

# Least Action, Geodesics, and Curvature

4<sup>th</sup> Thailand School on High-Energy and  
Astro-Physics (SHEAP2022): Gravitational  
Wave

Lunchakorn Tannukij

*King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang,  
Bangkok, 10520, THAILAND*

July 12, 2022

## Contents

1	Least Action and Geodesics	3
2	Curvature	6
3	Tutorial	14

## 1 Least Action and Geodesics

ในการศึกษากลศาสตร์คลาสสิก นอกจากการศึกษาระบบทางฟิสิกส์ผ่านกลศาสตร์นิวตัน (Newtonian Mechanics) แล้ว การศึกษาระบบทางฟิสิกส์ผ่านกลศาสตร์ลากรองจ์ (Lagrange Mechanics) เป็นอีกวิธีหนึ่งที่ได้รับวามนิยม กลศาสตร์ของลากรองจ์นั้นมีรากฐานจากเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า แคลคูลัสของการแปรผัน (Calculus of Variation) โดยจะเน้นไปที่การหาเงื่อนไขที่ทำให้ฟังก์ชันนัล (Functional) มีค่าขีดสุด กล่าวคือ เราสนใจที่จะหาเงื่อนไขที่ทำให้  $F(y)$  ซึ่งเป็นฟังก์ชันของฟังก์ชัน  $y(x)$  (นั่นคือ  $F$  เป็นฟังก์ชันนัล) มีค่าขีดสุด ซึ่งฟังก์ชันนัล  $F$  นั้นเป็นอินทิกรัลของฟังก์ชัน  $J$  ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ  $y, y', x$  ดังสมการที่ (1)

$$F[y] = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{J}(y, \frac{dy}{dx}; x) dx. \quad (1)$$

เพื่อจะหาเงื่อนไขที่ทำให้ฟังก์ชันนัล  $F$  มีค่าขีดสุด เราจะต้องหารูปแบบของฟังก์ชัน  $y$  ที่ทำให้เมื่อหาอินทิกรัลในสมการที่ (1) แล้ว  $F$  จะมีค่าขีดสุด ซึ่งเงื่อนไขดังกล่าวเป็นไปตามสมการดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial J}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial y'} = 0. \quad (2)$$

สำหรับกลศาสตร์ลากรองจ์ เราสามารถหาสมการการเคลื่อนที่ (Equation of motion) ของระบบทางฟิสิกส์ได้โดยการหาค่าขีดสุดของฟังก์ชันนัล  $S$  ที่เรียกว่า แอคชัน (Action) ซึ่งนิยามดังนี้

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x, \dot{x}; t) dt, \quad (3)$$

ซึ่ง  $\mathcal{L} \equiv T - V$  โดยที่  $T$  คือพลังงานจลน์,  $V$  คือพลังงานศักย์ของระบบ, และ  $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$  สมการการเคลื่อนที่ของระบบที่บรรยายโดยสมการที่ (3) นั้นสามารถหาได้โดยใช้สมการที่ (2) ได้ดังนี้

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (4)$$

โดยเมื่อเราได้สมการการเคลื่อนที่ที่เหมาะสมจากสมการที่ (4) แล้ว นอกจากจะทำให้  $S$  มีค่าขีดสุดแล้ว  $S$  ยังมีค่าต่ำสุดอีกด้วย ดังนั้นเราจึงเรียกหลักการที่เราใช้ในการหาสมการการเคลื่อนที่ข้างต้นว่า หลักการแอคชันน้อยสุด (Least Action Principle)

ในลักษณะเดียวกัน เราสามารถใช้รูปนี้เดียวกันนี้ในการศึกษาทฤษฎีสนาม (เช่น สัมพัทธภาพทั่วไป) ได้เช่นกัน กล่าวคือ หากเราสนใจการวิวัฒนาการของสนาม  $\phi(x^\mu)$  ที่วิวัฒนาการใน 4 มิติที่บรรยายผ่านแอคชันดังนี้

$$S[\phi] = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi; x^\nu) d^4x, \quad (5)$$

แล้ว สมการการเคลื่อนที่ที่บรรยายการวิวัฒนาการของสนามดังกล่าวสามารถหาได้โดยใช้สมการต่อไปนี้

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = 0. \quad (6)$$

เราสามารถนำหลักการ แอคชันน้อยสุด (หรือแคลคูลัสของการแปรผัน) มาใช้ในการหาสมการจีโอเดสิก (geodesics) โดยพิจารณาเงื่อนไขที่ทำให้ระยะห่างระหว่าง 2 เหตุการณ์ในกาลอวกาศมีค่าน้อยที่สุด (ซึ่งถือเป็นค่าขีดสุด) ดิฟเฟอเรนเชียลของระยะห่าง (กำลังสอง) ระหว่าง 2 เหตุการณ์ในกาลอวกาศที่บรรยายด้วยเมตริกเทนเซอร์  $g_{\mu\nu}$  มีนิยามดังนี้

