Kerr Black Holes

4^{th} Thailand School on High-Energy and Astro-Physics (SHEAP2022): Gravitational Wave

Pitayuth Wongjun

The Institute for Fundamental Study,
Naresuan University, Phitsanulok 65000, Thailand

July 13, 2022

Contents

1	Introduction	3
2	General form of the metric with stationary and axial symmetry	3
3	Newman-Janis Trick	4
4	Event horizon	9
5	Stationary limit surface	10
6	Boyer-Lindquist coordinates and Kerr solution	12
7	Kerr black holes	14

1 Introduction

คาบก่อนหน้านี้ เราเรียนรู้วิธีการหาผลเฉลยหลุมดำโดยใช้สมมาตรทรงกลมสถิต ซึ่งสื่อถึงหลุมดำที่อยู่นิ่ง ไม่มีการหมุน อย่างไรก็ตาม เทหวัตถุในธรรมชาติที่เราสังเกตุได้นั้นมีการหมุนด้วย ดังนั้น ในคาบเรียนนี้เราจะเรียนรู้หลุมดำหมุน หรือเรียกว่า หลุมดำ Kerr ทั้งนี้ ในการหาผลเฉลยนั้น เราจะต้องใช้สมมาตรอย่างอื่นแทน กล่าวคือ ใช้สมมาตรแกน (axial symmetry) แทนสมมาตรทรงกลม และใช้เงื่อนไข stationary แทน static

2 General form of the metric with stationary and axial symmetry

เงื่อนไขแบบ static กับ stationary ต่างกันอย่างไร
ทั้ง static และ stationary มีเงื่อนไขร่วมกันอย่างหนึ่งคือ metric tensor ไม่ขึ้นกับเวลา $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$ อย่างไรก็ตาม สำหรับ static นั้น มันจะมีเงื่อนไขเพิ่มเติมขึ้นมาคือ $g_{\mu\nu}$ ต้องไม่เปลี่ยน ภายใต้การแปลง $t \to -t$ ซึ่งนั่นจะทำให้ $g_{0i} = 0$ และนั่นหมายความว่า $g_{0i} \neq 0$ สอดคล้องกับเงื่อนไขแบบ stationary

จากที่กล่าวไปก่อนหน้านี้ สำหรับเรขาคณิตแบบหมุนนั้น เราจำเป็นต้องใช้ สมมาตรแกน แทนสมมาตรทรงกลม โดยสมมาตรแกนนี้จะถูกมองได้ว่า เป็นสมมาตรของวัตถุภายใต้การหมุนรอบแกนหนึ่งๆ โดยหลักการณ์แล้วเราสามารถเลือกแกนเหมาะๆได้ เพื่อความสะดวกในการคำนวน ถ้าเราให้แกนหมุนนั้น เป็นแกน z เราจะได้ว่า metric tensor จะไม่ขึ้นกับ พิกัด ϕ และจากเงื่อนไขเหล่านี้ จะได้ว่า metric tensor ต้องไม่เปลี่ยนภายใต้การแปลง

$$t \to -t \quad \text{and} \quad \phi \to -\phi. \tag{1}$$

ซึ่งนั่นหมายความว่า บางคอมโพเนนท์ของ metric tensorจะเป็นศูนย์ 8nv

$$g_{01} = g_{02} = g_{31} = g_{32} = 0. \tag{2}$$

จากเงื่อนไขเหล่านี้ เราสามรถเขียน รูปแบบทั่วไปของ metric tensor ได้เป็น

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{03}dt\,d\phi + g_{33}d\phi^2 + \left(g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{12}(dx^1)(dx^2) + g_{22}(dx^2)^2\right). \tag{3}$$

เนื่องจากพจน์สุดท้ายในวงเล็บของสมการข้างบนขึ้นกับพิกัด x^1 and x^2 เราสามารถเปลี่ยนพิกัดเหมาะๆเพื่อกับจัดคอมโพเนนท์ที่ไม่อิสระต่อกันได้ (โดยใช้เงื่อนไขที่ว่า ใน 2

มิตินั้น เราสามารถเปลี่ยนระบบพิกัดให้เป็นแบบแบนราบอย่างคอนฟอร์มอลได้) ดังนั้น โดยทั่วไปแล้ว เราจะมี 4 ฟังชันก์ที่เป็นอิสระต่อกันตามนี้

$$ds^2 = -Adt^2 + B(d\phi - \omega\, dt)^2 + C\left((dx^1)^2 + (dx^2)^2\right). \tag{4}$$

ที่เราจัดรูปแบบของฟังก์ชันลักษณะนี้เนื่องจากความสะดวกต่อไป เช่น ω จะสื่อถึงความเร็มเชิงมุมของการหมุน $\omega = g_{t\phi}/g_{\phi\phi}$ เพื่อความสะดวก เราสามารถเขียนพิกัด x^1 and x^2 ในรูปแบบพิกัด polar-like , r and θ ได้ ซึ่งเมื่อเปลี่ยนแล้ว จะได้ว่า

$$ds^2 = -A\, dt^2 + B(d\phi - \omega\, dt)^2 + C\, dr^2 + D\, d\theta^2. \tag{5}$$

เขียนแยกแต่ละคอมโพเนนท์ได้เป็ฯ

$$g_{tt} = A + B\omega^2,\;\; g_{t\phi} = -B\omega,\;\; g_{\phi\phi} = B,\;\; g_{rr} = C,\;\; g_{\theta\theta} = D. \tag{6}$$

โดยการใช้ เงื่อนไข

$$g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}. \tag{7}$$

เราสามารถหา inverse คอมโพเนนท์ของ metric tensor ได้ กล่าวคือ

$$g^{tt} = -\frac{1}{A},\;\; g^{t\phi} = -\frac{\omega}{A},\;\; g^{\phi\phi} = \frac{B\omega^2 + A}{AB},\;\; g^{rr} = \frac{1}{C},\;\; g^{\theta\theta} = \frac{1}{D}. \tag{8}$$

โดยหลักการแล้ว เราสามารถนำ metric tensor นี้เข้าไปแทนในสมการไอน์สไตน์ แล้วทำการหาผลเฉลยได้ อย่างไรก็ตาม สมการนั้นมีความยุ่งยากมากถึงมากที่สุด (Roy Kerr ค้นพบผลเฉลยนี้ในปี 1963 ซึ่งกินเวลาราวๆ 60 ปีหลังจากการค้นพบ Schwarzschild solution) ในคาบเรียนนี้ เราจะไม่ทำการหาผลเฉลยนี้โดยตรง แต่จะแนะนำเทคนิคอย่างอื่นเพื่อการหาผลเฉลยแทน

