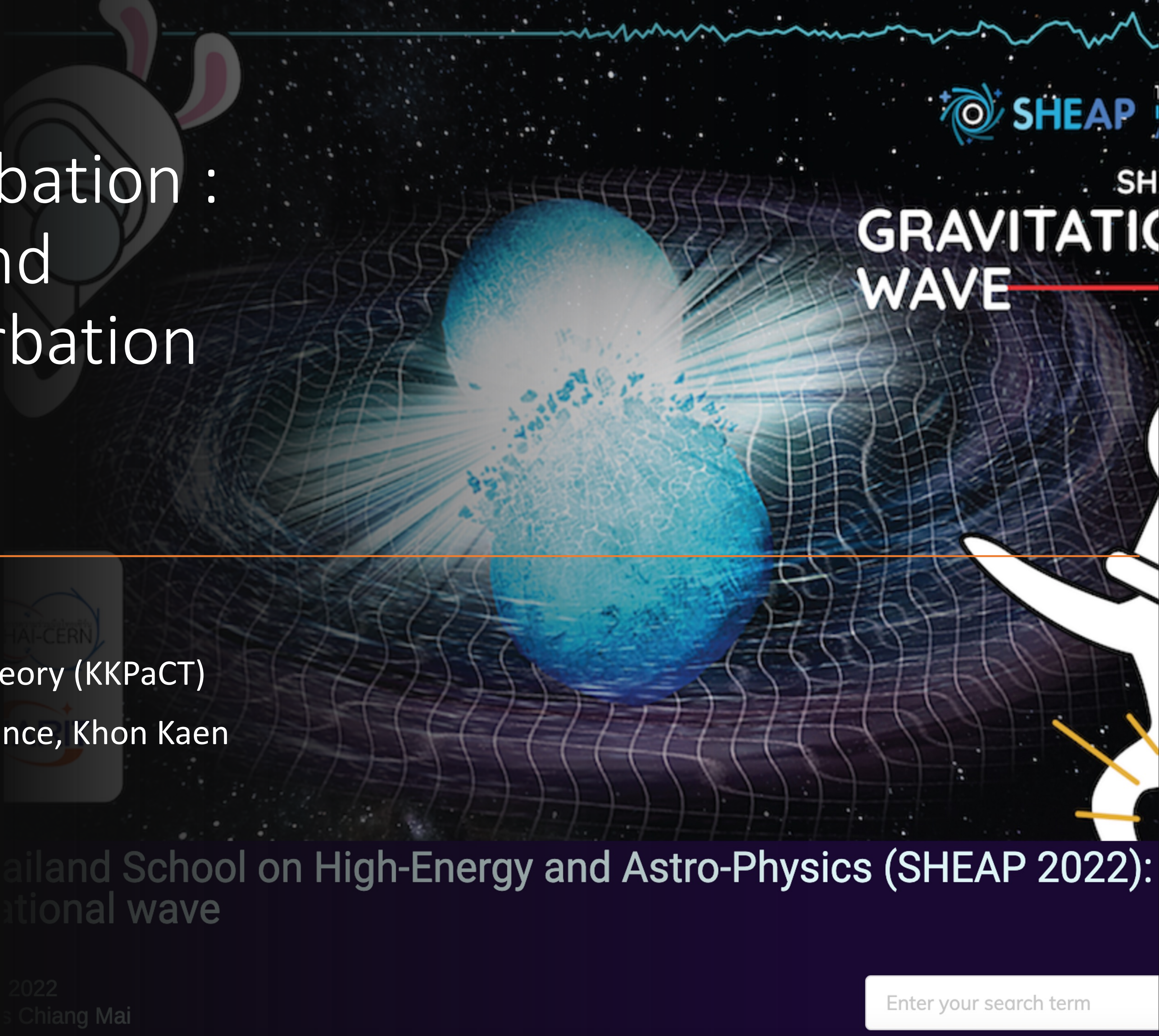
Gravitational Perturbation : Linearized gravity and Cosmological perturbation