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (7)$$

พิจารณาอนุภาคที่มีมวลซึ่งมีระยะการเคลื่อนที่ในกาลอวกาศเป็นแบบไทมไลค์ กล่าวคือ  $ds^2 < 0$  เราสามารถนิยามเวลาพหุพอ (proper time) ได้ดังนี้

$$-(d\tau)^2 \equiv ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (8)$$

เราจะเห็นว่า แท้จริงแล้วปัญหาการหาเงื่อนไขที่ทำให้ระยะห่างระหว่าง 2 เหตุการณ์ในกาลอวกาศที่ใกล้ที่สุดนั้นก็คือการหาเงื่อนไขที่ทำให้เวลาพหุพอมีค่าน้อยที่สุด (สำหรับอนุภาคที่มีมวลนั้น  $ds^2 < 0$ ) สมมติให้  $\lambda$  เป็นพารามิเตอร์ในการบอกตำแหน่งของเส้นทาง  $x^\mu$  (นั่นคือ  $x^\mu(\lambda)$ ) เมื่ออินทิเกรตสมการที่ (8) จะได้

$$\tau = \int_a^b \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda. \quad (9)$$

จะเห็นว่า  $\tau$  นั้นเป็นฟังก์ชันของฟังก์ชัน  $x^\mu$  และอินทิกรัลทางขวาของสมการที่ (9) เป็นฟังก์ชันของทั้ง  $x^\mu$  และ  $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$  นั่นคือ  $\tau$  เป็นฟังก์ชันนัล และอยู่ในรูปเดียวกับสมการที่

(1) ดังนั้น ในการหาเงื่อนไขที่ทำให้เวลาพروبเพอร์มีค่าน้อยที่สุด จึงสามารถหาได้โดยการใช้สมการที่ (2) ดังนี้

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)} = 0, \quad L \equiv \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}. \quad (10)$$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณ จะพิจารณา  $\mathcal{L} = L^2$  แทน ดังนั้น เราจึงสนใจสมการดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)} = 0, \quad \mathcal{L} \equiv -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}. \quad (11)$$

จากสมการที่ (11) เราสามารถเขียนแต่ละเทอมได้เป็น

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = -\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)} = -2g_{\mu\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\lambda}, \quad (13)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)} = -2 \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} - 2g_{\mu\sigma} \frac{d^2 x^\sigma}{d\lambda^2}. \quad (14)$$

เมื่อแทนสมการที่ (12) และ (14) ลงในสมการที่ (11) จะได้

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (\partial_\rho g_{\alpha\sigma} + \partial_\sigma g_{\rho\alpha} - \partial_\alpha g_{\rho\sigma}) \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \\ & = \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

ซึ่งคือสมการที่แสดงถึงจีโอเดสิกของอนุภาคที่มีมวลแน่นอนว่าหากเราเลือกให้พารามิเตอร์  $\lambda$  เป็นเวลาพروبเพอร์  $\tau$  เราจะได้

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma = 0, \quad (16)$$

ตามที่เราได้ในบทก่อนหน้า นอกจากนี้ เราสามารถทำการพิสูจน์ในลักษณะเดียวกันเพื่อแสดงให้เห็นว่าสมการที่ (15) นั้นครอบคลุมในกรณีที่อนุภาคที่สนใจเป็นอนุภาคที่ไม่มีมวลได้อีกด้วย

**Exercise 1** ภายในวันพรุ่งนี้(แหละมั้ง) เราจะได้รู้จักผลเฉลยของสมการสนามไอน์สไตน์ที่ชื่อผลเฉลยชวาร์ซชิลด์ (Schwarzschild solution) ซึ่งเป็นผลเฉลยของเมตริกที่บรรยายกาลอวกาศของระบบที่มีสมมาตรทรงกลมและอยู่นิ่งในเวลา ซึ่งเป็นผลเฉลยที่ง่ายและใช้สำหรับบรรยายกาลอวกาศรอบๆดาวหนึ่งๆในเอกภพ เราจะยืมมาใช้ก่อน กำหนดชวาร์ซชิลด์เมตริกดังนี้

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (17)$$

i ใช้สมการจีโอเดสิก หาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคมีมวลบนกาลอวกาศแบบนี้ (แนะนำให้ใช้  $x^\mu = (ct, r, \theta, \phi)$  โดยยังไม่กำหนดให้  $c = 1$  เพื่อเอาไว้ทำข้อถัดไป)