3 Newman-Janis Trick

ใน section นี้เราจะนำเสนอวิธีการเพื่อให้ได้มาซึ่งผลเฉลยแบบหมุนสืบเนื่องจาก ผลเฉลยแบบไม่หมุน วิธีการนี้เราไม่จำเป็นต้อง หาผลเฉลยโดยตรงจากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ เพียงแต่ใช้การแปลงพิกัดตามระเบียบวิธีที่จำเพาะเจาะจง โดยวิธีการนั้นเรียกว่า Newman-Janis algorithm โดยหลักๆแล้วระเบียบวิธีนี้จะแบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอน ได้แก่

1. สร้าง metric tensor จาก null basis

2. ทำการแปลงพิกัดให้เป็นปริมาณ complex

3. แปลงพิกัดกลับมาบน basis เดิมแล้วแปลงพิกัด เป็นพิกัดที่คุ้นเคย เช่น พิกัด Boyer-Lindquist

เพื่อให้เกิดความเข้าใจมากขึ้น เราจะเริ่มจากพิจารณาขั้นตอนที่ 1. โดยพิจารณา null basis จาก Minkowski metric สำหรับ basis ปกติของ Minkowski metric นั้นเราสามารถเขียนได้เป็น

$$u_\mu = (-1,0,0,0),\ i_\mu = (0,1,0,0),\ j_\mu = (0,0,1,0),\ k_\mu = (0,0,0,1). \tag{9}$$

ซึ่ง Minkowski metric ก็สามารถเขียนให้อยู่ในพจน์ของ basis ดังกล่าวได้ดังนี้

$$\eta_{\mu\nu} = -u_\mu u_\nu + i_\mu i_\nu + j_\mu j_\nu + k_\mu k_\nu. \tag{10}$$

ถัดไป เราสามารถสร้าง null basis ได้จากการเปลี่ยน 2 basis แรกได้ดังนี้

$$l_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_\mu + i_\mu), \tag{11}$$

$$n_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_\mu - i_\mu). \tag{12}$$

จะเห็นได้ว่า เราได้ null basis ซึ่งมีคุณสมบัติครบถ้วนแล้ว กล่าวคือ $l_\mu l^\mu = n_\mu n^\mu = 0$ and $l_\mu n^\mu = -1$ สำหรับ อีก 2 basis ที่เหลือ เราไม่อาจจะให้ลักษณะแบบเดิมได้โดยตรง เนื่องจากเครื่องหมายของทั้งสองนั้นเหมือนกัน เราจำเป็นจะต้อง แปลงเป็น complex number แทน ดังนี้

$$m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(j_\mu + ik_\mu), \tag{13}$$

$$\bar{m}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(j_\mu - ik_\mu). \tag{14}$$

ซึ่งในทำนองเดียวกัน เราสามารถตรวจสอบคุณสมบัติของ null basis ได้ดังนี้ $m_\mu m^\mu = \bar{m}_\mu \bar{m}^\mu = 0$ and $m_\mu \bar{m}^\mu = 1$. สุดท้ายแล้ว เราสามารถเขียน Minkowski metric ในพจน์ของ null basis ได้ดังนี้

$$\eta_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(u_\mu + i_\mu)(u_\nu + i_\nu) + \frac{1}{2}(u_\mu - i_\mu)(u_\nu - i_\nu) \tag{15}$$

$$+ \frac{1}{2}(m_\mu + i\bar{m}_\mu)(m_\nu + i\bar{m}_\nu) + \frac{1}{2}(m_\mu - i\bar{m}_\mu)(m_\nu - i\bar{m}_\nu), \tag{16}$$

$$= -l_\mu n_\nu - l_\nu n_\mu + m_\mu \bar{m}_\nu + m_\nu \bar{m}_\mu. \tag{17}$$

เมื่อเรารู้วิธีการเขียน metric อย่างง่ายให้อยู่ในพจน์ของ nnull basis แล้ว ถัดไป เราจะลองใช้หลักการเดียวกันนี้กับ ผลเฉลยไม่หมุน ซึ่งสามารถเขียนได้ทั่วไปดังนี้

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{18}$$

โดยที่ $f = 1 - 2M/r$ สำหรับกรณีของ Sch และเพื่อความสะดวกในการหา null basis ใช้พิกัด advance Kruskal ดังนี้

$$p = dt + \tilde{r}, \tag{19}$$

$$dp = dt + \frac{1}{f(r)} dr, \qquad dr = f(r) d\tilde{r} \tag{20}$$

ซึ่ง metric tensor ในพิกัดนี้สามารถเขียนได้เป็น

$$ds^2 = -f(r) dp^2 + 2 dp dr + r^2 d\Omega^2. \tag{21}$$

เราสามารถมาเขียนให้อยู่ในรูปแบบ matrix ได้ดังนี้

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

จากนั้น จะได้ว่า เราสามารถเลือก null basis ได้ 1 ตัวดังนี้

$$l^\mu = (0, 1, 0, 0). \tag{23}$$

โดยใช้คุณสมบัติของ null basis เอง $n^\mu n_\mu = 0$ and $l^\mu n_\mu = -1$ เราสามารถเขียนอีกหนึ่งตัวได้ดัง

$$n^\mu = (-1, -\frac{f}{2}, 0, 0). \tag{24}$$

สำหรับอีกสองตัวที่เหลือ เราสามารถใช้หลักการณ์เดียวกันกับก่อนหน้านี้ได้ ซึ่งในทรงกลมสามารถเขียนได้เป็น

$$m_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r}(0, 0, 1, \frac{i}{\sin\theta}), \tag{25}$$

$$\bar{m}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}r}(0, 0, 1, -\frac{i}{\sin\theta}). \tag{26}$$

เราสามารถตรวจสอบความถูกต้องของ null basis ดังกล่าวโดยใช้สมการ Eq. (17) ทั้งนี้เราเสร็จภารกิจแรกที่ว่า เขียน metric tensor ในพจน์ของ null basis เรียบร้อยแล้ว ขั้นตอนต่อไป คือการทำให้เป็น พิกัด complex (complexification)

ขั้นตอนที่สองนี้เป็นหัวใจสำคัญอย่างหนึ่งของระเบียบวิธีนี้ก็ว่าได้ (ซึ่งจริงๆแล้วก็ไม่รู้ว่าทำไม มันต้องเป็นแบบนี้ รู้เพียงว่า ทำแบบนี้แล้วมันใช้ได้) พิกัดบน null basis ต้องแปลงเป็นพิกัด complex ตามนี้

$$p = p' - ia\cos\theta, \qquad r = r' - ia\cos\theta, \qquad \theta = \theta', \qquad \phi = \phi', \tag{27}$$

