

สมการสนามไอน์สไตน์ (Einstein field equations)

metric signature $\{-1, 1, 1, 1\}$, units $c = G = 1$ unless otherwise stated

Disclaimer: lecture note ฉบับนี้ถูกเขียนขึ้นมาในระยะเวลาอันสั้น ถึงแม้ว่าผู้เขียนจะรู้ถึงขอบเขตเนื้อหาที่ผู้เขียนต้องรับผิดชอบมาเป็นเวลาเนิ่นนานแล้วก็ตาม ดังนั้นหากพบเจอที่ผิดใดๆ ไม่ว่าจะเป็นการสะกดคำ สมการ หรือการคำนวณผู้เขียนต้องขอภัยไว้ล่วงหน้า และยินดีแก้ไขตามที่ผู้อ่านทุกท่านเสนอแนะมา ขอขอบคุณครับ (สฤกษ์ชัย)

เอกสารประกอบการสอนชั้นนี้ถูกเตรียมขึ้นโดยใช้เนื้อหาจากอ้างอิงเหล่านี้เป็นหลัก [๑, ๒]

หลังจากในหัวข้อที่ผ่านมาเราได้ทำการนิยามเทนเซอร์ความโค้งรีมันด์ (Riemann curvature tensor) R^a_{bcd} และเรียนรู้เกี่ยวกับสมมาตรแบบต่างๆของเทนเซอร์ความโค้ง ในเนื้อหาส่วนนี้เราจะทำการนิยามสมการสนามไอน์สไตน์ ซึ่งเป็นสมการที่บรรยายความสัมพันธ์ระหว่างเรขาคณิตของกาลอวกาศและสสารพลังงาน

ดังนั้นเนื้อหาในส่วนนี้สามารถแบ่งออกได้เป็นสี่ข้อดังต่อไปนี้

- นิยามเทนเซอร์พลังงานโมเมนตัม (energy-momentum tensor)
- สมการสนามไอน์สไตน์ (Einstein field equations)
- ลิมิตนิวตัน (Newtonian limit)
- แอคชันไอน์สไตน์-ฮิลเบิร์ต (Einstein-Hilbert action)

1.1 เทนเซอร์พลังงานโมเมนตัม

พิจารณาเส้นโลก (world line) ของอนุภาคมีมวลหนึ่งตัว กำหนดให้เส้นดังกล่าวบรรยายได้ด้วย $x^a(\lambda)$ โดยที่ λ คือ curve parameter เวกเตอร์เส้นสัมผัสที่จุด P บนเส้นโลกดังกล่าวสามารถเขียนได้เป็น $\frac{dx^a}{d\lambda}$ สำหรับเส้นโลกของอนุภาคมีมวลเราสามารถเปลี่ยน $\lambda \rightarrow \tau$ เมื่อ τ คือ proper time ดังนั้นเวกเตอร์ความเร็วของอนุภาคที่จุดใดๆสามารถนิยามได้จากเวกเตอร์เส้นสัมผัส

$$u^a = \frac{dx^a}{d\tau}.$$

โดยที่ $u^a u_a = -1$ และในกรอบที่หยุดนิ่งเทียบกับอนุภาค เวกเตอร์ความเร็วจะสามารถเขียนได้เป็น $u^a = \{1, 0, 0, 0\}$ ดังนั้นเราสามารถนิยามเวกเตอร์โมเมนตัมสำหรับอนุภาคมวล m เคลื่อนที่ไปในทิศ x ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} p^a &= m u^a \\ &= \{\gamma m, \gamma m v, 0, 0\}. \end{aligned} \quad (๑.๑)$$

เมื่อ $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ สังเกตว่าองค์ประกอบเวลาของเวกเตอร์โมเมนตัมคือพลังงาน ในขณะที่องค์ประกอบส่วนตำแหน่งคือโมเมนตัม ดังนั้น $p_a p^a = -m^2$ และเราจะสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานและโมเมนตัมของอนุภาคได้

$$E = \sqrt{m^2 + p^2}.$$

เวกเตอร์โมเมนตัม (๑.๑) นั้นเพียงพอที่จะอธิบายอนุภาคหนึ่งตัว คำถามต่อมาก็คือถ้าเป็นระบบที่ประกอบมาจากอนุภาคหลายตัว เราจะทำอย่างไร?

ในกรณีของระบบอนุภาคเราจะพิจารณากลุ่มของอนุภาคในลักษณะเดียวกันกับ “ของไหล (fluid)” และสนใจเฉพาะ ปริมาณ ใน ระดับมหภาค (macroscopic) เช่น ความดัน ความหนาแน่น ความหนืด เป็นต้น อนุภาคแต่ละตัวในกลุ่มสามารถมีความเร็ว u^a เป็นของตัวเองได้ในขณะที่ตัวของไหลเองก็จะมีความเร็วรวมที่เป็นตัวแทนของระบบ เราสามารถนิยามระบบอนุภาคได้ด้วยเทนเซอร์สมมาตร (2,0) T^{ab} ที่เรียกว่า เทนเซอร์โมเมนตัมพลังงาน (energy-momentum tensor) โดยที่นิยามทางฟิสิกส์ของเทนเซอร์ดังกล่าวสามารถสรุปได้ดังนี้ T^{ab} คือฟลักซ์ของโมเมนตัม p^a ที่ไหลผ่านระนาบพื้นผิวคงที่ของ x^b

ลองพิจารณาส่วนเล็กๆของ ของไหล ในกรอบที่หยุดนิ่ง (rest frame) และถือว่าของไหล ไม่มีการเคลื่อนที่ (no bulk motion)

- T^{00} : พลังค์ของ p^0 (พลังงาน) ในทิศ x^0 (time) \rightarrow ความหนาแน่นพลังงานในกรอบหยุดนิ่ง
- $T^{0i} = T^{i0}$: ความหนาแน่นโมเมนตัม
- $T^{ij} = T^{ji}$: stress แรงที่กระทำระหว่างส่วนของของไหล
- T^{11} : แรงในแนวแกน x ต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ ที่ถูกกระทำจากส่วนของของไหลในทิศทาง $x \rightarrow$ ความดันในแนวแกน x , $P_i = T^{ii}$
- $T^{i \neq j}$: แรงเฉือนที่เกิดจากความหนืด

รูปแบบของของไหลที่สามารถใช้เป็นตัวแทนสารทั่วไปในเอกภพได้เป็นอย่างดีมีชื่อเรียกว่า ของไหลอุดมคติ (perfect fluid) ซึ่งอธิบายถึงสารที่สามารถอธิบายได้ด้วยปริมาณสองปริมาณคือ ความหนาแน่นพลังงาน ρ และ ความดัน P (isotropic pressure, ความดันเท่ากันในทุกทิศทาง) เทนเซอร์โมเมนตัมพลังงานของของไหลอุดมคติสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$T^{ab} = (\rho + P) u^a u^b + P \eta^{ab}. \quad (๑.๒)$$