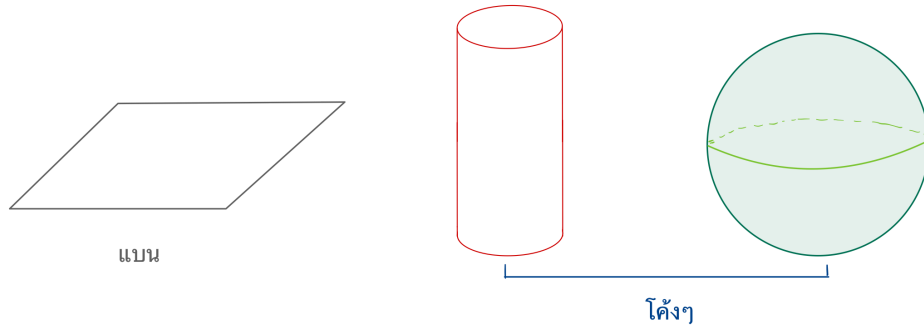
$$\text{นั่นคือลองหาคู่ประกอบของสมการ} \quad \ddot{x}^\mu + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma = 0. \quad (18)$$

ii โดยอาศัยสมการจีโอเดสิก จากในบทเรียน **ลองแสดงว่าความเร่งของอนุภาคมีมวล (บรรยายด้วยเวลาพหุพออร์)ที่กำลังตกลงสู่ดาว(ทรงกลม)ในแนวรัศมีนั้นมีค่าเป็น  $\frac{GM}{r^2}$  ตามกฎแรงดึงดูดระหว่างมวลของนิวตัน** (อีกนัยหนึ่งคือ ทำการประมาณสมการจีโอเดสิกที่ได้มาโดยอาศัยเงื่อนไข  $c \rightarrow \infty$ )

## 2 Curvature

ในทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป หลักการที่สำคัญอย่างหนึ่ง (ซึ่งเราจะได้เรียนในพรุ่งนี้) นั่นคือการมีอยู่ของมวลหรือ/และพลังงานจะทำให้เกิดการโค้งงอของกาลอวกาศ เพื่อทำความเข้าใจในหลักการนี้ การบรรยาย"ความโค้ง"ด้วยภาษาทางคณิตศาสตร์จึงเป็นสิ่งสำคัญในการศึกษาทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป

โดยปกติ คนเรารู้สึกถึง"ความโค้ง"โดยการ"มอง"หรือ"สัมผัส"วัตถุนั้นๆ เช่น เราสามารถจำแนกได้ว่าแผ่นกระดาษนั้น"แบน" กระป๋องทรงกระบอกนั้น"โค้ง" และลูกเทนนิส"กลมๆ"แน่นอนว่าการที่เรารู้สึกถึงความโค้งดังกล่าว นั้น เราสังเกตมันในฐานะของคนที่อยู่ข้างนอก ที่จริงแล้วเรายืนจากข้างนอก(บนพื้น)แล้วจึงใช้ประสาทสัมผัสกับวัตถุที่อาจจะอยู่



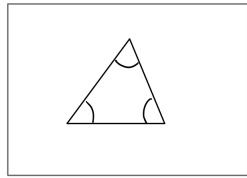
บนโต๊ะ แต่ถ้าวัดจินตนาการว่าเราเป็นสิ่งมีชีวิตบนโลกที่เราคิดว่าโลกเกือบจะเป็นทรงกลม เราจะสังเกตเห็นความโค้งของโลกแทบจะไม่ได้เลยในชีวิตประจำวัน นอกจากเราต้องลองเดินทางรอบโลกให้กลับมาที่จุดเดิม หรือหากมีมดไต่อยู่บนทรงกระบอก มดเองก็อาจจะไม่รับรู้ความโค้งของกระป๋องเนื่องจากมดมีขนาดเล็กมากนอกจากต้องตั้งมั่นลองเดินรอบกระป๋องดูเพื่อจะกลับมาที่จุดเดิม ดังนั้น การสังเกตถึงความโค้งของวัตถุใดวัตถุหนึ่งนั้นมีทั้งการสังเกตจากภายนอก และการสังเกตจากภายใน เราจึงแบ่ง"ความโค้ง"ออกมาได้หลักๆ 2 แบบ

1. Extrinsic curvature กล่าวคือความโค้งที่สังเกตโดยคนที่อยู่ข้างนอกระบบแล้วมองลงมาที่ระบบ ซึ่งมักจะเป็นการมองจากคนในมิติที่สูงกว่าวัตถุนั้นๆ
2. Intrinsic curvature กล่าวคือความโค้งที่สังเกตโดยคนที่อยู่บนผิวโค้งนั้น (เช่น คนหรือมดในตัวอย่างที่กล่าวข้างต้น) ซึ่งไม่จำเป็นต้องก้าวไปสู่มิติที่สูงกว่าเพื่อสังเกตเห็นความโค้ง