โดยที่ parameter a คือ parameter ที่เกี่ยวเนื่องกับโมเมนตัมเชิงมุมของหลุมดำหมุนนั่นเอง และเพื่อที่จะให้ $f(r)$ ยังคงเป็นฟังก์ค่าจริง polynomial ของ r ใน function $f(r)$ จะต้องแปลงตามนี้

$$r^p = \frac{[Re(r)]^{p+2}}{|r|^2}. \tag{28}$$

สำหรับกรณีของ Schwarzschild นั้นเราจะเขียนฟังก์ชัน $f(r')$ ได้เป็น

$$f(r') = 1 - \frac{2Mr'}{\rho^2}, \tag{29}$$

โดยที่ $\rho^2 = r'^2 + a^2\cos^2\theta$ โดยสรุปแล้ว null vectors จะถูกเขียนใหม่เนื่องจาก complexification ดังนี้

$$\begin{aligned} l^{\mu'} &= (0,1,0,0), \qquad n^{\mu'} = (-1, -\frac{1}{2}f(r'), 0, 0), \\ m^{\mu'} &= \frac{1}{\sqrt{2}(r' - ia\cos\theta)}\left(-ia\sin\theta, -ia\sin\theta, 1, \frac{i}{\sin\theta}\right), \qquad (30) \\ \bar{m}^{\mu'} &= \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia\cos\theta)}\left(ia\sin\theta, ia\sin\theta, 1, \frac{-i}{\sin\theta}\right). \qquad (31) \end{aligned}$$

โดยการใช้ความสัมพันธ์ของ inverse metric ในสมการ (17) และใช้ null vectors ในสมการ (31) เราสามารถเขียน inverse metric ได้เป็น

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} a^2\sin^2\theta & a^2 + r^2 & 0 & -a \\ a^2 + r^2 & \Delta & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a & -a & 0 & \csc^2\theta \end{pmatrix}, \tag{32}$$

โดยที่

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr \tag{33}$$

ทั้งนี้ เราได้เปลี่ยน $r' \to r$ เพื่อความสะดวกในการเขียนถัดๆไป

สุดท้ายแล้ว เราสามารถเขียน metric tensor ได้จาก inverse ของมัน กล่าวคือ

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta - a^2 \sin^2\theta}{\rho^2} dp^2 + 2dpdr - 2\frac{a \sin^2\theta \left(a^2 + r^2 - \Delta\right)}{\rho^2} dpd\phi \\ &\quad -2a \sin^2\theta dr d\phi + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma \sin^2\theta}{\rho^2} d\phi^2 \end{aligned} \tag{34}$$

โดยที่ $\Sigma = \left(a^2 + r^2\right)^2 - a^2 \Delta \sin^2\theta$ ทั้งนี้ metric ในรูปแบบนี้คือผลเฉลยหลุมดำแบบหมุนแล้ว

> Exercise1 จงแสดงว่า metric จากสมการข้างบน (หรือ ข่างล่างก็ได้) เป็นผลเฉลยของสมการไอน์สไตน์ในสูญญากาศ (ทั้งนี้ ในคาบติว พี่นิค ณภัทร จะสอนให้พวกเราใช้วิธีการคำนวนจากคอมพิวเตอร์)

จากที่เกริ่นไปก่อนหน้านี้ มันจะสะดวกมากกว่าถ้าเราต้องการวิเคราะห์ผลเฉลยนี้จากพิกัดที่เหมาะๆ ทั้งนี้ เราสามารถใช้พิกัด Boyer-Linquist ซึ่งจะกำจัดพจน์ $drd\phi$ and $drdp$ ออกไปได้ เพื่อที่จะให้ได้พิกัดดังกล่าว เราสามารถใช้การแปลงนี้ได้

$$d\phi = d\psi + \tfrac{a}{\Delta} dr, \qquad dp = dt + \tfrac{a^2 + r^2}{\Delta} dr, \tag{35}$$

หลังจากนั้น เราจะได้ผลเฉลยหลุมดำหมุน ในพิกัด Boyer-Linquist คือ

$$ds^2 = \frac{a^2 \sin^2\theta - \Delta}{\rho^2} dt^2 - 2\frac{a \sin^2\theta \left(a^2 + r^2 - \Delta\right)}{\rho^2} dtd\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma \sin^2\theta}{\rho^2} d\phi^2, \tag{36}$$

ทั้งนี้เราได้ตัวแปรกลับไปใหม่เพื่อความสะดวก กล่าวคือ $\psi \to \phi$

จะเห็นได้ว่าผลเฉลยนี้มีความซับซ้อนค่อนข้างมาก ทำให้เกิดความยุ่งยากต่อการวิเคราะห์คุณลักษณะของหลุมดำ นอกจากนี้แล้วเรายังพบว่า คุณลักษณะของขอบฟ้าเหตุการณ์นั้นได้แยกตัวออกจากที่เคยพิจารณาในกรณีของ Schwarzschild เพื่อให้เข้าใจคุณลักษณะดังกล่าว เราจะพิจารณาคุณสมบัติของขอบฟ้าเหตุการณ์เพิ่มขึ้นใน section ถัดไป

4 Event horizon

เพื่อที่จะศึกษา เรขาคณิตกาลอวกาศแบบ Kerr เราจำเป็นที่จะต้องเรียนรู้อย่างลึกซึ้งเกี่ยวกับขอบฟ้าเหตุการณ์ ก่อนหน้านั้น เรารู้ว่า ขอบฟ้าเหตุการณ์คือตำแหน่งที่ พิกัด t และ r เปลี่ยนหน้าที่กัน จากพิกัด timelike เป็น spacelike หรือเรียกได้ว่า ณ ตำแหน่งนี้ ทั้งสองกลายเป็นพิกัด ในเชิงคณิตศาสตร์แล้ว ขอบฟ้าเหตุการณ์คือ พื้นผิวที่ normal vector กลายเป็น null vector เพื่อให้เข้าใจมากขึ้น เราลองพิจารณา พื้นผิวหนึ่งๆ ซึ่งอธิบายได้ด้วยสมการ

$$f(x^\mu) = 0. \tag{37}$$

จากนั้น เราจะได้ว่า normal vector ของพื้นผิวนี้จะเขียนได้ในรูปของ gradient ของฟังก์ชัน f นั่นเอง

$$n_\mu = \nabla_\mu f = \partial_\mu f \tag{38}$$

เงื่อนไขสำหรับการเป็น null surface คือ normal vector ต้องเป็น null vector กล่าวคือ

$$n_\mu n^\mu = g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = 0. \tag{39}$$