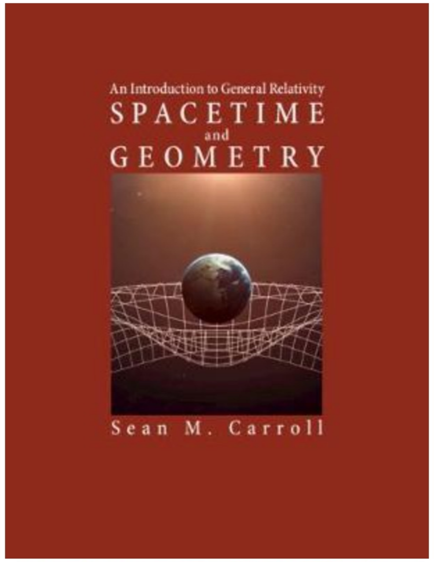
Daris Samart

Khon Kaen Particle and Cosmology Theory (KKPaCT)

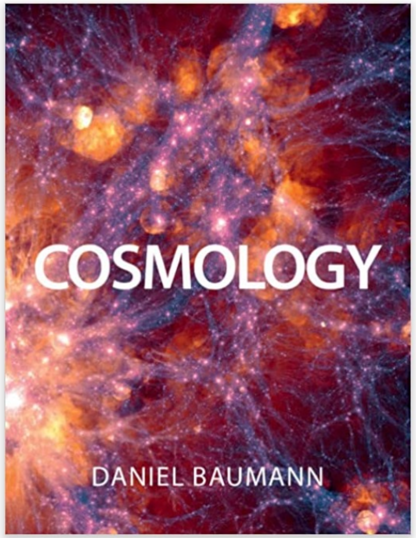
Department of Physics, Faculty of Science, Khon Kaen University

References

- Spacetime and Geometry : An Introduction to General Relativity By Sean M. Carroll



- Cosmology New Edition by Daniel Baumann



Linearized Gravity

- เราสามารถเขียนแยกเมตริกเทนเซอร์ $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ และ $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ สำหรับการประมาณในกรณีที่ความโน้มถ่วงที่ไม่เข้มมาก
- เมื่อ $\eta_{\mu\nu} = (-1,1,1,1)$ เป็นเมตริกเทนเซอร์ในกาลอวกาศ และ $h_{\mu\nu}$ คือปริมาณเทนเซอร์ที่มีค่าน้อยๆ $h_{\mu\nu} \ll 1$ ที่มีสมบัติคล้ายเมตริกเทนเซอร์ หรือเราสามารถพิจารณาให้เป็นสนามสปิน 2 ที่แพร่กระจายในกาลอวกาศพื้นหลังแบบแบน (Minkowski)
- สมบัติการแปลงของ $h_{\mu\nu}$ ภายใต้กาลอวกาศพื้นหลังแบบแบนสามารถเขียนให้ได้ว่า

$$h^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}h^{\rho\sigma}(\Lambda^{-1}x)$$

- การยกขึ้นและยกลงของ spacetime indices สามารถที่ได้ด้วยโดย $\eta_{\mu\nu}$ เช่น

$$h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}h^{\rho\sigma}, \qquad h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$$

- โดยทั่วไปแล้วการก่อกวนในทาง GR นั้นสามารถทำได้โดย พิจารณาให้กาลอวกาศพื้นหลังเป็นแบบโค้งได้ด้วย ซึ่งสามารถเขียนได้ว่า $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \tilde{g}_{\mu\nu}$ เมื่อ $g_{\mu\nu}^{(0)}$ คือเมตริกเทนเซอร์ของกาลอวกาศโค้งใดๆ และเราจะกลับมาพิจารณาในกรณีของจักรวาลวิทยา