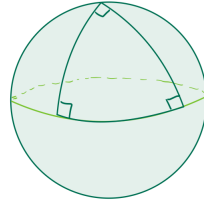
สำหรับการศึกษาทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปซึ่งเป็นการบรรยายปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์ในกาลอวกาศ 4 มิติ(เป็นอย่างน้อย) เรา(มนุษย์)เป็นสิ่งมีชีวิตที่รับรู้ได้เพียง 3-4 มิติเท่านั้น ดังนั้นสำหรับมนุษย์แล้ว จึงแทบเป็นไปไม่ได้เลยที่จะสังเกตความโค้งของกาลอวกาศจากมิติที่สูงขึ้นได้ หรืออย่างน้อยก็ยังเป็นไปไม่ได้สำหรับเทคโนโลยีในช่วงเวลานี้ที่ผู้เขียนเขียนอยู่ ดังนั้น ปริมาณ Intrinsic curvature จึงเป็นปริมาณที่เหมาะสมสำหรับศึกษาความโค้งของกาลอวกาศที่มนุษย์อาศัยอยู่

อย่างที่กล่าวข้างต้น มนุษย์สามารถรับรู้ถึงความโค้งของโลกได้โดยการพยายามเดินทางรอบโลกเพื่อให้กลับมาถึงจุดเดิม ในกรณีทั่วไป สถานการณ์นี้เทียบเท่ากับการพยายามสังเกตรูปปิดรูปหนึ่งที่ถูกเขียนลงบนพื้นผิวโค้ง ตัวอย่างเช่น หากเราวาดรูป

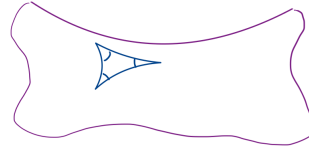
สามเหลี่ยมลงบนพื้นผิวรูปแบบต่างๆดังรูป สำหรับรูปสามเหลี่ยมบนผิวที่แบนราบ เรา



มุมรวม  $= 180^\circ$



มุมรวม  $> 180^\circ$

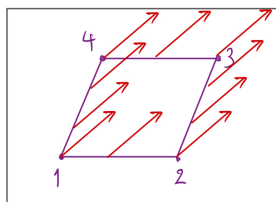


มุมรวม  $< 180^\circ$

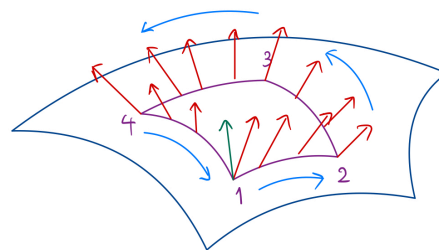
สามารถหาผลรวมมุมภายในรูปสามเหลี่ยมได้เป็น 180 องศาได้ ในขณะที่หากเราวาดรูปสามเหลี่ยมลงบนผิวทรงกลม เราสามารถวาดให้แต่ละมุมมีขนาดเป็นมุมฉากได้ (ดังรูป) และหากเราวาดรูปสามเหลี่ยมลงบนผิวทรงอานม้า เราจะได้รูปสามเหลี่ยมที่มีผลรวมมุมภายในน้อยกว่า 180 องศาได้ ซึ่งเนื่องจากสามเหลี่ยมเหล่านี้สามารถถูกวาดโดยมนุษย์ที่อาศัยอยู่บนพื้นผิวดังกล่าว นั่นคือมนุษย์คนนั้นๆสามารถบอกถึงการมีอยู่ของความโค้งบนพื้นผิวได้ กล่าวคือ มนุษย์คนนี้กำลังรับรู้ถึง Intrinsic curvature นั่นเอง

จากบทก่อนหน้า เราได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ใช้บรรยายพฤติกรรมของอนุพันธ์บนผิวโค้ง เราสามารถใช้แนวคิดเหล่านั้นมาปรับใช้เพื่อหาปริมาณทางคณิตศาสตร์ที่สื่อถึงความโค้งหรือ Intrinsic curvature ของผิวโค้งได้ หนึ่งในแนวคิดที่เราสามารถนำมาใช้เพื่อบอกความโค้งของผิวโค้งได้คือการเคลื่อนทางขนาน หรือ Parallel transport