ซึ่งคุณสมบัติสำคัญอย่างหนึ่งที่ตามมาคือ เราจะเห็นได้ว่า normal vector จะกลายเป็น tengent vector ที่พื้นผิวนี้

เมื่อพิจารณา ในกรณีของ Schwarzschild ซึ่ง $f = f(r)$ จะได้ว่า เงื่อนไขของพื้นผิว null ในสมการ (39) จะเขียนได้ดังนี้

$$g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = g^{\mu\nu} \partial_\mu f \, \partial_\nu f = g^{rr} (\partial_r f)^2 = 0. \tag{40}$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า เงื่อนไขของการเป็น ขอบฟ้าเหตุการณ์สำหรับ Schwarzschild metric คือ

$$g^{rr} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{2M}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 2M. \tag{41}$$

จะเห็นได้ว่า รัศมีนี้คือรัศมี Schwarzschild นั่นเอง ต่อไปเราจะพิจารณา ในกรณีทั่วไปที่เกี่ยวข้องกับสมมาตรแกน กล่าวคือ $f = f(r, \theta)$ ในกรณีนี้ เงื่อนไขดังกล่าวจะเขียนได้ดังนี้

$$g^{rr} (\partial_r f)^2 + g^{\theta\theta} (\partial_\theta f)^2 = 0. \tag{42}$$

อย่างไรก็ตาม เนื่องจากว่า พิกัด r and θ เป็นพิกัดที่เราเลือกขึ้นมาเองได้ เราสามารถเลือกให้ $f = f(r)$ ดังนั้น เงื่อนไขการเป็นขอบฟ้าเหตุการณ์นั้นจะเป็นเงื่อนไขเดียวกันกับกรณีของ Schwarzschild กล่าวคือ

$$g^{rr}(\partial_r f)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad g^{rr} = 0 \ \text{ or } \ g_{rr} = \infty. \tag{43}$$

จะเห็นได้ว่าพื้นผิว null เป็นพื้นผิวที่เป็นทางเดินของแสง ในอีกแง่มุมหนึ่ง ถ้าแสงอยู่ในพื้นผิวนี้ แสงก็จะอยู่ในพื้นผิวนี้ต่อไป นั่นคือ แสงไม่อาจจะหนีออกมาจากพื้นผิวแบบนี้ได้ ยิ่งไปกว่านั้น จะเห็นได้ว่า ในกรณีของ Schwarzschild ที่ $r < 2M$ normal vector กลายเป็น timelike vector นั่นหมายความเป็นนัยว่า อนุภาคภายในรัศมีนี้จะต้องมี world line ในทิศที่รัศมีน้อยลงเสมอ ซึ่งตรงกับหลักการณ์ของ ขอบฟ้าเหตุการณ์ที่ว่า พิกัด t และ r จะสลับหน้าที่กัน

5 Stationary limit surface

โดยนิยามแล้ว พื้นผิว stationary limit คือ พื้นผิวที่ทุกอนุภาค รวมถึงแสง นั้นไม่สามารถอยู่นิ่งได้ ซึ่งจะเห็นได้ว่า ในกรณีของ Schwarzschild นั้น พื้นผิวนี้คือขอบฟ้าเหตุการณ์นั่นเอง อย่างไรก็ตาม ในกรณีของหลุมดำหมุนนั้น พื้นผิวสองอย่างนี้จะแยกออกจากกัน

สำหรับกรณีของหลุมดำหมุน $g_{t\phi} \neq 0$ มันบ่งบอกว่าต้นกำเนิดของกาลอวกาศแบบนี้กำลังหมุนอยู่ อนุภาคที่กำลังตกลงไปในกาลอวกาศแบบนี้จะโดนผลักดันให้เคลื่อนที่ตามทิศทางการหมุนไปด้วย ในแง่ของเรขาคณิต กาลอวกาศจะถูกลากไปตามการหมุนด้วย (อนุภาคเคลื่อนที่ตามความโค้งของกาลอวกาศ) ซึ่งเราเรียกเหตุการณ์เช่นนี้ว่า "dragging of inertial frames" โดยแสดงให้เห็นตามรูป 1

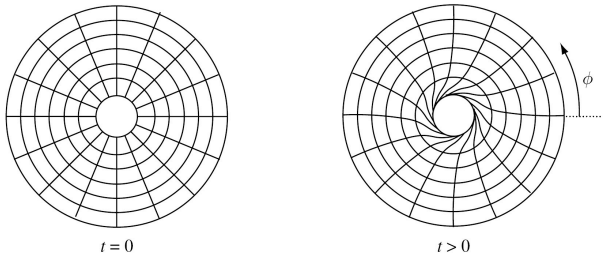

Figure 1: Dragging of inertial frames [2].

โดยทั่วไปแล้ว ผลของเหตุกาณ์นี้จะมีผลน้อยมาก แปรผันกับ $1/r^3$ และที่สำคัญ ผลของเหตุการณ์นี้ยังเป็นผลที่ใช้แยกแยะความแตกต่างระหว่าง ทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป

กับ ทฤษฎีของนิวตันด้วย (ในทฤษฎีของนิวตัน อนุภาคจะเคลื่อนที่ตามแนวรัศมี ไม่ว่าแหล่งกำเนิดจะหมุน หรือไม่หมุน) จากประเด็นดังกล่าวนี้ เราจะบอกได้ว่า ยิ่งอนุภาคเข้าใกล้แหล่งกำเนิดที่หมุนมากๆ อนุภาคก็ยิ่งจะถูกลากให้เคลื่อนที่ตามการหมุนมากขึ้นเรื่อยๆ จนถึงค่ารัศมีหนึ่งที่อนุภาครวมถึงแสงเองก็ไม่สามารถหนีผลจากการลากให้หมุนตามได้ ซึ่งรัศมีนี้ คือ รัศมีของพื้นผิว stationary limit นั่นเอง เพื่อให้เข้าใจชัดเจนยิ่งขึ้น ลองพิจารณาเส้นทางเดินของแสง ที่เคลื่อนที่ตามแนว ϕ อย่างเดียว จะได้ว่า

$$\begin{aligned} g_{tt}\,dt^2 + 2g_{t\phi}dt\,d\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 &= 0, \\ g_{tt}\,dt^2 + 2g_{t\phi}\frac{d\phi}{dt} + g_{\phi\phi}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{44}$$

เราสามารถหาความเร็วในการหมุนของแสงได้คือ

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}, \\ &= \omega \pm \sqrt{\omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}, \end{aligned} \tag{45}$$