สังเกตว่ารูปแบบของเทนเซอร์โมเมนตัมพลังงานด้านบนนิยามอยู่ในอวกาศแบบมินคาวสกี ในกรณีที่กาลอวกาศมีความโค้งเราสามารถเปลี่ยน $\eta^{ab} \rightarrow g^{ab}$ เราคาดหวังว่าหลักการอนุรักษ์พลังงานและโมเมนตัมก็ยังคงสามารถถูกนิยามได้ในทฤษฎีสัมพัทธภาพ หลักการดังกล่าวสามารถเขียนได้ในรูป $\partial_a T^{ab} = 0$ (และ $\partial_a \rightarrow \nabla_a$ ในกรณีที่มีความโน้มถ่วง) พิจารณาการอนุรักษ์พลังงานในกรณีของไหลในอุดมคติ

$$\partial_a [(\rho + P) u^a u^b] + \partial_a (P \eta^{ab}) = 0.$$

จากสมการข้างต้นเราสามารถแสดงได้ว่า

$$\partial_a (\rho u^a) + P \partial_a u^a = 0, \quad (๑.๓)$$

$$(\rho + P) (\partial_a u^b) u^a + (\eta^{ab} + u^a u^b) \partial_a P = 0. \quad (๑.๔)$$

สมการ ด้าน บน ทั้ง สอง คือ สมการ อนุรักษ์ พลังงาน ของ ของไหล อุดมคติ และ สมการ การเคลื่อนที่ ของ ของไหล อุดมคติ ตาม ลำดับ เรา อาจ พิจารณา สมการ ทั้ง สอง ใน ขอบเขต

ของกลศาสตร์แบบฉบับ $U^a = (1, u^i)$ เมื่อ $u^i \ll 1$ ดังนั้นในขอบเขตดังกล่าว $P \ll \rho$ เนื่องจาก ความดัน นั้น เกิด มา จาก การ เคลื่อนที่ สุ่ม ของ อนุภาค แต่ละ ตัว ใน ของไหล ในขอบเขตดังกล่าว (๑.๓-๑.๔) จะกลายเป็น

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (๑.๕)$$

$$\rho [\partial_t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}] \vec{u} = -\vec{\nabla} P. \quad (๑.๖)$$

จะ เห็น ว่า สมการ อนุรักษ์ พลังงาน นั้น ลด รูป เป็น สมการ ความ ต่อ เนื่อง (continuity equation) และ สมการ ออยเลอร์ ของ ของไหล (Euler equation for fluid)

1.2 สมการสนามไอน์สไตน์

หลังจากเรานิยามแหล่งกำเนิดความโค้งได้แล้ว ในส่วนนี้เราจะทำให้นิยามสมการสนามไอน์สไตน์ ลองพิจารณารเทนเซอร์ความโค้งของรีมันด์

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{db}^a - \partial_d \Gamma_{cb}^a + \Gamma_{ce}^a \Gamma_{db}^e - \Gamma_{de}^a \Gamma_{cb}^e.$$

เราสามารถนิยามเทนเซอร์ริคซี (Ricci tensor) ได้จาก

$$R_{bd} \equiv R_{bad}^a. \quad (๑.๗)$$

ซึ่งมีสมมาตรภายใต้การสลับ index bd . เราอาจลอง “เดา” ว่าสมการสนามไอน์สไตน์อาจจะสามารถเขียนได้ในรูปแบบต่อไปนี้

$$R_{ab} = \kappa T_{ab}. \quad (๑.๘)$$

เมื่อ κ คือค่าคงที่การแปรผัน จากหลักการอนุรักษ์พลังงาน $\nabla^a T_{ab} = 0 \Rightarrow \nabla^a R_{ab} = 0$ อย่างไรก็ตาม ไม่มีอะไรรับประกันว่าอนุพันธ์โควาเรียนท์ของเทนเซอร์ริคซีจะเป็นศูนย์ตลอด

ข้อ๑ พิสูจน์ว่า $\nabla^a R_{ab} = \frac{1}{2} \nabla_b R$ เมื่อกำหนดให้ $R \equiv g^{ab} R_{ab}$ คือสเกลาร์ริคซี

ดังนั้น $\nabla^a R_{ab} = \frac{1}{2} \kappa \nabla_b T$ เมื่อ $T \equiv g^{ab} T_{ab}$ หลักการอนุรักษ์พลังงานจะทำให้

$$\nabla_a T = 0$$

แสดงว่า T ต้องเป็นค่าคงที่ตลอดกาลอวกาศซึ่งเป็นไปไม่ได้ ทำให้สมการสนามข้างต้น (๑.๘) ยังไม่ใช่รูปแบบที่ถูกต้อง หากเรานิยาม $G_{ab} \equiv (R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab})$ เราจะพบว่าอนุพันธ์โควาเรียนท์ของเทนเซอร์ตัวนี้นั้นเป็นศูนย์ นั่นคือ $\nabla^a G_{ab} = 0$ ดังนั้นเราสามารถนิยามสมการสนามไอน์สไตน์ (Einstein field equations) ได้ดังต่อไปนี้

$$G_{ab} = \kappa T_{ab}. \quad (๑.๙)$$

เมื่อ G_{ab} คือเทนเซอร์ไอน์สไตน์ (Einstein tensor)

1.3 ลิมิตนิวตัน

ค่าคงที่ κ สามารถหาได้จากลิมิตนิวตัน เนื่องจากสมการสนามไอน์สไตน์ควรจะต้องลดรูปไปเป็นความโน้มถ่วงแบบนิวตันภายใต้ขอบเขตที่เหมาะสม ในทฤษฎีความโน้มถ่วงแบบนิวตันเราสามารถนิยาม ศักย์โน้มถ่วง Φ ได้จาก $-\nabla\Phi = a$ และศักย์โน้มถ่วงสามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการปัวซองได้ในลักษณะ

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (๑.๑๐)$$

เมื่อ ρ คือความหนาแน่นของสสาร เราจะพิจารณาว่าในลิมิตนิวตันทฤษฎีสัมพัทธภาพจะลดรูปไปอย่างไร ภายใต้ลิมิตดังกล่าวเราจะกำหนดให้

๑. $v \ll c$

๒. ความโน้มถ่วงมีค่าน้อย $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ เมื่อ $|h_{ab}| \ll 1$

๓. g_{ab} ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (time-independent)

ข้อที่หนึ่งหมายความว่า $\frac{dt}{d\tau} \gg \frac{dx^i}{d\tau}$ ดังนั้นสมการจีโอเดสิกส์จะประมาณได้เป็น

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^a \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0. \quad (๑.๑๑)$$

เนื่องจากข้อกำหนดที่สามเราทราบว่า $\Gamma_{00}^a = -\frac{1}{2}g^{ab}\partial_b g_{00}$

ข้อ๒ พิสูจน์ว่า $g^{ab} = \eta^{ab} - h^{ab}$

ดังนั้นสมการจีโอเดสิกส์ในลิมิตนิวตันจะสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\eta^{ab}\partial_b h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0. \quad (๑.๑๒)$$

เมื่อ $a = 0$ เราทราบว่า $\frac{dt}{d\tau} =$ ค่าคงที่ องค์ประกอบเชิงตำแหน่งของสมการจีโอเดสิกส์จึงกลายเป็น

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00}. \quad (๑.๑๓)$$

$$\therefore h_{00} = -2\Phi \quad (๑.๑๔)$$

จากสมการจีโอเดสิกส์เราทราบว่าในลิมิตนิวตัน เราทราบว่าองค์ประกอบเวลาของเมตริก เทนเซอร์นั้นมีความสัมพันธ์กับ ศักย์โน้มถ่วงแบบนิวตัน $g_{00} = -(1 + 2\Phi)$ หากเราทำการ contract สมการสนาม (๑.๙) ด้วย g^{ab} เราสามารถแสดงได้ว่า $R = -\kappa T$ ดังนั้นสมการสนามสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

$$R_{ab} = \kappa \left(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T \right). \quad (๑.๑๕)$$