หากเราสร้างเส้นทางปิดต่างๆเป็นรูปสี่เหลี่ยมบนผิวราบและผิวโค้งดังรูป แล้วสมมติ



ผิวราบ

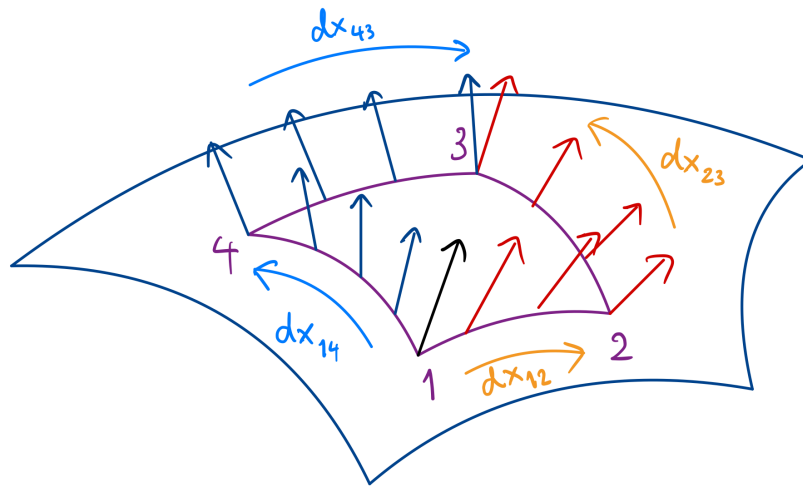


ผิวโค้ง

ว่าเราจะทำการเคลื่อนทางขนานกับเวกเตอร์สีแดงไปรอบเส้นทางปิดเหล่านี้ เราจะเห็นว่าสำหรับผิวราบแล้ว (รูปซ้าย) เมื่อเวกเตอร์นั้นถูกส่งไปตามเส้นทางปิดจนครบรอบแล้วเวกเตอร์ผลลัพธ์จะยังมีขนาดและทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์เดิมก่อนที่จะถูกส่งไปโดย



วิธีการเคลื่อนทางขนาน ในขณะที่เมื่อเราทำการเคลื่อนทางขนานกับเวกเตอร์สีแดงไปตามเส้นทางปิดบนผิวโค้ง (รูปขวา) เวกเตอร์ผลลัพธ์จะมีทิศทางที่ต่างออกไปจากทิศทางของเวกเตอร์เดิมก่อนถูกส่งไปตามเส้นทางปิด เราจะเห็นว่ากระบวนการส่งเวกเตอร์ไปตามเส้นทางปิดบนผิวโดยวิธีการเคลื่อนทางขนานจะทำให้เรารู้ถึงความโค้งของผิวนั้นๆ ได้ โดยการพิจารณาผลลัพธ์ของการส่งเวกเตอร์นั้นๆ เพื่อความสะดวกในการคำนวณ เราจะแบ่งเส้นทางปิดออกเป็น 2 เส้นทางดังรูป โดยเส้นทางแรกเป็นเส้นทางจากจุด 1 ไปจุด



2 แล้วไปจุด 3 ในขณะที่อีกเส้นทางหนึ่งเป็นเส้นทางจากจุด 1 ไปจุด 4 แล้วไปจุด 3

**Review การเคลื่อนทางขนาน** การส่งเวกเตอร์  $V^\mu$  ไปตามเส้นทางโดยวิธีการเคลื่อนทางขนานนั้นจะต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \frac{D}{d\lambda} V^\mu &= \frac{dx^\nu}{d\lambda} \nabla_\nu V^\mu = 0, \\ &= \frac{dV^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} \frac{dx^\nu}{d\lambda} V^\alpha = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

กล่าวคือ การส่งเวกเตอร์  $V^\mu$  โดยวิธีการเคลื่อนทางขนานนั้น การเปลี่ยนแปลงของ  $V^\mu$  จะต้องสัมพันธ์กับสมการต่อไปนี้

$$\delta V^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\alpha} V^\alpha dx^\nu. \quad (20)$$

สมการนี้แสดงให้เห็นว่า การเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์  $V^\mu$  ระหว่างการเคลื่อนทางขนานนั้นขึ้นอยู่กับสองปัจจัยหลักๆ คือ ตัวเวกเตอร์  $V^\mu$  เอง และ ระยะของการส่งเวกเตอร์  $dx^\mu$

**เส้นทาง**  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  ในการส่งเวกเตอร์  $V^\mu$  โดยการเลื่อนทางขนานจากจุด 1 ไปจุด 2 เงื่อนไขสำหรับการส่งเวกเตอร์โดยวิธีการเลื่อนทางขนานคือ

$$\delta_{12}V^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x_1)V^\alpha dx_{12}^\nu. \quad (21)$$

สังเกตว่า Christoffel symbol ในที่นี้ขึ้นกับตำแหน่งที่จุด 1 ดังนั้น เวกเตอร์ที่ถูกส่งจากจุด 1 ไปยังจุด 2 จะเป็นไปตามสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} V_{\text{at } 2}^\mu &= V^\mu + \delta_{12}V^\mu, \\ &= V^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x_1)V^\alpha dx_{12}^\nu. \end{aligned} \quad (22)$$