โดยที่ ω คือ ฟังก์ชันที่แทนความเร็วเชิงมุมของกาลอวกาศที่ถูกลากจากการหมุน ในกรณีที่ $g_{tt} = 0$ เราจะได้ว่า

$$\frac{d\phi}{dt} = 0,\ 2\omega. \tag{46}$$

จากสมการข้างบน จะเห็นได้ว่า แสงที่สังเกตุจาก ผู้สังเกตุที่อนันต์ที่เคลื่อนที่ ตรงข้ามทิศทางการหมุน จะมีความเร็วเท่ากับศูนย์ ณ ตำแหน่งที่ $g_{tt} = 0$ ถ้ากรณีที่ $g_{tt} > 0$ แสงที่ถูกส่งในทิศทางตรงกันข้ามกับการหมุนจะถูกลากให้หมุนไปในทิศทางเดียวกับการหมุน ในแง่หนึ่งคือ ที่ $g_{tt} = 0$ แสงเริ่มจะต้านการลากจากการหมุนไม่ได้แล้วเป็นที่มาของพื้นผิว stationary limit นั่นเอง ถ้าเราพิจารณาอนุภาคมีมวล จะได้ว่า 4-velocity ของอนุภาคนี้ที่อยู่นิ่งจะเขียนได้เป็น

$$u^\mu = (u^t, 0, 0, 0). \tag{47}$$

This 4-velocity obeys the constraint

$$u_\mu u^\mu = -1, \tag{48}$$

$$g_{tt}\,(u^t)^2 = -1. \tag{49}$$

จะเห็นได้ว่า ที่ $g_{tt} > 0$ เงื่อนไขข้างบนจะไม่เป็นจริง นั่นหมายความว่า อนุภาคจะไม่สามารถอยู่นิ่งได้นั่นเอง จากที่กล่าวไปก่อนหน้านี้ เราสรุปได้ว่า เงื่อนไขของพื้นผิว stationary limit คือ

$$g_{tt} = 0. \tag{50}$$

สำหรับ Schwarzschild metric, $g_{tt} = 0$ จะให้ $r = 2M$ ซึ่งเป็นรัศมีของขอบฟ้าเหตุการณ์นั่นเอง สำหรับกรณีของ หลุมดำหมุนนั้น เงื่อนไขดังกล่าวจะต่างกันเนื่องจาก $g_{t\phi} \neq 0$ ซึ่งจะแสดงให้เห็นใน section ต่อๆไป

นอกจากพื้นผิว stationary limit จะสื่อถึงพื้นผิวที่ อนุภาคไม่สามารถอยู่นิ่งได้แล้ว ยังสื่อถึงว่า ความยาวคลื่นของแสงที่เดินทางจากพื้นผิวนี้ไปหาผู้สังเกตุที่อยู่ไกลมากๆจะมีค่าเป็นอนันต์ ดังนั้น บางตำราจะเรียกพื้นผิวนี้ว่า พื้นผิว infinite red-shift ใน lecture note นี้จะไม่ขอกล่าวถึงในรายละเอียด แต่หลักการณ์ที่ใช้ก็เหมือนกันกับ gravitational red-shift ทั่วไป

6 Boyer-Lindquist coordinates and Kerr solution

ใน section นี้เราจะกลับมาสนใจที่ผลเฉลยที่เราได้มาก่อนหน้านี้ในสมการ (36) ซึ่งสามารถเขียนใหม่เพื่อความสะดวกได้เป็น

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4Mar\sin^2\theta}{\rho^2}\, dt\, d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ &+ \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) \sin^2\theta d\phi^2, \end{aligned} \tag{51}$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \tag{52}$$

ถึงแม้ว่าพิกัด t, r, θ, ϕ จะดูเหมือนพิกัด Schwarzschild แต่อย่างไรก็ตาม มันไม่ใช่ จริงๆแล้วมันคือ พิกัด "Boyer-Lindquist coordinates" ตามที่ได้กล่าวไปก่อนหน้านี้ เราจะเห็นความแต่กต่างนี้ได้โดยการพิจารณา $M \to 0$ ซึ่งจะได้ว่า

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + (r^2 + a^2)\sin^2\theta d\phi^2. \tag{53}$$

จะเห็นได้ว่า metric ไม่ได้ลดรูปไปเป็นพิกัดที่สื่อถึงทรงกลม อย่างไรก็ตาม เราจะเห็นได้ว่ามันสื่อถึงรูปร่างของทรงรีเมื่อพิจารณาเฉพาะส่วนของ spatial เพื่อให้เห็นชัดเจนยิ่งขึ้น

เราสามารถแปลงพิกัดไปเป็นพิกัด Cartesian ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x &= (r^2+a^2)^{1/2}\sin\theta\,\cos\phi, \\ y &= (r^2+a^2)^{1/2}\sin\theta\,\sin\phi, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned} \tag{54}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างของพิกัดในกรณีที่ $\phi = 0$ แสดงให้เห็นในรูป 2 โดยความสัมพันธ์แบบเต็มสามารถจินตนาการได้โดยการหมุนทั้งรูปรอบแกน z axis เพื่อให้เห็นภาพถึงความเป็นทรงรี เราสามารถหาความสัมพันธ์ของพิกัด r ในรูปของพิกัด x, y, z ได้ดังนี้

$$\frac{x^2+y^2}{r^2+a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1. \tag{55}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่ามันเป็นความสัมพันธ์ของทรงรีตามที่พูดถึงก่อนหน้านี้ อย่างไรก็ตาม ที่ $r = 0$ เรามีความสัมพันธ์ $x^2 + y^2 = a^2$ ซึ่งมีลักษณะเป็นวงกลมรัศมี a ซึ่งถ้า $a = 0$ จะลดรูปเป็นทรงกลมปกติที่มีรัศมี $r = 0$ เพื่อแสดงให้เห็นชัดเจนมากขึ้น เราสามารถหาความสัมพันธ์ที่ไม่ขึ้นกับ พิกัด r ได้ดังนี้

$$\frac{x^2+y^2}{a^2\sin^2\theta} - \frac{z^2}{a^2\cos^2\theta} = 1. \tag{56}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าสมการนี้เป็นสมการไฮเปอร์โบลา ตามที่เห็นได้จากรูป 2 นั่นเอง

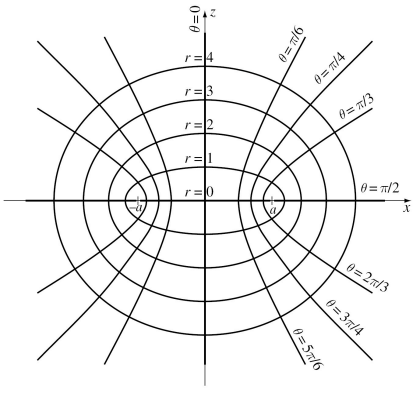

Figure 2: Structure of Boyer-Lindquist coordinates in $\phi = 0$ plane [2].