ในลิมิตนิวตัน เทนเซอร์พลังงานโมเมนตัมของของไหลอุดมคติ (๑.๒) จะลดรูปเป็น

$$T_{ab} = \rho u^a u^b \quad (๑.๑๖)$$

เราสามารถละทิ้งความดัน P ได้เนื่องมาจากความดันเป็นผลจากการเคลื่อนที่ของอนุภาค ซึ่งเคลื่อนที่ช้ามากเทียบกับความเร็วแสง เราจะพิจารณาของไหลในกรอบนิ่ง กล่าวคือเวกเตอร์ความเร็วมีเฉพาะองค์ประกอบเวลายเท่านั้น $u^a = \{u^0, 0, 0, 0\}$ และจาก $u_a u^a = -1$ เราสามารถเขียน $u^0 = 1 + \frac{h_{00}}{2}$ และเนื่องจาก ρ ก็มีขนาดเล็กเนื่องจากกาลอวกาศ “เกือบ” จะราบเรียบ ดังนั้น

$$T_{00} \approx \rho$$

$$T \approx -\rho.$$

$$\therefore R_{00} \approx \frac{1}{2}\kappa\rho.$$

ดังนั้น

$$R_{00} = R_{0i0} \quad (๑.๑๗)$$

$$\approx \partial_i \Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}. \quad (๑.๑๘)$$

สมการสนามไอน์สไตน์ (เฉพาะองค์ประกอบเวลา) จะกลายเป็น $-\nabla^2 h_{00} = \kappa \rho = 2\nabla^2 \Phi$ ดังนั้นเมื่อเทียบกับสมการนิวตัน ค่าคงที่ κ จึงมีค่าเท่ากับ

$$\kappa = 8\pi G$$

ทำให้สุดท้ายแล้ว สมการสนามไอน์สไตน์ จะเขียนได้เป็น

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi GT_{ab}. \quad (๑.๑๙)$$

1.4 Einstein-Hilbert action

เรามีอีกหนึ่งวิธีที่เราสามารถพิสูจน์สมการสนามได้จากหลักการ least action เราจะเริ่มจากนิยามแอคชันที่จะนำไปสู่สมการสนามไอน์สไตน์ ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปของแอคชันไอน์สไตน์-ฮิลเบิร์ตดังนี้

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (๑.๒๐)$$

เราพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของแอคชันดังกล่าวเทียบกับการเปลี่ยนแปลงเล็กๆของเมตริกซ์ส่วนกลับ ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) R + \int d^4x \sqrt{-g} R_{ab} \delta g^{ab} + \int d^4x \delta \sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab}. \\ &\equiv \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3. \end{aligned}$$

ภายใต้การเปลี่ยนแปลงของเมตริกซ์เทนเซอร์ $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \delta g_{ab}$ ดังนั้นสัญลักษณ์คริสโตเฟลจะแปรผันไปในลักษณะ $\Gamma_{bc}^a \rightarrow \Gamma_{bc}^a + \delta \Gamma_{bc}^a$ ดังนั้นส่วนเปลี่ยนแปลงของเทนเซอร์รีมันด์จะสามารถเขียนได้เป็น

$$\delta R_{bcd}^a = \nabla_c (\delta \Gamma_{bd}^a) - \nabla_d (\delta \Gamma_{bc}^a) \quad (๑.๒๑)$$

โดยที่

$$\delta \Gamma_{bc}^a = -\frac{1}{2} \left[g_{be} \nabla_c (\delta g^{ea}) + g_{ce} \nabla_b (\delta g^{ea}) - g_{bh} g_{cf} \nabla^a (\delta g^{hf}) \right]$$

เพราะฉะนั้น

$$\delta S_3 = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_a \left[g_{bc} \nabla^a (\delta g^{bc}) - \nabla_e (\delta g^{ae}) \right]. \quad (๑.๒๒)$$

ข้อ ๓ จงพิสูจน์ (๑.๒๒) (optional)

อินทิกรัลใน (๑.๒๒) สามารถถูกพิจารณาว่าเป็นไดเวอร์เจนซ์ของเวกเตอร์ในส่วนปริมาตร ซึ่งมีค่าเทียบเท่ากับส่วนขอบเขตที่อนันต์จาก ทฤษฎีบทสโตกส์ (Stokes's theorem) อย่างไรก็ตามการแปรผันที่อนันต์นั้นถูกกำหนดให้เป็นศูนย์ ดังนั้น การแปรผันในส่วน δS_3 จึงไม่ส่งผลใดๆต่อสมการการเคลื่อนที่หรืออาจจะกล่าวได้ว่า $\delta S_3 = 0$

ต่อมาเราจะพิจารณาการแปรผันในส่วน δS_1 เราจะเริ่มจากการพิจารณาเมทริกซ์จัตุรัส (square matrix) M ซึ่งมีดีเทอร์มิแนนต์ไม่เป็นศูนย์ เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างดีเทอร์มิแนนต์ของ M กับเทรซได้ดังนี้ $\ln(\det M) = \text{Tr}(\ln M)$ การแปรผันของสมการดังกล่าวคือ

$$\frac{1}{\det M} \delta(\det M) = \text{Tr}(M^{-1} \delta M).$$

หากเรากำหนดให้ $M = g_{ab}$ ดังนั้น $\det M = g$ และ $\delta g = g g^{ab} \delta g_{ab} = -g g_{ab} \delta g^{ab}$

$$\begin{aligned} \therefore \delta \sqrt{-g} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g, \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab}. \end{aligned}$$

ดังนั้นการแปรผันของแอคชันไอน์สไตน์-ฮิลเบิร์ตจะกลายเป็น

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \delta S_1 + \delta S_2 + 0, \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right] \delta g^{ab} \end{aligned} \quad (๑.๒๓)$$

จากหลักการ least action $\delta S_{EH} = 0 \Rightarrow R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = G_{ab} = 0$ จะเห็นว่าเราได้สมการสนามไอน์สไตน์ในกรณีสุญญากาศ หากเราทำการกำหนดแอคชันในส่วนของสสาร S_M และเขียนแอคชันรวมของระบบเป็น $S = \frac{1}{16\pi G} S_{EH} + S_M$ ดังนั้นการแปรผันของแอคชันดังกล่าวจะกลายเป็น

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = \frac{1}{16\pi G} \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} = 0. \quad (๑.๒๔)$$

และหากเรานิยามเทนเซอร์โมเมนตัมพลังงานจาก $T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}}$ ดังนั้นการแปรผันของแอคชันรวมดังกล่าวจะให้สมการสนามไอน์สไตน์ในกรณีที่มีสสาร

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 8\pi G T_{ab}.$$

บทที่

2

ผลเฉลยของสมการสนามไอน์สไตน์ 1 (Solution of Einstein field equations I)

metric signature $\{-1, 1, 1, 1\}$, units $c = G = 1$ unless otherwise stated

Disclaimer: lecture note ฉบับนี้ถูกเขียนขึ้นมาในระยะเวลาอันสั้น ถึงแม้ว่าผู้เขียนจะรู้ถึงขอบเขตเนื้อหาที่ผู้เขียนต้องรับผิดชอบมาเป็นเวลานานแล้วก็ตาม ดังนั้นหากพบเจอที่ผิดใดๆ ไม่ว่าจะเป็นการสะกดคำ สมการ หรือการคำนวณผู้เขียนต้องขอภัยไว้ล่วงหน้า และยินดีแก้ไขตามที่ผู้อ่านทุกท่านเสนอแนะมา ขอขอบคุณครับ (สุภัคชัย)