ในขณะที่เมื่อทำการเลื่อนทางขนานสำหรับเวกเตอร์ที่จุด 2 ไปยังจุด 3 แล้ว เงื่อนไขในการทำการเลื่อนทางขนานสำหรับสถานการณ์นี้คือ

$$\delta_{23}V^\mu = -\Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x_2)V_{\text{at } 2}^\alpha dx_{23}^\nu, \quad (23)$$

โดยที่ทั้ง Christoffel symbol และ  $V_{\text{at } 2}^\mu$  ในกรณีนี้ขึ้นกับตำแหน่งที่จุด 2 ซึ่งมีความสัมพันธ์กับจุด 1 ผ่านสมการ  $x_2 = x_1 + dx_{12}$  เพื่อเขียนสมการที่ (23) ให้ขึ้นกับตำแหน่งของจุด 1 เพียงตำแหน่งเดียว เราสามารถประมาณสมการที่ (23) โดยใช้อนุกรมเทเลอร์กับ Christoffel symbol ดังนี้

$$\Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x_2) = \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x_1) + \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x_1) dx_{12}^\sigma + \dots \quad (24)$$

ดังนั้น โดยใช้สมการที่ (22) (24) เราจึงสามารถเขียนสมการที่ (23) ได้เป็น

$$\begin{aligned} \delta_{23}V^\mu &= -\Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x_1)V^\alpha dx_{23}^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x_1)\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x_1)V^\beta dx_{12}^\gamma dx_{23}^\nu \\ &\quad - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x_1)V^\alpha dx_{12}^\sigma dx_{23}^\nu + \dots, \end{aligned} \quad (25)$$

และเวกเตอร์  $V^\mu$  ที่ถูกส่งไปจากจุด 1 ไปจุด 2 แล้วจึงไปจุด 3 จะเป็นไปตามสมการดังนี้

$$\begin{aligned} V_{\text{at } 3, (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)}^\mu &= V_{\text{at } 2}^\mu + \delta_{23}V^\mu, \\ &= V^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x_1)V^\alpha dx_{12}^\nu - \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x_1)V^\alpha dx_{23}^\nu \\ &\quad - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x_1)V^\alpha dx_{12}^\sigma dx_{23}^\nu + \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x_1)\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x_1)V^\beta dx_{12}^\gamma dx_{23}^\nu + \dots \end{aligned} \quad (26)$$

นั่นคือ เวกเตอร์  $V^\mu$  เมื่อถูกเลื่อนทางขนานไปตาม**เส้นทาง**  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  แล้ว เวกเตอร์ผลลัพธ์ที่จุด 3 จะเป็นไปตามสมการที่ (26)

**เส้นทาง**  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$  เราสามารถทำการเลื่อนทางขนานสำหรับเวกเตอร์  $V^\mu$  ในลักษณะเดียวกันกับการทำการเลื่อนทางขนานไปตามเส้นทาง  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  กล่าวคือเวกเตอร์  $V^\mu$  ที่จุด 3 ที่เป็นผลลัพธ์จากการเลื่อนทางขนานไปตามเส้นทาง  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$  เขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} V_{\text{at } 3, (1 \rightarrow 4 \rightarrow 3)}^\mu &= V^\mu - \Gamma_{\nu\alpha}^\mu(x_1)V^\alpha dx_{14}^\nu - \Gamma_{\nu\alpha}^\mu(x_1)V^\alpha dx_{43}^\nu \\ &\quad - \partial_\sigma \Gamma_{\nu\alpha}^\mu(x_1)V^\alpha dx_{14}^\sigma dx_{43}^\nu + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu(x_1)\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x_1)V^\gamma dx_{14}^\beta dx_{43}^\nu + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

หากเราพิจารณาเส้นทางง่ายๆ เช่น เส้นทางที่  $dx_{12} = dx_{43}$  และ  $dx_{23} = dx_{14}$  (เหมือนเราพยายามวาดเส้นทางเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า) จะเห็นว่าสมการที่ (27) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} V_{\text{at } 3, (1 \rightarrow 4 \rightarrow 3)}^\mu &= V^\mu - \Gamma_{\nu\alpha}^\mu(x_1)V^\alpha dx_{23}^\nu - \Gamma_{\nu\alpha}^\mu(x_1)V^\alpha dx_{12}^\nu \\ &\quad - \partial_\sigma \Gamma_{\nu\alpha}^\mu(x_1)V^\alpha dx_{23}^\sigma dx_{12}^\nu + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu(x_1)\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x_1)V^\gamma dx_{23}^\beta dx_{12}^\nu + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

นั่นคือ เวกเตอร์  $V^\mu$  เมื่อถูกเลื่อนทางขนานไปตาม**เส้นทาง**  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$  แล้ว เวกเตอร์ผลลัพธ์ที่จุด 3 จะเป็นไปตามสมการที่ (27)