เมื่อเราทำการลดรูปโดย $a \to 0$ จะได้ว่า metric จะลดรูปไปเป็น

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{57}$$

ซึ่งเป็น Schwarzschild metric ตามที่เราคาดไว้นั่นเอง ในมุมนี้ เราจะเห็นได้ว่า parameter a จะสื่อถึงการหมุนของกาลอวกาศนั่นเอง เพื่อที่จะให้เห็นภาพมากขึ้น เราสามารถจัดรูป metric ใหม่โดยให้

$$\Sigma = (r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta \sin^2\theta. \tag{58}$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$ds^2 = -\frac{\rho^2\Delta}{\Sigma^2}dt^2 + \frac{\Sigma^2 \sin^2\theta}{\rho^2}(d\phi + \omega dt)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \tag{59}$$

$$\omega = \frac{2M\,r\,a}{\Sigma^2}. \tag{60}$$

จะเห็นได้ว่า metric ในรูปแบบนี้ จะให้ความสัมพันธ์โดยตรง ระหว่าง parameter a กับความเร็มเชิงมุมของการหมุนของกาลอวกาศ ω ข้อสังเกตุอีกประเด็นหนึ่งคือ Kerr metric จะไม่ขึ้นกับพิกัด t and ϕ ซึ่งนั้นหมายความว่า เรามีสอนปริมาณอนุรักษ์ กล่าวคือ พลังงาน และ โมเมนตัมเชิงมุม ซึ่ง parameter a ที่จะสื่อถึงโมเมนตัมเชิงมุน ถ้าเราลองพิจารณา metric นี้ใน limit ที่หมุนช้า (รายละเอียดสามารถดูได้ที่หนังสือ GR ทั่วไปหรือ [3]) เราจะได้ว่า parameter a สัมพันธ์กับโมเมนตัมเชิงมุม ดังนี้

$$a = \frac{J}{M}. \tag{61}$$

7 Kerr black holes

จากการบรรยายก่อนหน้านี้เกี่ยวกับหลุมดำ Schwarzschild เราจะเห็นได้ว่า สิ่งสำคัญอย่างหนึ่งในการพิจารณาคุณสมบัติของหลุมดำคือ singularity สำหรับหลุมดำ Kerr เราสนใจที่จะศึกษาที่ real singularity ขอบฟ้าเหตุการณ์ และ ผิว stationary limit โดยกรณีของ real singularity เราสามารถหาได้โดยหา Kretschmann scalar $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ ในทำนองเดียวกันกับ ในกรณีของหลุมดำ Schwarzschild อย่างไรก็ตาม การคำนวนนั้นมีความซับซ้อนมาก และมันจะง่ายกว่าถ้าเราได้เรียนรู้วิธีการคำนวนจากคอมพิวเตอร์

> Exercise2 จงหา Kretschmann scalar $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ สำหรับผลเฉลย Kerr (ทั้งนี้ในคาบติว พี่นิค ณภัทร จะสอนให้พวกเราใช้วิธีการคำนวนจากคอมพิวเตอร์)

ทั้งนี้ เราจะได้ว่า

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \propto \frac{1}{\rho^6} \tag{62}$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า real singularity ของหลุมดำ Kerr เกิดขึ้นที่

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \sin^2\theta = 0 \tag{63}$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$r = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \tag{64}$$

จากที่เรารู้มาแล้วว่าในพิกัด Boyer-Lindquist นั้นในกรณีนี้คือ

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = a^2. \tag{65}$$

ดังนั้น เราจะเห็นได้ว่า real singularity นั้นจะมีลักษณะเป็นวงแหวนทรงกลมรัศมี a ซึ่งนี้เป็นข้อแตกต่างอย่างมีนัยเมื่อนเทียบกับหลุมดำไม่หมุนอย่าง หลุมดำ Schwarzschild สำหรับขอบฟ้าเหตุการณ์นั้น เราสามารถหาได้โดยใช้เงื่อนไขที่กล่าวไปแล้วก่อนหน้านี้ คือ

$$g_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta} = \infty, \;\; \Rightarrow \;\; \Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = 0, \;\; \Rightarrow \;\; r = r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \tag{66}$$

จากสมการข้างบน เราจะเห็นได้ว่า โครงสร้างของขอบฟ้าเหตุการณ์สามารถแบ่งแยกได้ 3 กรณี คือ $a^2 > M^2$, $a^2 < M^2$ และ $a^2 = M^2$

สำหรับกรณีที่ $a^2 > M^2$ จะเห็นได้ว่าหลุมดำจะไม่มี ขอบฟ้าเหตุกาณ์มาปกคลุม real singularity เหตุการณ์เช่นนนี้เราจะเรียกว่า naked singularity ซึ่งถ้าเกิดเหตุการณ์เช่นนี้ขึ้นมาจริงในธรรมชาติ เราจะพบว่า ธรรมชาติจะมีความแปลกประหลาดมาก กล่าวคือ เราสามารถ เดินไปหา singularity แล้วกลับออกมาสู่สถานการณ์ปกติได้ ซึ่งนี้จะค่อนข้างขัดแย้งในเชิงฟิสิกส์เพราะ เราสามารถใส่เงื่อนไขเริ่มต้นที่ตำแหน่งที่ฟิสิกส์ไม่สามารถนิยายได้ แล้วสามารถหาผลเฉลยที่เกี่ยวเนื่องกับเงื่อนไขเริ่มต้นนั้นได้ อย่างไรก็ตาม ในปี 1969 Roger Penrose ได้เสนอสมมุติฐานที่ว่า หลุมดำที่เป็น naked singularity นี้ไม่สามารถเกิดขึ้นเองได้ตามธรรมชาติ ทั้งนี้ โดยฟิสิกส์แล้ว พจน์ที่เกี่ยวเนื่องกับ parameter a นี้จะสื่อถึงมวลที่ให้แรงผลัก ซึ่งโดยทั่วไปแล้วจะไม่สามารถสร้างโครงสร้างได้

สำหรับ กรณีที่ $a^2 < M^2$ นั้น เราจะเห็นได้ว่า มี 2 ขอบฟ้าเหตุการณ์ ขอบนอก และขอบใน โดยที่เราจะเห็นเพียง ขอบฟ้าเหตุการณ์นอกเท่านั้น เนื่องจากถ้าเราผ่านเข้าไปข้างในของขอบนอกแล้วเราจะต้องเปลี่ยนตำแหน่งในกาลอวกาศ โดยที่ รัศมีน้อยลงเสมอ ในทำนองเดียวกันกับ หลุมดำ Schwarzschild อย่างไรก็ตาม เมื่อเราผ่านขอบในเข้าไปแล้ว พิกัด t และ r จะเปลี่ยนหน้าที่กันอีกรอบ ทำให้เราต้องเคลื่อนที่ไปโดยที่เวลา