- ต่อไปเราจะหาสมการการเคลื่อนที่ (สมการไอน์สไตน์) ที่สอดคล้องกับ $h_{\mu\nu}$

- เราเริ่มที่ Christoffel symbol โดยที่จะเก็บเทอมที่ $h_{\mu\nu}$ กำลังหนึ่งไว้เท่านั้น (Linear or first order) เราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\rho\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda}(\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu})
\end{aligned}
$$

- ต่อไปเราจะคำนวณ Riemann tensor โดยเราจะตัดเทอมที่เป็นผลคูณของ Christoffel symbol ได้เนื่องจาก $\Gamma\Gamma \sim h^2$

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \eta_{\mu\lambda}\partial_\rho \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\lambda}\partial_\sigma \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\rho\partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma\partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu h_{\nu\sigma})
\end{aligned}
$$

- Ricci tensor สามารถเขียนได้ว่า

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \Box h_{\mu\nu})$$

- เมื่อ $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h^\mu{}_\mu, \ \Box = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2.$

- Ricci scalar คือ

$$R = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \Box h$$

- สุดท้ายคือ Einstein tensor

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} R \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \Box h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \Box h) \end{aligned}$$

Gauge invariant of the small pertuerbation $h_{\mu\nu}$

- ในที่นี้เราจะมาพิจารณาว่าด้วยเงื่อนไขการแปลงของ $h_{\mu\nu}$ ที่ทำให้ไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อทำการเปลี่ยน coordinate จาก background spacetime and perturbed spacetime โดยเราจะเรียกตัวเลือกในการแปลง coordinate ว่า gauge choice หรือ gauge transformation

- พิจารณาการแปลง $x^{\mu} \rightarrow \tilde{x}^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x^{\mu})$ เมื่อ ξ^{μ} คือ four-vector ใดๆ เราจะได้ว่า $dx^{\mu} = \left(\eta^{\mu}_{\nu} - \partial_{\nu}\xi^{\mu}\right)d\tilde{x}^{\nu}$ เมื่อแทนค่าลงใน line element $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$ และเราจะได้ว่า $\tilde{g}_{\mu\nu} = \tilde{\eta}_{\mu\nu} + \tilde{h}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\eta_{\nu\alpha}\xi^{\alpha} - \partial_{\nu}\eta_{\mu\alpha}\xi^{\alpha} + O(\xi^2)$

Gauge invariant of the small pertuerbation $h_{\mu\nu}$

- เมื่อเก็บเฉพาะ เราจะได้การแปลงของ $h_{\mu\nu}$ ได้เป็น $\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu$; $\xi_\mu = \eta_{\mu\nu}\xi^\nu$

- เมื่อเราสังเกตการแปลงของ $h_{\mu\nu}$ ข้างบนจะพบว่ามีความคล้ายคลึงกับการการแปลงของ gauge field $A_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi$ โดยการแปลง $h_{\mu\nu}$ เป็นเหมือนการขยายจากแปลง gauge field ซึ่งจะทำให้ $\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$; $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

- ด้วยการแปลงเกจ $h_{\mu\nu}$ เราจะพบว่า $\tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$ ภายใต้ first order linearized gravity

Cosmological Perturbation: Flat (conformal) FRW

- ต่อไปเราจะพิจารณาการก่อกวนที่มีกาลอวกาศพื้นหลังเป็นแบบโค้ง ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาการก่อกวนเชิงจักรวาล (Cosmological Perturbation) ที่มี FRW เป็นพื้นหลัง

- เราจะกำหนดการศึกษาของเราเพียงแค่ส่วนที่เป็น geometry ในสมการไอน์สไตน์เท่านั้น

- เริ่มต้นที่พิจารณาการก่อกวนเมตริกเทนเซอร์ $g_{\mu\nu}(t,\mathbf{x}) = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}(t,\mathbf{x})$ เมื่อ $\bar{g}_{\mu\nu}$ คือเมตริกเทนเซอร์ของกาลอวกาศพื้นหลัง