เมื่อทำการเลื่อนทางขนานเวกเตอร์  $V^\mu$  ไปตามเส้นทาง 2 เส้นทางที่ประกอบกันเป็นเส้นทางปิดแล้ว เวกเตอร์ผลลัพธ์ที่เกิดจากการเลื่อนทางขนานไปตามทั้ง 2 เส้นทางจะมีค่าไม่เท่ากัน ผลต่างของการทำการเลื่อนทางขนานสำหรับเวกเตอร์  $V^\mu$  ไปตามเส้นทาง 2 เส้นทาง กล่าวคือเส้นทาง  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  และเส้นทาง  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3$  สามารถหาได้จากสมการที่ (26) และ (28) ดังนี้

$$\begin{aligned} &V_{\text{at } 3, (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3)}^\mu - V_{\text{at } 3, (1 \rightarrow 4 \rightarrow 3)}^\mu \\ &= (\partial_\nu \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu(x_1) - \partial_\sigma \Gamma_{\nu\alpha}^\mu(x_1) + \Gamma_{\nu\gamma}^\mu(x_1)\Gamma_{\sigma\alpha}^\gamma(x_1) - \Gamma_{\sigma\gamma}^\mu(x_1)\Gamma_{\nu\alpha}^\gamma(x_1)) \\ &\quad \times V^\alpha dx_{12}^\sigma dx_{23}^\nu + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

สังเกตว่าความต่างของการเลื่อนทางขนานไปตามเส้นทาง 2 เส้นทางดังกล่าวนั้นขึ้นกับปริมาณในวงเล็บในสมการที่ (29) นั่นคือขึ้นกับปริมาณดังต่อไปนี้

$$R_{\sigma\nu\alpha}^\mu = \partial_\nu \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\nu\alpha}^\mu + \Gamma_{\nu\gamma}^\mu \Gamma_{\sigma\alpha}^\gamma - \Gamma_{\sigma\gamma}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\gamma. \quad (30)$$

หากพื้นผิวที่เราสนใจเป็นพื้นผิวแบบแบนราบ การทำการเลื่อนทางขนานสำหรับเวกเตอร์ไปตามเส้นทางทั้ง 2 เส้นทางที่ประกอบเป็นเส้นทางปิดก็ไม่ควรที่จะต่างกับ กล่าวคือ  $R_{\sigma\nu\alpha}^\mu$  ควรจะมีค่าเป็น 0 เมื่อพื้นผิวที่พิจารณาเป็นพื้นผิวแบนราบ และควรจะมีค่าไม่เป็น

0 เมื่อพิจารณาปริมาณนี้บนพื้นผิวแบบอื่นๆ เราเรียก  $R^\mu_{\sigma\nu\alpha}$  นี้ว่าเทนเซอร์ความโค้งของรีมันน์ (Riemann Curvature Tensor) ซึ่งเป็นเทนเซอร์ที่มีข้อมูลความโค้งของพื้นผิวที่พิจารณา ในวันถัดๆไปเราจะใช้เทนเซอร์ความโค้งของรีมันน์กับกาลอวกาศที่เราสนใจ และใช้อธิบายความโค้งของกาลอวกาศสำหรับสมการสนามไอน์สไตน์

**สมบัติของเทนเซอร์ความโค้งของรีมันน์,  $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$**

I เทนเซอร์ความโค้งของรีมันน์สามารถสื่อถึง Commutator ของ Covariant derivative ได้ กล่าวคือสำหรับเวกเตอร์  $V^\mu$  ใดๆ

$$\nabla_\rho \nabla_\sigma V^\mu - \nabla_\sigma \nabla_\rho V^\mu = R^\mu_{\nu\rho\sigma} V^\nu. \quad (31)$$

และสำหรับโคเวกเตอร์  $w_\mu$  ใดๆ

$$\nabla_\rho \nabla_\sigma w_\mu - \nabla_\sigma \nabla_\rho w_\mu = -R^\nu_{\mu\rho\sigma} w_\nu. \quad (32)$$

สำหรับสมบัติข้อนี้ แนะนำผู้เข้าร่วมให้ลองพิสูจน์ด้วยตนเอง

II พิจารณาปริมาณ  $R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\lambda} R^\lambda_{\nu\rho\sigma}$  แล้ว จะสามารถเขียนสมบัติของ  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  ได้ดังนี้

- indices คู่หน้าจะมีสมบัติ antisymmetric

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} \quad (33)$$

- indices คู่หลังจะมีสมบัติ antisymmetric

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} \quad (34)$$

- เมื่อสลับ indices คู่หน้ากับคู่หลัง จะมีสมบัติ symmetric

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} \quad (35)$$

- ผลรวมของการสลับ indices 3 ตัวหลังแบบ cyclic จะมีค่าเป็น 0

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0 \quad (36)$$

- เอกลักษณะของ Bianchi (Bianchi identity)

