

Gravitational Wave II

4th Thailand School on High-Energy and
Astro-Physics (SHEAP2022): Gravitational
Wave

Pitayuth Wongjun

*The Institute for Fundamental Study,
Naresuan University, Phitsanulok 65000, Thailand*

July 15, 2022

Contents

1	Gravitational solution with source	3
2	Generation of gravitational wave from binary stars	9
3	Energy loss due to gravitational wave emission	14

1 Gravitational solution with source

ก่อนหน้านั้น พี่จ๊อด ได้บรรยายให้พวกเราารู้เกี่ยวกับวิธีการหาผลเฉลยของ $h_{\mu\nu}$ ในสุญญากาศ ซึ่งผลเฉลยนั้นก็คือผลเฉลยคลื่นโน้มถ่วงนั่นเอง อย่างไรก็ตาม ถ้าเราอยากทราบว่า คลื่นความโน้มถ่วงนั้นเกิดขึ้นได้อย่างไร เราจะเป็นจะต้องแก้สมการโดยที่มีแหล่งกำเนิดด้วย (ไม่ใช่ในสุญญากาศ) ใน section นี้เราจะได้เรียนรู้วิธีการหาผลเฉลยนั้น รวมถึงเรียนรู้ว่า แหล่งกำเนิดของ คลื่นความโน้มถ่วงนั้นจะต้องมีคุณสมบัติอย่างไร และรวมไปถึงจะวัดคลื่นความโน้มถ่วงได้อย่างไรบ้าง

เราจะเริ่มต้นโดยการพิจารณา สมการคลื่นโดยที่มีแหล่งกำเนิดทั่วไปด้วย คือ

$$\square_x \bar{h}^{\mu\nu} = 2\kappa T^{\mu\nu}, \quad (1)$$

โดยที่ $\bar{h}^{\mu\nu}$ คือ trace reverse ของ $h^{\mu\nu}$, $\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - 1/2\eta^{\mu\nu} h$ เราจะเลือกใช้ Lorentz gauge ซึ่งมีเงื่อนไขดังนี้

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0.$$

จะเห็นได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นสมการแบบ inhomogeneous ซึ่งจะมีหลากหลายวิธีที่ใช้คำนวณ เพื่อความสะดวก ณ ที่นี้ เราจะแก้สมการโดยใช้ Green's function โดยทั่วไปแล้ว เราจะหา Green's function ที่สอดคล้องกับสมการการเคลื่อนที่ของเราก่อน ซึ่งจะง่ายกว่าหาผลเฉลยโดยตรง หลังจากนั้นเราจะใช้ Green's function ในการหาผลเฉลยของเราต่อไป และโดยทั่วไปแล้ว สำหรับสมการที่ไม่มีความซับซ้อนมากนัก มันจะมี Green's function ที่สอดคล้องกับสมการอยู่แล้ว โดยสรุปแล้ว Green's function จะสอดคล้องกับสมการการเคลื่อนที่ของมัน ดังนี้

$$\square_x G(x^\rho - y^\rho) = \delta^{(4)}(x^\rho - y^\rho), \quad (2)$$

โดยที่พิกัด x^μ จะระบุถึงตำแหน่งของคลื่นความโน้มถ่วงที่เราสนใจ และ พิกัด y^μ จะระบุตำแหน่งของแหล่งกำเนิด ผลเฉลยของ $\bar{h}^{\mu\nu}$ จะเขียนให้อยู่ในรูปของ integration ของ Green's function ดังนี้

$$\bar{h}^{\mu\nu} = 2\kappa \int d^4y T^{\mu\nu}(y)G(x^\rho - y^\rho). \quad (3)$$

เราจะเห็นได้ว่า ผลเฉลยนั้นจะขึ้นอยู่กับ แหล่งกำเนิดและ รูปร่างหน้าตาของ Green's function ซึ่งเราสามารถเช็คได้ว่า สมการดังกล่าวเป็นผลเฉลยของสมการ (1) จริง โดยการดำเนินการ \square ที่ผลเฉลย ดังนี้

$$\begin{aligned} \square \bar{h}^{\mu\nu} &= 2\kappa \int d^4y T^{\mu\nu}(y)\delta^{(4)}(x^\rho - y^\rho), \\ &= 2\kappa T^{\mu\nu}(x), \end{aligned}$$