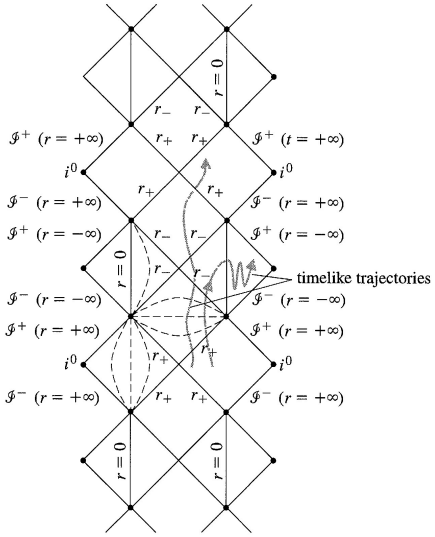

Figure 3: Conformal diagram for Kerr geometry in the case $a^2 < M^2$ [1].

เพิ่มขึ้นเสมออีกรอบ เราสามรถเลือกได้ว่า จะเข้าไป singularity หรือจะกลับออกมา ในกรณีที่เรากลับออกมา เราจะผ่านขอบในออกมา แล้วเราจำเป็นที่จะต้อง เปลี่ยนตำแหน่งในกาลอวกาศ โดยที่ r เพิ่มขึ้นเสมอ จนไปชนกลับ ขอบนอก แล้วหลุดออกมายัง พื้นที่แบนราบอีกรอบ อย่างไรก็ตาม พื้นที่นี้จะเปรียบเสมือนเป็นอีกโลกหนึ่งที่ไม่เกี่ยวข้องกับโลกเดิมของเรา (โลกคู่ขนานหรือป่าว?) แล้วถ้าเราเดินทางไปกลับเข้าไปแล้วออกมาอีกรอบก็จะเจอโลกใหม่อีกรอบเรื่อยๆ ทั้งนี้ เหตุการณ์ทั้งหมดนี้สามารถพอธิบายได้จาก conformal diagram ในรูป 3 โดย conformal diagram คือ spacetime diagram แบบหนึ่งที่ กรวยแสงโดนตรึงไว้ที่มุมเดิมตลอด และโครงสร้างของกาลอวกาศทั้งหมดจะถูกระบุไว้ภายใน diagram ที่พื้นที่จำกัด

คำถามสำคัญอย่างหนึ่งสำหรับกรณีนี้คือ เราสามารถเดินทางทะลุผ่าน วงแหวน singularity ไปบริเวณที่ $r < 0$ ได้หรือไม่ โดยทางคณิตศาสตร์แล้ว แล้วสามารถ analytic continuation ในการวิเคราะห์แล้วเราจะพบว่า อนุภาคสามารถเดินทางทะลุผ่านได้จริง และยิ่งไปกว่านั้น เราจะเจอกาลอวกาศแบบราบในบริเวณนั้นด้วย ซึ่งหมายความว่า เราจะมีโลกใหม่ข้างในวงแหวน singularity นั่นเอง ทั้งนี้ พื้นที่ส่วนนี้ก็บรรจุอยู่ใน conformal diagram ตามที่เห็นในรูป 3 สิ่งสำคัญอย่างหนึ่ง ที่เกิดขึ้นในวงแหวนนี้คือ การมีตัวตนอยู่ของ "closed timelike curve" โดยที่ closed timelike curve นี้เป็นเส้นทางเดินเปิดของอนุภาคที่เป็นแบบ timelike $ds^2 < 0$ เพื่อให้เห็นจัดเจนขึ้น พิจารณา $ds^2 < 0$ โดยที่ r

และ t เป็นค่าคงที่ $\theta = \pi/2$ จะได้ว่า

$$ds^2 = \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu a^2}{r}\right) d\phi^2. \tag{67}$$

จะเห็นได้ว่า ในกรณีที่ r มีค่าติดลบน้อยๆ ds^2 จะมีค่าติดลบ ดังนั้นมันจึงเป็นเส้นทางแบบ timelike ได้ ในอีกแง่มุมหนึ่ง เราสามารถเดินทางโดยเปลี่ยนตำแหน่งแค่พิกัด ϕ รอบๆแกน z โดยที่ t คงที่ ซึ่งนั่นหมายความเรา เราจะกลับมาเจอตัวเราเองอีกรอบที่เวลาเดิม (เรามีเราสองคน) ซึ่งถ้าเราตัดสินใจฆ่าตัวเราเอง มันก็จะเกิดปัญหาที่ว่า จะมีเราที่มาฆ่าตัวเราเองได้อย่างไร โดยสรุป การมีอยู่ของ closed timelike curve จะทำให้เกิดการละเมิดความเป็นเหตุเป็นผล (causality) อย่างไรก็ตาม วิธีการ analytic continuation อาจจะเป็นวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่ไม่ให้ความหมายเชิงฟิสิกส์ก็เป็นได้ ทั้งนี้ การยุบตัวจริงๆเนื่องจากความโน้มถ่วงก็ไม่น่าจะให้ผลที่ละเมิดหลักเหตุและผลได้

สำหรับในกรณีหลุมดำ extremal Kerr ($a^2 = M^2$) ทั้งสองขอบจะรวบตัวกันเป็นขอบเดียวที่ $r = M$ ในกรณีนี้จะค่อนข้างพบทั่วไปในธรรมชาติ กล่าวคือ มวลที่ตกลงไปในหลุมดำหมุนนั้นจะหมุนรอบๆหลุมดำก่อนจะตกลงไปและรวมกันเป็นจานพอก ลักษณะเช่นนี้ จะเสริมทำให้หลุมดำมี โมเมนตัมเชิงมุมเพิ่มขึ้น และค่อยๆเท่ากันกับค่าวิกฤต ซึ่งเมื่อคำนวนโดยละเอียดแล้วจะพบว่าค่าจะไปจบที่ประมาณ $a \sim 0.998M$ [2]

เพื่อให้เห็นรูปร่างหน้าตาของขอบฟ้าเหตุการณ์ เราจะให้ $t =$ constant and $r = r_\pm$, และนั่นจะทำให้ได้ ds^2 ดังนี้

$$d\sigma^2 = \rho_\pm^2 d\theta^2 + \left(\frac{2\mu r_\pm}{\rho_\pm}\right)^2 \sin^2\theta \, d\phi^2. \tag{68}$$

