเท่านั้น (ยอมให้ขนาดเปลี่ยนแปลงได้) ซึ่งโดยทั่วไปแล้ว สมการ geodesic ดังกล่าวจะเขียนได้เป็น

$$\ddot{x^\rho} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = f(\lambda)\dot{x}^\rho, \tag{19}$$

อย่างไรก็ตาม สมการดังกล่าวนี้ สมมูลกับสมการก่อนหน้านี้ (เส้นทาง geodesic เดียวกัน) เราสามารถหา affine parameter λ เหมาะๆ เพื่อที่จะทำให้สมการที่สอง (19)ลดรูปเป็นสมการแรก (18) ได้

> Exercise5 จงแสดงว่า มันจะมี affine parameter λ ที่เหมาะๆ ที่ทำให้สมการ (19) ลดรูปเป็นสมการ (18) ได้

ความหมายสำคัญอย่างหนึ่งของเส้นทาง geodesic คือ มันเป็นระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดในกาลอวกาศ ทั้งนี้ เพื่อที่จะให้เข้าใจความหมายในมุมนี้ เราอาจจะต้องหาสมการนี้โดยใช้หลักการแปรผันน้อยสุด ซึ่ง พี่น๊อต ลัญจกร จะมาบรรยายในคาบต่อไป