อย่างที่บอกไปก่อนหน้านี้ ส่วนมากเราจะรู้ว่า Green's function มีรูปร่างหน้าตาแบบไหนอยู่แล้ว ถ้าสมการไม่ยากมาก ในกรณีนี้ Green's function ที่สอดคล้องกับสมการ (2) จะเป็น

$$G(x^\rho - y^\rho) = \frac{\delta(x^0 - y^0 - |\vec{x} - \vec{y}|)\Theta(x^0 - y^0)}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|}, \quad (4)$$

โดยที่ $\Theta(x^0 - y^0)$ ใส่เข้ามาเพื่อบ่งบอกว่าผลของสนามจะต้องเกิดหลังจากมีแหล่งกำเนิดแล้ว เมื่อแทนค่า (4) ลงในสมการ (3) เราจะได้

$$\begin{aligned} \bar{h}^{\mu\nu} &= 2\kappa \int d^4y \frac{T^{\mu\nu}(y^0, \vec{y})\delta(x^0 - y^0 - |\vec{x} - \vec{y}|)\Theta(x^0 - y^0)}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|}, \\ &= \frac{\kappa}{2\pi} \int d^3\vec{y} \frac{T^{\mu\nu}(t_r, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \end{aligned} \quad (5)$$

โดยที่ $t_r \equiv t - |\vec{x} - \vec{y}|$ ระบุถึง retarded time จากผลเฉลยนี้ เราจะเห็นได้ว่า สนามโน้มถ่วงของ $\bar{h}^{\mu\nu}$ ที่ตำแหน่ง \vec{x} และเวลา t สามารถหาได้จากการหาปริพันธ์ของแหล่งกำเนิดที่เวลา retarded time $t_r \equiv t - |\vec{x} - \vec{y}|$ ซึ่งเป็นเวลาก่อนหน้านี้ อย่างที่กล่าวไปก่อนหน้านี้ ผลเฉลยคลื่นที่ได้นั้นจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขจาก Lorentz gauge $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$ ซึ่งจะสื่อถึงการอนุรักษ์ของ energy momentum tensor $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ จะเห็นได้ว่า ถ้าเรารู้ว่าแหล่งกำเนิดมีรูปร่างหน้าตาอย่างไร โดยหลักการแล้วเราก็สามารถหาผลเฉลยได้จากสมการข้างบน อย่างไรก็ตาม การวิเคราะห์เชิงคุณภาพนั้นจะยังคงทำได้ยาก เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ เราจะใช้สมมุติฐานที่ว่า แหล่งกำเนิดอยู่ไกลมากๆ กล่าวคือ $|\vec{x}| \gg |\vec{y}|$ จากสมมุติฐานนี้ เราสามารถใช้การกระจาย Taylor ได้ซึ่งนั่นจะนำไปสู่ถึงการระบุคุณลักษณะของแหล่งกำเนิดผ่าน multipole moments ดังนี้

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \Big|_{\vec{y}=0} (y^i) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \Big|_{\vec{y}=0} (y^i y^j) + \dots \quad (6)$$

เมื่อพิจารณาเฉพาะลำดับแรกของการกระจาย จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right|_{\vec{y}=0} (y^i) &= \left. \frac{\partial}{\partial y^i} \frac{1}{((x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2)^{1/2}} \right|_{\vec{y}=0} (y^i), \\
&= \left. -\frac{1}{2} \frac{2(x_i - y_i)(-1)}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \right|_{\vec{y}=0} (y^i), \\
&= \left. \frac{(x_i - y_i)}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} y^i \right|_{\vec{y}=0}, \\
&= \frac{x_i}{|\vec{x}|^3} y^i. \tag{7}
\end{aligned}$$

และเมื่อพิจารณาถึงลำดับที่สอง จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^j \partial y^i} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \Big|_{\vec{y}=0} y^i y^j &= \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \frac{(x_i - y_i)}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \right) \Big|_{\vec{y}=0} y^i y^j, \\
&= \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \frac{(x_i - y_i)}{((x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \Big|_{\vec{y}=0} y^i y^j, \\
&= \frac{1}{2!} \left(-\frac{3}{2} \frac{(x_i - y_i)}{|\vec{x} - \vec{y}|^5} 2(x_j - y_j)(-1) - \frac{\delta_{ij}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \right) \Big|_{\vec{y}=0} y^i y^j, \\
&= \frac{1}{2!} \left(\frac{3x_i x_j}{|\vec{x}|^5} - \frac{\delta_{ij}}{|\vec{x}|^3} \right) y^i y^j. \tag{8}
\end{aligned}$$

แทนค่าลงไปในการผลเฉลยจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\bar{h}^{\mu\nu} &= \frac{\kappa}{2\pi} \left[\frac{1}{r} \int T^{\mu\nu}(t_r, \vec{y}) d^3y + \frac{x_i}{r^3} \int T^{\mu\nu}(ct_r, \vec{y}) y^i d^3y \right. \\
&\quad \left. + \frac{(3x_i x_j - \delta_{ij} r^2)}{2r^5} \int T^{\mu\nu}(t_r, \vec{y}) y^i y^j d^3y + \dots \right]. \tag{9}
\end{aligned}$$

จากสมการข้างบนนี้ เราจะเห็นได้ว่า เราสามารถแยกส่วนของแหล่งกำเนิดออกมาได้ (ส่วนที่ขึ้นกับพิกัด y จะอยู่ในอินทิเกรนเท่านั้น) ดังนั้น เราสามารถนิยามส่วนนี้แยกออกมา โดยใช้ชื่อว่า multipole moments กล่าวคือ

$$M^{\mu\nu; i_1 i_2 i_3 \dots i_l} = \int T^{\mu\nu}(t_r, \vec{y}) y^{i_1} y^{i_2} y^{i_3} \dots y^{i_l} d^3y, \tag{10}$$

และในทำนองเดียวกัน แพตเตอร์ข้างหน้าที่ทั้งหมดสามารถรวมให้อยู่ในรูปสั้นๆได้ดังนี้

$$f_{i_1 i_2 i_3 \dots i_l}(\vec{x}) = \partial_{i_1} \partial_{i_2} \partial_{i_3} \dots \partial_{i_l} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right) \Big|_{\vec{y}=0} \quad (11)$$

ดังนั้น เราสามารถเขียนผลเฉลยให้อยู่ในรูป multipole moments ได้ดังนี้

$$\bar{h}^{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} f_{i_1 i_2 i_3 \dots i_l} M^{\mu\nu; i_1 i_2 i_3 \dots i_l}. \quad (12)$$

ถึงตอนนี้ เมื่อเราใช้สมมุติฐานที่ว่า แหล่งกำเนิดอยู่ไกลมากๆ $|\vec{x}| \gg |\vec{y}|$ เราจะได้ว่า เราสามารถพิจารณาเพียงพจน์แรกเท่านั้น ซึ่งจะได้ว่า

$$\bar{h}^{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{\kappa}{2\pi r} \int T^{\mu\nu}(t_r, \vec{y}) d^3y = \frac{4G}{r} \int T^{\mu\nu}(t_r, \vec{y}) d^3y \quad (13)$$

เพื่อที่จะหาความหมายทางฟิสิกส์ของแต่ละ component ของสนามโน้มถ่วง เราจะให้ว่า แหล่งกำเนิดนั้นเป็น สสารแบบไม่มีความดัน (วิ่งช้ามากจนมองได้ว่าอยู่นิ่งและไม่ชนกัน) ซึ่งสสารดังกล่าวสามารถระบุได้โดยใช้ ความหนาแน่น และ 4-velocity กล่าวคือ

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu. \quad (14)$$

โดยที่ 4-velocity คือ $u^\mu = \gamma(1, \vec{u})$ สำหรับ (0, 0) component เราจะได้ว่า

$$T^{00} = \gamma^2 \rho \stackrel{\text{non-rel}}{\approx} \frac{m}{V} = \frac{E}{V}. \quad (15)$$

ดังนั้น component นี้จะสื่อถึง energy density ของแหล่งกำเนิดนั่นเอง สำหรับ (0, i) components เราจะได้ว่า

$$T^{0i} = \gamma^2 \rho u^i \stackrel{\text{non-rel}}{\approx} \frac{m}{V} u^i = \frac{P^i}{V}. \quad (16)$$