เอกสารประกอบการสอนชั้นนี้ถูกเตรียมขึ้นโดยใช้นี้อหากอ้างอิงเหล่านี้เป็นหลัก [๑, ๒]

ดังนั้นเนื้อหาในส่วนนี้สามารถแบ่งออกได้เป็น

- การแก้สมการสนามไอน์สไตน์
- ผลเฉลยชวาร์ซชิลด์ (Schwarzschild solution)

2.1 การแก้สมการสนามไอน์สไตน์

การแก้สมการสนามไอน์สไตน์เพื่อหาผลเฉลยทั่วไปนั้นทำได้ค่อนข้างยาก เนื่องจากสมการสนามมีความซับซ้อนและเป็นสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสองที่ไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งเป็นการยากที่จะหาผลเฉลยทั่วไปในรูปแบบแม่นยำตรง (exact solution) อย่างไรก็ตามในปี ๑๙๑๖ คาร์ล ชวาร์ซชิลด์ (Karl Schwarzschild) ค้นพบผลเฉลยรูปแบบแม่นยำตรงของสมการสนามไอน์สไตน์เป็นครั้งแรก ชวาร์ซชิลด์แก้สมการสนามภายใต้เงื่อนไขสามข้อ

๑. พิจารณาระบบที่มีสมมาตรทรงกลม (spherical symmetry)
๒. กาลอวกาศไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา (static)
๓. พิจารณาสมการสนามกรณี สุญญากาศ (vacuum field equations)

จากเงื่อนไขข้อที่หนึ่งและสองทำให้เราสามารถเขียนไลน์อิลลิเมนต์อยู่ในรูปสมมาตรทรงกลมทั่วไปได้ดังต่อไปนี้

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (๒.๑)$$

สมการสนามกรณีสุญญากาศแสดงถึงบริเวณของกาลอวกาศที่ไม่มีสสารปรากฏอยู่ ดังนั้น เทนเซอร์โมเมนต์พลังงานจึงมีค่าเป็นศูนย์นั้นทำให้ในกรณีนี้สมการสนามจะลดรูปเป็น

$$R_{ab} = 0. \quad (๒.๒)$$

โดยปกติแล้วในกาลอวกาศสี่มิติสมการข้างต้นจะประกอบไปด้วยสมการอนุพันธ์ ๑๐ สมการอย่างไรก็ตามด้วยเมตริกซ์เทนเซอร์ (๒.๑) สมการสนามไอน์สไตน์จะเหลืออยู่เพียงสามสมการที่เป็นอิสระจากกันเท่านั้น

$$R_{00} = \frac{A'}{rB} - \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A''}{2B} = 0, \quad (๒.๓)$$

$$R_{11} = \frac{B'}{rB} + \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A''}{2A} = 0, \quad (๒.๔)$$

$$R_{22} = 1 - B^{-1} + \frac{r}{2B} \left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) = 0. \quad (๒.๕)$$

และ $R_{33} = R_{22} \sin^2\theta = 0$

ข้อ๔ พิสูจน์ สมการสนามทั้งสามองค์ประกอบ

พิจารณา $\frac{B}{A} \times R_{00} + R_{11}$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} &= 0, \\ \therefore AB &= C_1 \end{aligned}$$

เมื่อ C_1 คือค่าคงที่ ดังนั้น (๒.๕) จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} C_1 &= A + rA' \\ \therefore A &= C_1 \left(1 + \frac{C_2}{r} \right) \\ B &= \left(1 + \frac{C_2}{r} \right)^{-1} \end{aligned}$$

เมื่อ C_2 เป็นค่าคงที่การอินทิเกรต ค่าคงที่เหล่านี้สามารถหาได้จากการเปรียบเทียบกับองค์ประกอบเวลาของเมทริกซ์เทนเซอร์ในลิมิตนิวตัน $g_{00} = -(1 + 2\Phi)$ ดังนั้น

$$C_1 = 1 \quad C_2 = 2\Phi r = -2GM \quad (๒.๖)$$

เมื่อ M คือมวลของวัตถุทรงกลมที่เรากำลังพิจารณาดังนั้น ผลเฉลยชวาร์ซชิลด์คือ

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (๒.๗)$$

สังเกตว่าเมื่อให้ $M = 0$ หรือพิจารณากรณีที่ $r \rightarrow \infty$ ผลเฉลยดังกล่าวจะลดรูปไปเป็นกาลอวกาศแบบมินคาวสกี (ในระบบพิกัดทรงกลม) คุณสมบัติดังกล่าวเรียกว่า asymptotic flatness

2.2 ผลเฉลยชวาร์ซชิลด์

กาลอวกาศแบบชวาร์ซชิลด์ (๒.๗) บรรยายถึง กาลอวกาศรอบวัตถุทรงกลมมวล M ที่ไม่หมุน และไม่มีประจุไฟฟ้า นอกจากนั้นเรายังทราบว่าคำตอบดังกล่าวคือผลเฉลยของสมการสนามไอน์สไตน์แบบแม่นยำในกรณีสุญญากาศ ที่จริงแล้วผลเฉลยดังกล่าวเป็นผลเฉลยแบบยูนิค (unique solution) ของสมการสนามไอน์สไตน์ที่มีสมมาตรแบบทรงกลม กล่าวคือหากเราพิจารณาระบบใดๆ ที่มีสมมาตรทรงกลมที่เป็นผลเฉลยของสมการสนามไอน์สไตน์ในสุญญากาศ กาลอวกาศภายนอกจะบรรยายด้วยผลเฉลยชวาร์ซชิลด์เสมอ ข้อความดังกล่าวได้รับการพิสูจน์ในปี ๑๙๒๓ โดย จอร์จ เดวิด เบิร์กคอฟ (George David Birkhoff) และทฤษฎีบทดังกล่าวถูกเรียกว่า Birkhoff's theorem ดังนั้นการสันนิษฐานว่ามีของดาวจะไม่ปลดปล่อยคลื่นความโน้มถ่วงออกมา

ผลเฉลยชวาร์ชชิลด์มีจุดเอกฐานอยู่สองแห่ง

$$r = 0, \quad r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

ทั้งสองจุดจะทำให้ผลเฉลย (๒.๗) มีค่าเป็นอนันต์ซึ่งแสดงถึงบริเวณที่ความโน้มถ่วงมีค่าเป็นอนันต์ด้วยเช่นเดียวกัน ที่ $r = 0$ หรือที่จุดศูนย์กลางของวัตถุตั้งกล่าวกาลอวกาศจะมีความโค้งเป็นอนันต์ทำให้เราไม่สามารถตีความทางฟิสิกส์เกี่ยวกับจุดดังกล่าวได้ รัศมี $r = r_s$ ถูกเรียกว่ารัศมีชวาร์ชชิลด์ (Schwarzschild radius) รัศมีดังกล่าวถูกใช้ในการระบุขนาดของวัตถุความโน้มถ่วงสูงดังกล่าว ในกรณีที่วัตถุทรงกลมมีรัศมีน้อยกว่าหรือเท่ากับ r_s วัตถุชนิดนั้นจะถูกเรียกว่าหลุมดำและรัศมีดังกล่าวจะถูกเรียกว่าขอบฟ้าเหตุการณ์ (event horizon) เราจะมาลองทำความเข้าใจว่าขอบฟ้าเหตุการณ์ของหลุมดำคืออะไร