- ต่อไปเราจะพิจารณา perturbed flat (conformal) FRW line element ดังนี้

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\tau)\left[-(1+2A)\mathrm{d}\tau^2 + 2B_i\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}\tau + \left(\delta_{ij} + 2E_{ij}\right)\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j\right]$$

- โดย flat (conformal) FRW line element คือ $\mathrm{d}s^2 = a^2(\tau)\left[-\mathrm{d}\tau^2 + +\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j\right]$

Scalar-Vector-Tensor decomposition

- จาก $\mathrm{d}s^2 = a^2(\tau)\left[-(1+2A)\mathrm{d}\tau^2 + 2B_i\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}\tau + \left(\delta_{ij} + 2E_{ij}\right)\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j\right]$

  เราสามารถเขียนได้ว่า $ds^2 = a^2(\tau)\left[\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\right]dx^\mu dx^\nu$ และ

$$[h_{\mu\nu}] \equiv \begin{bmatrix} -2A & B_i \\ B_i & 2E_{ij} \end{bmatrix}$$

- $B_i = \partial_i B + \hat{B}_i$, $\partial^i \hat{B}_i = 0$,
- $E_{ij} = C\delta_{ij} + \partial_{\langle i}\,\partial_{j\rangle}E + \partial_{(i}\hat{E}_{j)} + \hat{E}_{ij}$,
- $\partial_{\langle i}\,\partial_{j\rangle}E \equiv \left(\partial_i\,\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)E$, $\partial_{(i}\hat{E}_{j)} \equiv \frac{1}{2}\left(\partial_i\hat{E}_j + \partial_j\hat{E}_i\right)$, $\partial^i\hat{E}_i = 0$, $\partial^i\hat{E}_{ij} = 0$, $\hat{E}^i_i = 0$

Scalar-Vector-Tensor decomposition

- เราจะสามารถเรียกการแยกองค์ประกอบของ $h_{\mu\nu}$ ว่าเป็น Scalar-Vector-Tensor decomposition ดังนี้
- สเกลาร์: A, B, C, E, 4 dof,
- เวกเตอร์: $\hat{B}_i, \hat{E}_i$, (3-1)+(3-1) = 4 dof,
- เทนเซอร์: $\hat{E}_{ij}$, 6-1-3= 2 dof
- ดังนั้นเราจะมี dof ของ $h_{\mu\nu}$ ทั้งหมด 4 + 4 + 2 = 10 dof
- เราจะเห็นได้ว่าการแยกของ $h_{\mu\nu}$ แบบ SVT จะไม่เกิดการผสมกันและสามารถพิจารณาแต่ละตัวได้อย่างอิสระจากกัน

Gauge choice in SVT decomposition

- จากที่ได้กล่าวไปแล้วว่าเราสามารถเลือก gauge choice ของการแปลงระหว่าง coordinate ที่ทำให้ $h_{\mu\nu}$ ไม่เปลี่ยนแปลงหรือเหมือนเดิม ด้วย $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + \xi^{\mu}(x^{\mu})$, $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\xi_{\nu} - \partial_{\nu}\xi_{\mu}$

- ดังนั้นเราสามารถกำหนดการแปลง coordinate ได้ว่า $x^{\mu}(q) \mapsto \tilde{x}^{\mu}(q) \equiv x^{\mu}(q) + \xi^{\mu}(q)$, เมื่อ $\xi^{0} \equiv T$, $\xi^{i} \equiv L^{i} = \partial^{i}L + \hat{L}^{i}$ ที่จุด q ที่เหมือนกันในทั้งสอง coordinate

- นั่นคือ $\mathrm{d}s^{2} = g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu} = \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}^{\alpha}\mathrm{d}\tilde{x}^{\beta}$ และ $g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial\tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial\tilde{x}^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x})$ และ

$$\frac{\partial\tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \begin{pmatrix} \partial\tilde{\tau}/\,\partial\tau & \partial\tilde{\tau}/\,\partial x^{i} \\ \partial\tilde{x}^{i}/\,\partial\tau & \partial\tilde{x}^{i}/\,\partial x^{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + T' & \partial_{i}T \\ L^{i\prime} & \delta^{i}_{j} + \partial_{j}L^{i} \end{pmatrix}$$