นั่นหมายความว่า components นี้จะสื่อถึง momentum density ของแหล่งกำเนิดนั่นเอง สุดท้าย สำหรับ (i, j) components เราจะได้ว่า

$$T^{ij} = \gamma^2 \rho u^i u^j \stackrel{\text{non-rel}}{\approx} \frac{m u^i u^j}{V} = P^i \frac{u^j}{V}, \quad (17)$$

ซึ่งจะสื่อถึงอัตราการไหลของดมเมนตัมต่อพื้นที่ของแหล่งกำเนิด จากนั้น เราสามารถแทนค่าแต่ละ component ของ energy momentum tensor ลงไปในสมการ เพื่อที่จะหาสนามโน้มถ่วงได้ สำหรับ (0, 0) component นั้น เราจะได้ ผลเฉลยคือ

$$\bar{h}^{00} = \frac{\kappa}{2\pi r} M = \frac{8\pi G}{2\pi r} M = \frac{4GM}{r}, \quad (18)$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า มันคือ ศักย์ Newtonian นั่นเอง จะเห็นได้ว่า มันสอดคล้องกับที่เราพิจารณา
ณห้วงก่อนหน้าในตอนที่เราหาสมการสนามของไอน์สไตน์ ดังนั้นเราพอจะสรุปได้ว่า
component นี้ไม่ได้สื่อถึง คลื่นความโน้มถ่วงแต่อย่างใด เป็นเพียงแต่พื้นหลังของสนาม
โน้มถ่วงเท่านั้น

สำหรับ $(0, i)$ components ผลเฉลยจะเขียนได้เป็น

$$\bar{h}^{0i} = \frac{4GP_{cm}^i}{r}, \quad (19)$$

โดยที่ P_{cm}^i คือโมเมนตัมของจุดศูนย์กลางมวลนั่นเอง นั้นหมายความว่า ถ้าเราเลือกพิจารณา
พิกัด y^i ได้ที่จุดศูนย์กลางมวล (เราสามารถเลือกได้) จะได้ว่าโมเมนตัม ณ จุดนี้จะมีค่า
เป็นศูนย์ (หรือมองอีกมุมคือ เราเลือกที่จะพิจารณาที่กรอบหยุดนิ่งของแหล่งกำเนิดได้
เนื่องจากมีกฎอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้นอยู่) ดังนั้นเราจะได้ว่าผลเฉลยสำหรับ compo-
nents นี้จะเป็นศูนย์ $\bar{h}^{0i} = 0$

สำหรับ (i, j) components เราสามารถเขียนได้เป็น

$$\bar{h}^{ij} = \frac{4G}{r} \int T^{ij}(t_r, \vec{y}) d^3y, \quad (20)$$

จะเห็นได้ว่า components นี้จะสื่อถึงการรวมกันของ stress ภายในของแหล่งกำเนิด ซึ่ง
ยังยากที่จะตีความหมายโดยตรง เพื่อที่จะเห็นความหมายของ components นี้เพิ่มเติม
เราจะใช้เงื่อนไขของการอนุรักษ์ของ energy momentum tensor กล่าวคือ

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y^\mu} T^{\mu\nu}(t_r, \vec{y}) = 0, \\ \Rightarrow & \frac{\partial}{\partial y^0} T^{00}(t_r, \vec{y}) + \frac{\partial}{\partial y^i} T^{i0}(t_r, \vec{y}) = 0, \\ \Rightarrow & \partial_0 T^{0k}(t_r, \vec{y}) + \frac{\partial}{\partial y^i} T^{ik}(t_r, \vec{y}) = 0, \end{aligned}$$

โดยการใส่เงื่อนไขนี้เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int T^{ij}(t_r, \vec{y}) d^3y &= \int T^{ik}(t_r, \vec{y}) \delta_k^j d^3y, \\ &= \int T^{ik}(t_r, \vec{y}) \frac{\partial y^j}{\partial y^k} d^3y, \\ &= \int \left[\frac{\partial}{\partial y^k} (T^{ik}(t_r, \vec{y}) y^j) - \left(\frac{\partial}{\partial y^k} T^{ik}(t_r, \vec{y}) \right) y^j \right] d^3y, \\ &= \int \partial_0 T^{0i}(t_r, \vec{y}) y^j d^3y, \end{aligned} \quad (21)$$