ลองพิจารณาเส้นโลกของโฟตอนเคลื่อนที่ในสองมิติภายใต้กาลอวกาศแบบมินคาวสกี $0 = ds^2 = -dt^2 + dx^2$ ดังนั้น

$$\frac{dt}{dx} = \pm 1$$

สมการด้านบนจะนิยามขอบเขตของกรวยแสง (light cone) ในกาลอวกาศแบบมินคาวสกีที่พิจารณาสถานการณ์เดียวกันสำหรับกาลอวกาศชวาร์ชชิลด์

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}.$$

เราสามารถวิเคราะห์สมการด้านบนได้ในสามบริเวณ *I* $r \rightarrow \infty$, *II* $r \rightarrow r_s$, *III* $r < r_s$ ในบริเวณ *I* สมการด้านบนลดรูปไปเป็นกรณีกาลอวกาศแบบมินคาวสกี ในบริเวณ *II* กรวยแสงเริ่มชันมากขึ้นเรื่อยๆจนกระทั่งความชันเป็นอนันต์ที่ $r = r_s$ บริเวณ *III* ความหมายของอวกาศและเวลาสลับกัน

อย่างไรก็ตามภาวะเอกฐานที่ขอบฟ้าเหตุการณ์เป็นเพียงภาวะเอกฐานเทียมที่เกิดมาจากการเลือกใช้ระบบพิกัดเท่านั้น (coordinate singularity) ต้องอย่าลืมว่าทั้ง g_{ab} และ R^a_{bcd} นั้นเป็นปริมาณที่ขึ้นกับระบบพิกัด กล่าวคือหน้าตาของเทนเซอร์ทั้งสองจะเปลี่ยนไปตามระบบพิกัดที่เราเลือกใช้ ดังนั้นเราจำเป็นต้องพิจารณาปริมาณที่นิยามความโค้งและเป็นสเกลาร์เราสามารถนิยามสเกลาร์เครชมัน (Kretschmann scalar)

$$R^{abcd}R_{abcd} = \frac{48M^2}{r^6}.$$

สังเกตว่า $r = 0$ ทำให้ปริมาณดังกล่าวเป็นอนันต์ ในขณะที่ $r = r_s = 2M$ นั้นมีค่าจำกัด นั้นแสดงว่าภาวะเอกฐานที่เกิดขึ้นที่ขอบฟ้าเหตุการณ์สามารถถูกกำจัดไปได้จากการแปลงระบบพิกัด

ต่อมาเราจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคในกาลอวกาศแบบชวาร์ชชิลด์ สมการที่บรรยายเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคคือสมการจีโอเดสิกส์

$$\ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c = 0.$$

เมื่อ $\dot{x}^a = \frac{dx^a}{d\sigma}$ และ σ คือ curve parameter ดังนั้นสมการจีโอเดสิกส์เมื่อเมทริกซ์เทนเซอร์เป็นชวาร์ชชิลด์

$$At = E, \quad (๒.๘)$$

$$\ddot{r} + \frac{1}{2}AA'\dot{t}^2 - \frac{A'}{2A}\dot{r}^2 - Ar\dot{\theta}^2 - Ar\sin^2\theta\dot{\phi}^2 = 0, \quad (๒.๙)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0, \quad (๒.๑๐)$$

$$r^2\sin^2\theta\dot{\phi} = h. \quad (๒.๑๑)$$

เมื่อค่าคงที่ E, h คือพลังงานและโมเมนตัมเชิงมุมตามลำดับ อีกหนึ่งสมการที่มีประโยชน์คือ $\epsilon = g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b$ เมื่อ $\epsilon = 0, -1$ สำหรับ x^a ที่เป็น null และ timelike curve ตามลำดับดังนั้น

$$-A\dot{t}^2 + A^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 = \epsilon. \quad (๒.๑๒)$$

หากเราพิจารณาเฉพาะอนุภาคที่เคลื่อนที่ในระนาบศูนย์สูตร (equatorial plan) $\theta = \pi/2$ สมการทั้งหมดข้างต้น (๒.๘-๒.๑๒) จะลดรูปเป็น

$$At = E,$$

$$\ddot{r} + \frac{1}{2}AA'\dot{t}^2 - \frac{A'}{2A}\dot{r}^2 - Ar\dot{\phi}^2 = 0,$$

$$r^2\dot{\phi} = h,$$

$$-A\dot{t}^2 + A^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = \epsilon. \quad (๒.๑๓)$$

ดังนั้นสมการ (๒.๑๓) สามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการพลังงานที่ใช้ในการวิเคราะห์สเกียรภาพของวงโคจร

$$\dot{r}^2 + \left(\frac{h^2}{r^2} - \epsilon\right)A = E^2.$$

อีกหนึ่งสมการที่มีประโยชน์คือ สมการที่บ่งบอกถึงรูปร่างของวงโคจร ซึ่งสามารถหาได้จากการเขียน $r(\phi)$ ดังนั้น $\frac{dr}{d\sigma} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\phi}$ และนิยามตัวแปร $u \equiv 1/r$ ดังนั้นสมการพลังงานด้านบนจะสามารถถูกเขียนในรูป

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{M}{h^2}c + 3Mu^2.$$

จากสมการดังกล่าวเราจะเห็นได้ว่าเทอมที่ขึ้นกับ u^2 คือส่วนที่มาจากสัมพัทธภาพทั่วไปนั้น ทำให้วงโคจรของอนุภาคในสัมพัทธภาพทั่วไปแตกต่างจากกลศาสตร์แบบนิวตัน

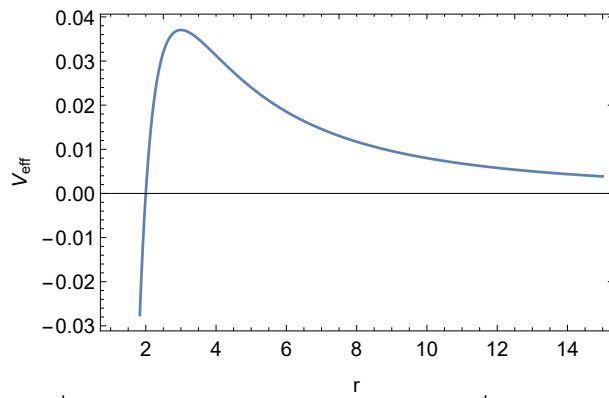
นอกจากสมการพลังงานและสมการวงโคจร เราสามารถวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของโฟตอนรอบๆ หลุมดำแบบชวาร์ซชิลด์ได้ ลองพิจารณาทรงกลมโฟตอน (photon sphere) ซึ่งเป็นบริเวณทรงกลมรอบๆ หลุมดำที่โฟตอนเคลื่อนที่ด้วยวงโคจรแบบวงกลม (circular motion) ดังนั้นที่รัศมีทรงกลมโฟตอน $r = r_p, \dot{r} = \ddot{r} = 0$ สมการจีโอเดสิกส์จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} -At^2 + r^2\dot{\phi}^2 &= 0, \\ \frac{1}{2}AA'\dot{t}^2 - Ar\dot{\phi}^2 &= 0. \\ \therefore A' - \frac{2A}{r} &= 0, \\ r = r_p &= 3M \end{aligned} \quad (๒.๑๔)$$