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma} + \nabla_\mu R_{\nu\lambda\rho\sigma} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu\rho\sigma} = 0 \quad (37)$$

**Exercise 2** เมตริกเทนเซอร์ของพื้นผิวทรงกระบอกในพิกัดทรงกระบอกสามารถเขียนได้ดังนี้

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

หรืออาจกล่าวได้ว่าระยะห่างระหว่างจุด 2 จุดใดๆบนผิวทรงกระบอก (ไม่เอาฝาทรงกระบอก) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$ds^2 = dz^2 + r^2 d\theta^2, \quad (39)$$

โดย  $(x_1, x_2) = (z, \theta)$  เป็นพิกัดบนทรงกระบอกที่มีรัศมี  $r$

i คำนวณหาองค์ประกอบของ  $R^i_{jkl}$  สำหรับ  $i, j, k, l \in 1, 2$

ii ในสมการสนามของไอน์สไตน์ ปริมาณที่สื่อถึงความโค้งของกาลอวกาศที่เรา มักใช้กันคือเทนเซอร์ของริชชี (Ricci tensor) หรือ  $R_{\mu\nu}$  และสเกลาร์ของริชชี (Ricci scalar) หรือ  $R$  ซึ่งนิยามดังนี้

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}_{\mu\rho\nu}, \quad R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (40)$$

คำนวณหาองค์ประกอบของ  $R_{ij}$  สำหรับ  $i, j \in 1, 2$  และคำนวณหา  $R$

### 3 Tutorial

**Exercise 1** ภายในวันพรุ่งนี้(แหะละมั้ง) เราจะได้รู้จักผลเฉลยของสมการสนามไอน์สไตน์ที่ชื่อผลเฉลยชวาร์ชชิลด์ (Schwarzschild solution) ซึ่งเป็นผลเฉลยของเมตริกที่บรรยายกาลอวกาศของระบบที่มีสมมาตรทรงกลมและอยู่นิ่งในเวลา ซึ่งเป็นผลเฉลยที่ง่ายและใช้สำหรับบรรยายกาลอวกาศรอบๆดาวหนึ่งในเอกภพ เราจะยืมมาใช้ก่อน กำหนดชวาร์ชชิลด์เมตริกดังนี้

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (41)$$

i ใช้สมการจีโอเดสิก หาสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคมีมวลบนกาลอวกาศแบบนี้ (แนะนำให้ใช้  $x^\mu = (ct, r, \theta, \phi)$  โดยยังไม่กำหนดให้  $c = 1$  เพื่อเอาไว้ทำข้อถัดไป)

$$\text{นั่นคือลองหาค่าประกอบของสมการ} \quad \ddot{x}^\mu + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma = 0. \quad (42)$$

ii โดยอาศัยสมการจีโอเดสิก จากในบทเรียน **ลองแสดงว่าความเร่งของอนุภาคมีมวล (บรรยายด้วยเวลาพรีอเพอร์) ที่กำลังตกลงสู่ดาว(ทรงกลม)ในแนวรัศมีนั้นมีค่าเป็น  $\frac{GM}{r^2}$  ตามกฎแรงดึงดูดระหว่างมวลของนิวตัน** (อีกนัยหนึ่งคือ ทำการประมาณสมการจีโอเดสิกที่ได้มาโดยอาศัยเงื่อนไข  $c \rightarrow \infty$ )

**Exercise 2** เมตริกเทนเซอร์ของพื้นผิวทรงกระบอกในพิกัดทรงกระบอกสามารถเขียนได้ดังนี้

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

หรืออาจกล่าวได้ว่าระยะห่างระหว่างจุด 2 จุดใดๆบนผิวทรงกระบอก (ไม่เอาฝาทรงกระบอก) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$ds^2 = dz^2 + r^2 d\theta^2, \quad (44)$$

โดย  $(x_1, x_2) = (z, \theta)$  เป็นพิกัดบนทรงกระบอกที่มีรัศมี  $r$

i คำนวณหาองค์ประกอบของ  $R^i_{jkl}$  สำหรับ  $i, j, k, l \in 1, 2$

ii ในสมการสนามของไอน์สไตน์ ปริมาณที่สื่อถึงความโค้งของกาลอวกาศที่เรา มักใช้กันคือเทนเซอร์ของริชชี (Ricci tensor) หรือ  $R_{\mu\nu}$  และสเกลาร์ของริชชี (Ricci scalar) หรือ  $R$  ซึ่งนิยามดังนี้

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\rho}_{\mu\rho\nu}, \quad R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (45)$$

คำนวณหาองค์ประกอบของ  $R_{ij}$  สำหรับ  $i, j \in 1, 2$  และคำนวณหา  $R$