โดยการยัดพื้นผิว 2 มิตินี้เข้าไปใน 3 มิติ Euclidean space จะได้ว่ารูปร่างหน้าตาจะเป็นทรงรีที่แกน z จะถูกทำให้แบนมากกว่า (ลูกบอลโดนกดในแนวตั้ง)

ถัดจากนี้ เราจะมาพิจารณาพื้นผิว stationary limit โดยเงื่อนไขสำหรับพื้นผิวนี้คือ $g_{tt} = 0$ ซึ่งจะเงื่อนไขอย่างชัดแจ้งดังนี้

$$1 - \frac{2Mr}{\rho^2} = \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta - 2Mr}{\rho^2} = 0, \;\; \Rightarrow \;\; r = r_{s^\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta} \tag{69}$$

จะเห็นได้ว่า ลักษณะของพื้นผิวจะคล้ายกันกับขอบฟ้าเหตุการณ์ โดยจะมีฟังก์ชัน $\cos^2\theta$ คูณอยู่ที่พจน์ a^2 เพิ่มเข้ามา ดังนั้น ที่ $\theta = 0, \pi$ รัศมีของทั้งสองพื้นผิวจะรวมตัวกัน และแยกกันที่ ค่าอื่นๆของมุม θ ตามที่เห็นในรูป 4 นอกจากนั้นแล้วเรายังพบว่า ผิวนอกของ

พื้นผิว stationary limit จะใหญ่กว่า ผิวนอกของขอบฟ้าเหตุการณ์ และ ผิวนอกของพื้นผิว stationary limit จะเล็กกว่า ผิวในของขอบฟ้าเหตุการณ์ ที่ $\theta = \pi/2$ ผิวในจะมีตำแหน่งเดียวกันกับวงแหวน real singularity ตามที่เห็นได้จากรูป 4.

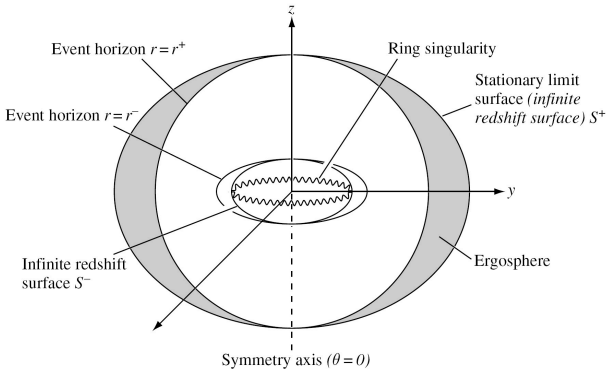

Figure 4: The structure of all event horizons and stationary limit surfaces including the singularity ring [2].

จากรูปนี้ เราจะเห็นได้ว่า มันมีพื้นที่ระหว่าง ผิวนอกของทั้งสองพื้นผิว (พื้นที่ที่แรเงา) เรียกว่า "ergoregion" สำหรับหลุมดำ Schwarzschild นั้นจะไม่มีพื้นที่ส่วนนี้เพราะทั้งสองพื้นผิวจะทับกัน สิ่งสำคัญอย่างหนึ่งสำหรับพื้นที่บริเวณนี้คือ อนุภาคยังสามารถเคลื่อนที่หนีออกมาจากแรงโน้มถ่วงของหลุมดำได้ เพียงแต่ว่าจะต้องหมุนออกมาเท่านั้น เมื่อพิจารณา four-velocity ของอนุภาคโดยที่ให้ r และ θ เป็นค่าคงที่ ในบริเวณ ergoregion เราจะได้ว่า

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}, 0, 0, \frac{d\phi}{d\tau}\right) = u^t \left(1, 0, 0, \frac{d\phi}{dt}\right) = u^t \left(1, 0, 0, \Omega\right) \tag{70}$$

ซึ่ง four-velocity จะเป็นไปตามเงื่อนไข

$$u_\mu u^\mu = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \left(u^t\right)^2 \left(g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega + g_{\phi\phi}\Omega^2\right) = -1 \tag{71}$$

เมื่อ u^t เป็นปริมาณทางฟิสิกส์ จะได้ว่า

$$g_{tt} + 2g_{t\phi}\Omega + g_{\phi\phi}\Omega^2 < 0. \tag{72}$$

เมื่อหาผลเฉลยสำหรับ Ω ของอสมการนี้ เราจะได้ว่า

$$\Omega_- < \Omega < \Omega_+, \tag{73}$$

โดยที่

$$\Omega_{\pm} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}} = \omega \pm \sqrt{\omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}}. \tag{74}$$

เมื่อเราปล่อยให้อนุภาคตกลงไปในแนวรัศมีที่ตำแหน่ง $r = r_{s^+}$ ซึ่ง $g_{tt} = 0$ จะได้ว่า $\Omega = 0$ และเมื่ออนุภาคตกลงไปในบริเวณ ergoregion ซึ่ง $g_{tt} > 0$ ความเร็วเชิงมุมของอนุภาคจะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆในขณะที่ตกลงไป r และยิ่งไปกว่านั้น เราจะพบว่า อนุภาคจะมีความเร็วเชิงมุมมากสุดเมื่อ

$$\left(\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}\right)^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\phi\phi}}, = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi} = 0. \tag{75}$$

โดยการหาผลเฉลยของสมการนี้ เราจะพบว่า$r = r_+$ นั่นคือ อนุภาคจะมีความเร็วเชิงมุมสูงสุดที่ ขอบฟ้าเหตุการณ์พอดี และเมื่อแทนค่าลงไปในสมการ (74) เราจะได้ว่าความเร็วสูงสุดของอนุภาคคือ

$$\Omega_H \equiv \omega(r_+) = \frac{a}{r_+^2 + a^2} = \frac{a}{2Mr_+}. \tag{76}$$

จะเห็นได้ว่า ความเร็วค่านี้จะไม่ขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของอนุภาคเลย แต่จะขึ้นอยู่กับ มวล และ โมเมนตัมเชิงมุมของหลุมดำเท่านั้น โดยทั่วไปแล้ว เราสามารถมองว่า ความเร็วเชิงมุมค่านี้เป็นคุณสมบัติของหลุมดำ และบางที่จะเรียกว่า ความเร็วเชิงมุมของหลุมดำ (แต่จริงๆแล้วเป็นความเร็วเชิงมุมของอนุภาค)

References

[1] Sean M. Carroll, “An Introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry,” Addison Wesley Press, (2004).

[2] M. P. Hobson, G. P. Efatathiou and A. N. Lasenby, “General Relativity: Introduction for Physicists,” Cambridge University Press, (2006).

[3] Lewis. Ryder, “Introduction to General Relativity,” Cambridge University Press, (2009).