รัศมีดังกล่าวคือรัศมีของทรงกลมโฟตอนที่อยู่ด้านนอกของขอบฟ้าเหตุการณ์ อย่างไรก็ตาม เราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่าสำหรับกาลอวกาศแบบชวาร์ซชิลด์ เราจะไม่สามารถมีวงโคจรวงกลมที่เสถียรสำหรับโฟตอนได้ พิจารณาสมการพลังงาน (๒.๑๔) อีกครั้ง

$$\frac{\dot{r}^2}{h^2} + V_{eff}(r) = \frac{1}{b^2} \equiv \left(\frac{h}{E}\right)^2,$$

เมื่อศักย์ยังผล (effective potential) คือ $V_{eff} = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ และ b คือ impact parameter เราพบว่าศักย์ยังผลดังกล่าวมีค่าเป็นศูนย์ที่ขอบฟ้าเหตุการณ์ และมีค่าสูงสุดเพียงจุดเดียวที่ $V_{max}(r_p) = \frac{1}{27M^2}$ (ดูรูปประกอบที่ ๒.๑) ดังนั้นที่รัศมีทรงกลมโฟตอน อนุภาคโฟตอนจะโคจรอยู่ในวงโคจรที่ไม่เสถียร



รูปที่ ๒.๑: รูปศักย์ยังผลในกรณีโฟตอน เมื่อให้ $M = 1$

บทที่

3

การรบกวนหลุมดำ 1 (Black hole perturbation I)

metric signature $\{-1, 1, 1, 1\}$, units $c = G = 1$ unless otherwise stated

Disclaimer: lecture note ฉบับนี้ถูกเขียนขึ้นมาในระยะเวลาอันสั้น ถึงแม้ว่าผู้เขียนจะรู้ถึงขอบเขตเนื้อหาที่ผู้เขียนต้องรับผิดชอบมาเป็นเวลานานแล้วก็ตาม ดังนั้นหากพบเจอที่ผิดใดๆ ไม่ว่าจะเป็นการสะกดคำ สมการ หรือการคำนวณผู้เขียนต้องขอภัยไว้ล่วงหน้า และยินดีแก้ไขตามที่ผู้อ่านทุกท่านเสนอแนะมา ขอขอบคุณครับ (สุภัคชัย)

เนื้อหาในส่วนนี้ถูกใช้ในการบรรยายในงาน Mini School and Workshop on Cosmology and Black Hole Physics in Thailand ที่จัดขึ้นที่วิทยาลัยคิงส์วอเตอร์ระดับรากฐาน มหาวิทยาลัยลอนดอน เมื่อวันที่ 13-15 มิถุนายน 2022

เอกสารประกอบการสอนชิ้นนี้ถูกเตรียมขึ้นโดยใช้เนื้อหาจากอ้างอิงเหล่านี้เป็นหลัก [๓]

เนื้อหาในส่วนนี้ จะ กล่าว ถึง ทฤษฎี การ รบกวน หลุม ดำ แบบ เชิง เส้น (linear perturbation) อธิบาย ถึง แนวคิด และ ความ สำคัญ ของ การ ศึกษา หลุม ดำ ใน แง่มุม ดัง กล่าว หลังจากนั้น จะ ทำการ แนะนำ ให้ รู้จัก กับ สมการ ที่ บรรยาย ถึง การ รบกวน หลุม ดำ และการคำนวณเพื่อหาความถี่ของการสั่นของหลุมดำ

ดังนั้นเนื้อหาในส่วนนี้สามารถแบ่งออกได้เป็น

- แนะนำเบื้องต้น
- โหมดกึ่งปกติ (quasinormal modes, QNMs)
- ค่าความถี่กึ่งปกติของหลุมดำ (quasinormal frequency)

3.1 แนะนำเบื้องต้น

หลังจากที่เราทราบแล้วว่าหลุมดำเป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการสนามไอน์สไตน์ (๑.๙) เราจะมั่นใจได้อย่างไรว่าผลเฉลยดังกล่าวสามารถใช้อธิบายหลุมดำที่มีอยู่ในธรรมชาติได้จริง หนึ่งในวิธีตรวจสอบคือการพิจารณาว่าผลเฉลยหลุมดำนั้นตอบสนองอย่างไรต่อการถูกรบกวน หากผลเฉลยดังกล่าวไม่เปลี่ยนแปลงหลังถูกรบกวนเราอาจจะกล่าวได้ว่าหลุมดำนั้นมีเสถียรภาพ (อย่างน้อยก็ภายในขอบเขตของการรบกวน) เนื่องจากหลุมดำในธรรมชาตินั้นไม่ได้อยู่อย่างโดดเดี่ยวแต่ถูกรายล้อมไปด้วยสสารต่างๆมากมาย (ซึ่งอาจจะพิจารณาเป็นการรบกวนหลุมดำ) เราจึงสนใจว่าหลุมดำจะมีพฤติกรรมอย่างไรภายใต้สถานการณ์ดังกล่าว เนื้อหาในตอนนี้เราจะพิจารณาเฉพาะการรบกวนหลุมดำเชิงเส้น ซึ่งหมายความอนุภาคที่ใช้เป็นตัวรบกวนหลุมดำจะไม่ทำให้เรขาคณิตของกาลอวกาศเปลี่ยนแปลงไป

ลองจินตนาการถึง เครื่องดนตรีใน กลุ่มเครื่องสาย การตี สี กด จะทำให้สายของเครื่องดนตรีชนิดนั้นๆ สั่น และให้กำเนิดเสียงออกมา หากเราละทิ้งการสูญเสียพลังงาน รูปแบบการสั่นดังกล่าวจะถูกอธิบายด้วยโหมดปกติ (normal modes) ซึ่งความถี่ของการสั่น จะ บรรยาย ด้วย จำนวนจริง ใน ทำนอง เดียวกัน หาก เรา ทำการ รบกวน หลุมดำ หลุมดำ จะ สั่น และ ปลด ปล่อย พลังงาน ออกมา ใน รูป ของ คลื่น ความโน้มถ่วง โหมด การสั่น ของ หลุมดำ จะ ถูก อธิบาย ด้วย สิ่ง ที่ เรียกว่า โหมดกึ่งปกติ (quasinormal modes) ด้วยความถี่ที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน (complex frequency) ในระบบหลุมดำคู่ (binary black holes) ที่โคจรรอบกันและกัน ระบบดาวคู่ดังกล่าวจะสูญเสียพลังงานไปในรูปของคลื่นความโน้มถ่วงจนกระทั่งหลุมดำทั้งสองชนกันและหลอมรวมกันพร้อมกับปลดปล่อยคลื่นความโน้มถ่วงที่มีแอมพลิจูดสูงออกมา หลังการรวมตัว หลุมดำใหม่ที่เกิดขึ้นจะยังคงสั่นอย่างต่อเนื่องซึ่งโหมดการสั่นดังกล่าวจะถูกบรรยายได้ด้วยโหมดกึ่งปกติและความถี่ที่สอดคล้องกับโหมดกึ่งปกติจะขึ้นอยู่กับปริมาณที่ใช้นิยามหลุมดำเพียงเท่านั้น

3.2 โหมดกึ่งปกติ

เราลองสมมติว่ามีสนามสเกลาร์อยู่ในกาลอวกาศที่มีสมมาตรทรงกลมและหยุดนิ่ง เราจะสมมติว่าสนามสเกลาร์ไม่มีผลต่อเรขาคณิตของกาลอวกาศ ดังนั้นเรากำลังพิจารณาการ

รบกวนเชิงเส้นเท่านั้น แอคชันของระบบดังกล่าวสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[R + \frac{1}{2} g^{ab} \nabla_a \Phi \nabla_b \Phi \right]. \quad (๓.๑)$$