พจน์ขอบที่ได้จากการอินทิเกรต จะเป็นศูนย์ไปเนื่องจากแหล่งกำเนิดนั้นถูกกักไว้ในบริเวณที่จำกัด และเมื่อให้ว่า energy momentum tensor นั้นสมมาตรภายใต้การสลับ index เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int T^{ij}(ct_r, \vec{y}) d^3y &= \int \partial_0 T^{0i}(t_r, \vec{y}) y^j d^3y, \\ &= \int \frac{1}{2} (\partial_0 T^{0i}(t_r, \vec{y}) y^j + \partial_0 T^{0j}(t_r, \vec{y}) y^i) d^3y, \\ &= \frac{1}{2} \partial_0 \int (T^{0i}(t_r, \vec{y}) y^j + T^{0j}(t_r, \vec{y}) y^i) d^3y. \quad (22)\end{aligned}$$

เมื่อพิจารณา พจน์ดังกล่าว เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \frac{\partial}{\partial y^k} (T^{0k}(t_r, \vec{y}) y^i y^j) d^3y &= \int (\partial_k T^{0k}(t_r, \vec{y}) y^i y^j + T^{0k}(t_r, \vec{y}) \partial_k y^i y^j + T^{0k}(t_r, \vec{y}) y^i \partial_k y^j) d^3y \\ &= \int (\partial_k T^{0k}(t_r, \vec{y}) y^i y^j + T^{0i}(t_r, \vec{y}) y^j + T^{0j}(t_r, \vec{y}) y^i) d^3y \\ \therefore \int (T^{0i}(t_r, \vec{y}) y^j + T^{0j}(t_r, \vec{y}) y^i) d^3y &= - \int \partial_k T^{0k}(t_r, \vec{y}) y^i y^j d^3y.\end{aligned}$$

และเมื่อแทนค่าลงไปในการข้างบน เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int T^{ij}(t_r, \vec{y}) d^3y &= -\frac{1}{2} \partial_0 \int \left(\frac{\partial}{\partial y^k} T^{0k}(t_r, \vec{y}) y^i y^j \right) d^3y, \\ &= \frac{1}{2} \partial_0^2 \int T^{00}(t_r, \vec{y}) y^i y^j d^3y. \quad (24)\end{aligned}$$

และเพื่อความสะดวก เราจะนิยามปริมาณที่อยู่ที่ยูนิทรีเกรทอยู่ให้เป็นเทนเซอร์ quadrupole moment ดังนี้

$$I^{ij} \equiv \int T^{00}(ct_r, \vec{y}) y^i y^j d^3y. \quad (25)$$

ดังนั้น เราจะได้ผลเฉลยที่เขียนให้อยู่ในรูปของ เทนเซอร์ quadrupole moment คือ

$$\bar{h}^{ij} = \frac{2G}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} I^{ij}(t) = \frac{2G}{r} \ddot{I}^{ij}. \quad (26)$$

จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยคลื่นความโน้มถ่วงนั้น จะขึ้นอยู่กับ การเปลี่ยนแปลงอันดับสองของ quadrupole moment ซึ่งจะแตกต่างกันอย่างมีนัยกับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ที่เกิดขึ้น

เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของ dipole ทั้งนี้เนื่องจากว่า สำหรับในกรณีของ ความโน้มถ่วงนั้น จะมีกฎอนุรักษ์โมเมนตัมเข้ามากำกับด้วย เช่นเมื่อเราพิจารณา มวลสองก้อน m_1 and m_2 สัน มันจะสันโดยยังคงเป็นไปตามกฎอนุรักษ์โมเมนตัม แต่ในกรณีของ คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า เราไม่มีกฎอนุรักษ์โมเมนตัมของประจุ q_1 and q_2 ดังนั้น ในกรณีนี้ การสันของสองประจุนี้จึงเป็นแหล่งกำเนิดคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าได้

2 Generation of gravitational wave from binary stars

จาก section ก่อนหน้านี้ จะเห็นได้ว่า การสันของมวลสองก้อนนั้นจะไม่สามารถสร้าง คลื่นความโน้มถ่วงได้ จริงๆแล้ว การก่อเกิดของคลื่นโน้มถ่วงนั้นสามารถสังเกตได้จาก การโคจรรอบจุดศูนย์กลางของดาวคู่ ใน section นี้เราจะเรียนรู้ว่า ดาวคู่อย่างง่ายนั้นจะ ทำให้เกิดคลื่นความโน้มถ่วงได้อย่างไร