Gauge choice in SVT decomposition

- ด้วยเหตุนี้เราสามารถหารูปแบบของ gauge transformation ของ SVT decomposition ได้ว่า
- $A \mapsto A - T' - \mathcal{H}\mathcal{T},$
- $B \mapsto B + T - L',\ \hat{B}_i \mapsto \hat{B}_i - \hat{L}_i',$
- $C \mapsto C - \mathcal{H}\mathcal{T} - \frac{1}{3}\nabla^2 L,$
- $E \mapsto E - L,\ \hat{E}_i \mapsto \hat{E}_i - \hat{L}_i,\ \hat{E}_{ij} \mapsto \hat{E}_{ij}$

Bardeen variables

- เพื่อเป็นการกำจัดปัญหาเกี่ยวกับ gauge transformation ของ SVT variables เราสามารถเขียนตัวแปรชุดใหม่ที่เกิดจากการรวมตัวกันของ SVT variables ดังนี้
- $\Psi \equiv A + \mathcal{H}(B - E') + (B - E')'$,
- $\hat{\Phi}_i \equiv \hat{B}_i - \hat{E}_i'$,
- $\Phi \equiv -C + \frac{1}{3}\nabla^2 E - \mathcal{H}(B - E')$,
- $\hat{E}_{ij}$,

James Maxwell Bardeen (May 9, 1939 – June 20, 2022)

- เราเรียกชุดตัวแปรดังกล่าวว่า Bardeen variables เพื่อเป็นเกียรติแด่ James M. Bardeen ผู้คิดค้น ซึ่งสามารถเขียนได้ดังต่อไปนี้

- และเราสามารถตรวจสอบได้ว่า Bardeen variables นั่นเป็นอิสระจากแปลงเกจนั่นคือ $\Psi \to \Psi'$, $\hat{\Phi}_i \to \hat{\Phi}'_i$, $\Phi \to \Phi'$ หรือเรียกว่าเป็น gauge invariant variables under linear perturbation

Gauge fixing

- ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณา gauge choices ต่างๆที่ใช้ใน cosmological perturbation

- Newtonian (longitudinal) gauge: $B = E = 0$

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\tau)\left[-(1+2\Psi)\mathrm{d}\tau^2 + (1-2\Phi)\delta_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j\right], A \equiv \Psi, C \equiv -\Phi$$

- Line element เป็นเมตริกแนวทแยงซึ่งจะช่วยให้การคำนวณง่ายขึ้นมาก
- เหมาะสำหรับใช้ในการศึกษา structure formation
- สามารถ reproduce ความโน้มถ่วงใน Newtonian limit และ Ψ คือศักย์โน้มถ่วง
- hypersurfaces of constant time are orthogonal to the worldlines of observers at rest in the coordinates (since B = 0) and the induced geometry of the constant-time hypersurfaces is isotropic (since E = 0).

- Spatially flat gauge: $C = E = 0$ (space unpertubed)

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\tau)\left[-(1+2A)\mathrm{d}\tau^2 + 2B_i\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}\tau + \delta_{ij}\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j\right]$$

- เหมาะสมสำหรับในการใช้ศึกษาการ quantum flutuation ของ inflaton field

- Synchronous gauge: $A = B = 0$ (time unperturbed)

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\tau)\left[-\mathrm{d}\tau^2 + \left(\delta_{ij} + 2E_{ij}\right)\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j\right]$$

- เป็นเกจแรกที่ใช้สำหรับ cosmological perturbation ที่มีบทบาทต่อการศึกษา Cosmic Microwave Background (CMB)
- แต่เกจดังกล่าวนี้ยังมีปัญหาบางอย่างที่ทำให้เกิด unphysical modes และเราจำเป็นต้องทำการ fix gauge เพิ่มเติม