เมื่อ g คือดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกเทนเซอร์ (determinant of metric tensor) และเมตริกเทนเซอร์ของกาลอวกาศนิยามด้วย

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + f^{-1}(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (๓.๒)$$

สมการการเคลื่อนที่ของสนามสเกลาร์คือสมการไคลน์-กอร์ดอน (Klein-Gordon equation)

$$\nabla_a \nabla^a \Phi = 0. \quad (๓.๓)$$

เราจะสมมติว่าสนามสเกลาร์สามารถถูกแยกเป็นองค์ประกอบต่างๆดังนี้

$$\Phi = e^{-i\omega t} \frac{R(r)}{r} Y(\theta, \varphi), \quad (๓.๔)$$

เมื่อ $Y(\theta, \varphi)$ คือ spherical harmonics ในสมิตติซึ่งสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$\frac{1}{Y \sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta \partial_\theta Y) + \frac{1}{Y \sin^2\theta} \partial_{\varphi\varphi} Y = -\ell(\ell+1). \quad (๓.๕)$$

แทนค่า (๓.๔) ลงไปในสมการ (๓.๓) ดังนั้น

$$0 = \frac{d^2 R}{dr_*^2} + (\omega^2 - V(r)) R, \quad (๓.๖)$$

$$V(r) = f \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \right) \quad (๓.๗)$$

เมื่อ r_* คือ tortoise coordinate $dr_* = f^{-1} dr$ สมการ (๓.๖) เป็นสมการที่บรรยายการรบกวนหลุมดำด้วยสนามสเกลาร์ที่ไม่มีมวล หรือที่เรียกว่าสมการ Regge-Wheeler

ข้อ๑ พิสูจน์สมการ (๓.๖) โดยเริ่มจาก (๓.๓)

หากเราพิจารณากาลอวกาศแบบชวาร์ซชิลด์ดังนั้น $f = (1 - \frac{2M}{r})$ เพราะฉะนั้น

$$r_* = r + 2M \ln(r - 2M).$$

ดังนั้น $2M < r < \infty$ และ $-\infty < r_* < \infty$ เพราะฉะนั้น $V \rightarrow 0$ เมื่อ $r_* \rightarrow \pm\infty$ ผลเฉลยโดยทั่วไปของ (๓.๖) จะสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} R &\sim e^{\pm i\omega r_*}, & r_* &\rightarrow -\infty, \\ R &\sim e^{\pm i\omega r_*}, & r_* &\rightarrow \infty, \end{aligned}$$

เงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับโหมดการสั่นกึ่งปกติก็คือ

$$\begin{aligned} R &\sim e^{-i\omega r_*}, & r_* &\rightarrow -\infty, \\ R &\sim e^{i\omega r_*}, & r_* &\rightarrow \infty, \end{aligned}$$

นั่นคือมีเฉพาะคลื่นที่วิ่งเข้าไปที่ขอบฟ้าเหตุการณ์ (เราไม่ได้พิจารณาถึงผลของการแผ่รังสีของฮอว์กิง) และมีเฉพาะคลื่นวิ่งออกที่อินฟินิตี้ ความถี่ ω ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตดังกล่าวจึงสามารถถูกเขียนได้ในรูป

$$\omega = \omega_R \pm \omega_I.$$

โดยที่ความถี่ดังกล่าว จะมีค่าไม่ต่อเนื่องและเป็นจำนวนเชิงซ้อน ส่วนจริงของความถี่จะบรรยายถึงพลังงานของสนามสเกลาร์ ในขณะที่ส่วนเชิงซ้อนจะแสดงถึงการลดลงหรือเพิ่มขึ้นตามเวลาของคลื่นสเกลาร์ ในส่วนถัดไปเราจะพิจารณาตัวอย่างการแก้สมการเพื่อคำนวณความถี่กึ่งปกติ

3.3 คำนวณความถี่กึ่งปกติของหลุมดำ BTZ

ในส่วนนี้เราจะพิจารณาสนามสเกลาร์ที่วิวัฒนาการอยู่บนกาลอวกาศ Banados, Teitelboim and Zanelli (BTZ) ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการสนามใน (2+1) มิติ ที่มีค่าคงที่จักรวาลเป็นลบ Λ (negative cosmological constant) เรานิยามกาลอวกาศ BTZ ดังต่อไปนี้

$$ds^2 = \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 - \left(-M + \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\varphi^2, \quad (๓.๘)$$

เมื่อ $\Lambda = -1/\ell^2$ สังเกตว่าเมทริกเทนเซอร์มีเครื่องหมายแบบ $\{+, -, -\}$ รัศมีขอบฟ้าเหตุการณ์ของหลุมดำ BTZ คือ

$$r = \pm\sqrt{M\ell}.$$

เราจะพิจารณาสมการไคลน์-กอร์ดอนบนอวกาศโค้ง

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_a(\sqrt{g}g^{ab}\partial_b\Phi)=0.$$

จาก (๓.๘) ดังนั้น $\sqrt{g}=r$ และนิยามฟังก์ชัน tortoise $\frac{dr}{dr_*}=-M+r^2/\ell^2\equiv f$ ดังนั้นสมการไคลน์-กอร์ดอนจะสามารถกระจายออกมาได้เป็น

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_0(\sqrt{g}g^{00}\partial_0\Phi)+\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_1(\sqrt{g}g^{11}\partial_1\Phi)+\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_2(\sqrt{g}g^{22}\partial_2\Phi)=0, \quad (๓.๙)$$

$$\ddot{\Phi}-\left[f^2\Phi''+ff'\Phi'+\frac{f^2}{r}\Phi'\right]-\frac{f}{r^2}\partial_2^2\Phi=0. \quad (๓.๑๐)$$

เมื่อ $\cdot, \dot{}$ คือ $\partial/\partial t, \partial/\partial r$ ตามลำดับ เราสามารถใช้กฎลูกโซ่เพื่อเปลี่ยนฟังก์ชันรัศมี r เป็น r_*

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r_*^2}=\Phi''f^2+\Phi'ff'.$$

และเราจะเขียนคำตอบของสนามสเกลาร์ในรูปแบบต่อไปนี้

$$\Phi=\frac{1}{\sqrt{r}}R(r)e^{-i\omega t}e^{im\varphi}. \quad (๓.๑๑)$$

เมื่อ m คือเลขควอนตัมเชิงมุม (angular quantum number) ดังนั้นสมการ (๓.๑๐) จะกลายเป็น

$$\frac{d^2}{dr_*^2}\left(\frac{R}{\sqrt{r}}\right)+\frac{f^2}{r}\left(\frac{R}{\sqrt{r}}\right)'+\omega^2\left(\frac{R}{\sqrt{r}}\right)-m^2f\left(\frac{R}{r^{5/2}}\right)=0. \quad (๓.๑๒)$$

เพื่อให้การจัตุรูปสมการง่ายขึ้น เรามาลองพิจารณาแต่ละเทอมต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\left(\frac{R}{\sqrt{r}}\right)'&=\left(\frac{R'}{\sqrt{r}}-\frac{R}{2r^{3/2}}\right), \\ \frac{d}{dr_*}\left(\frac{R}{\sqrt{r}}\right)&=f\left(\frac{R'}{\sqrt{r}}-\frac{R}{2r^{3/2}}\right), \\ \frac{d^2}{dr_*^2}\left(\frac{R}{\sqrt{r}}\right)&=f\left[f\left(\frac{R'}{\sqrt{r}}-\frac{R}{2r^{3/2}}\right)\right]'\end{aligned}$$

สุดท้ายแล้วสมการ Regge-Wheeler สำหรับสนามสเกลาร์บนหลุมดำ BTZ คือ

$$\frac{d^2R}{dr_*^2}+\left[\omega^2-\left(\frac{3r^2}{4\ell^2}-\frac{M}{2\ell^2}-\frac{M^2}{4r^2}+\frac{m^2}{\ell^2}-\frac{Mm^2}{r^2}\right)\right]R=0. \quad (๓.๑๓)$$

เป้าหมายของเราคือแก้สมการข้างต้นเพื่อหา ω ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตที่นิยามโมเมนต์กึ่งปกติ อย่างไรก็ตาม หากเราพิจารณา ศักย์ยังผลในสมการด้านบน (เทอมที่อยู่ในวงเล็บ (...)) เราจะพบว่า ศักย์ยังผลจะมีค่าเป็นศูนย์ที่ขอบฟ้าเหตุการณ์ และมีค่าเป็นอนันต์ที่ $r \rightarrow \infty$ ซึ่งนี่เป็นผลมาจากการที่หลุมดำ BTZ ไม่ได้มีคุณสมบัติ asymptotic flatness ดังนั้น เงื่อนไข ขอบ ที่อนันต์ จะ กลายเป็น $R \rightarrow 0$ ในกรณีทั่วไป คำตอบของสมการ Regge-Wheeler ไม่สามารถถูกเขียนอยู่ในรูปแบบแน่นอนตรงได้ เราต้องอาศัยเทคนิคการแก้สมการอนุพันธ์ด้วยวิธีการเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหา อย่างไรก็ตามในตัวอย่างดังกล่าวเราจะพบว่าเราสามารถเขียนผลเฉลยของสมการ (๓.๑๓) ในรูปแบบแน่นอนตรงได้ แนวคิดก็คือเราจะใช้การเปลี่ยนระบบพิกัดเพื่อเขียน (๓.๑๓) ในรูปของสมการอนุพันธ์ที่มีคำตอบทั่วไปในรูปแบบแน่นอนตรง

เพื่อความสะดวกเราจะกำหนดให้ $\ell = 1$ จากนิยามของพิกัด tortoise เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่างพิกัด r และ r_* ได้ดังนี้

$$r = -\sqrt{M} \coth(\sqrt{M} r_*)$$

ดังนั้น $\sqrt{M} \leq r \leq \infty$ และ $-\infty \leq r_* < 0$ เราสามารถเขียนศักย์ยังผลในพิกัด tortoise ได้ดังต่อไปนี้

$$V(r_*) = \frac{3M}{4 \sinh^2 \sqrt{M} r_*} + \frac{M}{4 \cosh^2 \sqrt{M} r_*} + \frac{m^2}{\cosh^2 \sqrt{M} r_*}.$$

เราจะนิยามตัวแปร $x = \frac{1}{\cosh^2 \sqrt{M} r_*}$ ดังนั้นขอบฟ้าเหตุการณ์จะอยู่ที่ $x = 0$ ในขณะที่อินฟินิตี้คือ $x = 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dr_*} &= -2\sqrt{M}x\sqrt{1-x}, \\ \frac{d^2x}{dr_*^2} &= 4Mx \left[1 - \frac{3x}{2} \right], \\ \therefore \frac{d^2R}{dr_*^2} &= \frac{d^2R}{dx^2} (4Mx^2(1-x)) + \frac{dR}{dx} (2Mx(2-3x)). \end{aligned}$$

สมการ (๓.๑๓) เมื่อเขียนในเทอมของตัวแปร x จะสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} 0 &= 4x(1-x) \frac{d^2R}{dx^2} + (4-6x) \frac{dR}{dx} + \tilde{V}(x)R, \\ \tilde{V} &\equiv \frac{1}{4x(1-x)} \left[\frac{4\omega^2(1-x)}{M} - 4x + x^2 - \frac{4m^2x(1-x)}{M} \right]. \end{aligned}$$

ในขั้นตอนสุดท้ายเราจะนิยามฟังก์ชันเชิงรีสมี่ $R(x)$ ใหม่

$$R(x) = (x-1)^{3/4} x^{-i\omega/2\sqrt{M}} y(x).$$

สมการสุดท้ายในเทอมของ y จะกลายเป็นสมการไฮเปอร์จีโอเมตริก (hypergeometric equation)

$$\begin{aligned} 0 &= x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby, \\ a &= \left(1 + \frac{im}{2\sqrt{M}} - \frac{i\omega}{2\sqrt{M}}\right), \\ b &= \left(1 - \frac{im}{2\sqrt{M}} - \frac{i\omega}{2\sqrt{M}}\right), \\ c &= 1 - \frac{i\omega}{\sqrt{M}}. \end{aligned}$$

สมการดังกล่าวมีจุดเอกฐานสามจุดคือที่ $x = 0, 1, \infty$ ที่แต่ละจุดเอกฐานจะมีผลเฉลยสองตัวที่เป็นอิสระเชิงเส้นจากกัน (two linearly independent solutions) ใกล้ๆกับขอบฟ้าเหตุการณ์ $x = 0$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการดังกล่าวสามารถถูกเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันไฮเปอร์จีโอเมตริก F ได้

$$y = A(1-x)^{c-a-b} F(c-a, c-b, ; c; x) + Bx^{1-c} (1-x)^{c-a-b} F(1-a, 1-b, ; 2-c; x).$$

เงื่อนไขที่ $x = 0$ ทำให้เราต้องเลือก $B = 0$ และที่ $x = 1$ เราต้องการให้ $y = 0$ และเนื่องจาก $c-a-b = -1$ ดังนั้นเราต้องการให้ $F = 0$ ที่ $x = 1$ เราสามารถเขียนฟังก์ชันไฮเปอร์จีโอเมตริกในรูปของฟังก์ชันแกมมาได้ดังนี้

$$F(c-a, c-b, ; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}. \quad (๓.๑๔)$$

ดังนั้น $a = -n$ หรือ $b = -n$ เมื่อ n คือจำนวนนับ เพราะฉะนั้นเงื่อนไขขอบเขตของโหมดกึ่งปกติทำให้เราทราบว่า

$$\begin{aligned} \left(1 \pm \frac{im}{2\sqrt{M}} - \frac{i\omega}{2\sqrt{M}}\right) &= -n, \\ \therefore \omega &= \pm m - 2\sqrt{M}(n+1)i. \end{aligned} \quad (๓.๑๕)$$

จะเห็นว่าความถี่มีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อนและไม่ต่อเนื่อง อีกทั้งส่วนจินตภาพยังมีค่าเป็นลบ ซึ่งแสดงว่าความถี่ของการรบกวนจะลดลงตามเวลา และส่วนจินตภาพยังขึ้นกับมวลของหลุมดำเพียงอย่างเดียวเท่านั้น



เอกสารอ้างอิง

- [๑] G. Efstathiou M.P. Hobson and A. N. Lasenby. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, ๒๐๐๖.
- [๒] S. M. Carroll. *An Introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry*. Addison Wesley, ๒๐๐๔.
- [๓] Vitor Cardoso and Jose P. S. Lemos. Scalar, electromagnetic and Weyl perturbations of BTZ black holes: Quasinormal modes. *Phys. Rev. D*, ๖๓:๑๒๔๐๑๕, ๒๐๐๑.