พิจารณาดาวคู่ ที่มีมวลเท่ากัน M เคลื่อนที่รอบจุดศูนย์กลางมวลเป็นวงกลม รัศมี a ที่ตำแหน่ง (x_1, x_2) ดังแสดงในรูป 1 จากนิยามของ quadrupole moment tensor ใน

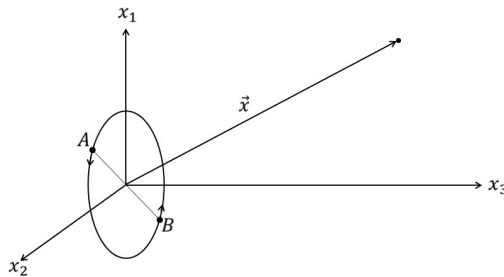


Figure 1: Illustration for simple binary star which both are identical with mass M .

section ก่อนหน้านี้ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} I^{ij}(t) &= \int T^{00} y^i y^j d^3 y, \\ &= \int \rho y^i y^j d^3 y, \\ &= \int \rho x^i x^j d^3 x. \end{aligned}$$

เราจะให้ดาวคู่มีขนาดเล็กมาก ซึ่งจะทำให้เราประมาณได้ว่า ความหนาแน่นจะเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชัน ดิแรคเดลตา ได้ และเมื่อให้ความเร็วเชิงมุมของดาวคู่มีค่าคงที่เป็น

Ω เราจะได้

$$\rho_A = M\delta(x^3) [\delta(x^1 - a \cos \Omega t)\delta(x^2 - a \sin \Omega t)], \quad (27)$$

$$\rho_B = M\delta(x^3) [\delta(x^1 + a \cos \Omega t)\delta(x^2 + a \sin \Omega t)], \quad (28)$$

$$\rho = M\delta(x^3) [\delta(x^1 - a \cos \Omega t)\delta(x^2 - a \sin \Omega t) + \delta(x^1 + a \cos \Omega t)\delta(x^2 + a \sin \Omega t)] \quad (29)$$

แทนค่าความหนาแน่นนี้เข้าไปในสมการ quadrupole moment tensor ข้างบน แล้วทำการคำนวณแยกแต่ละ components จะได้ว่า

$$\begin{aligned} I^{11}(t) &= \int \rho (x^1)^2 d^3x, \\ &= M [(a \cos \Omega t)^2 + (-a \cos \Omega t)^2], \\ &= M (2a^2 \cos^2 \Omega t), \\ &= Ma^2 (1 + \cos 2\Omega t), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} I^{22}(t) &= \int \rho (x^2)^2 d^3x, \\ &= M (2a^2 \sin^2 \Omega t), \\ &= Ma^2 (1 - \cos 2\Omega t), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} I^{12}(t) &= \int \rho x^1 x^2 d^3x, \\ &= M ((-a \cos \Omega t) (-a \sin \Omega t) + (a \cos \Omega t) (a \sin \Omega t)), \\ &= M (2a^2 \cos \Omega t \sin \Omega t), \\ &= Ma^2 \sin 2\Omega t, \\ &= I^{21}(t), \end{aligned} \quad (32)$$

$$I^{3i}(t) = I^{i3}(t) = 0, \quad (33)$$

$$I^{ij}(t) = Ma^2 \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\Omega t & \sin 2\Omega t & 0 \\ \sin 2\Omega t & 1 - \cos 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (34)$$

แทนค่า components เหล่านี้ลงในสมการ (26) เราจะได้ (i, j) component ของผลเฉลยความโน้มถ่วงเป็น

$$\begin{aligned} \bar{h}^{ij}(t, \vec{x}) &= \frac{2G}{r} \ddot{I}^{ij}, \\ &= \frac{2G}{r} Ma^2 (2\Omega)^2 \begin{pmatrix} -\cos 2\Omega t' & -\sin 2\Omega t' & 0 \\ -\sin 2\Omega t' & \cos 2\Omega t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (35)$$

where $t' = t - r$. จากสมการข้างบนนี้ เราจะเห็นได้ว่า คลื่นโน้มถ่วงนั้นจะมี 2 polarizations และความถี่ของคลื่นโน้มถ่วงจะเป็นสองเท่าของ ความถี่ของการหมุนของดาว

คู่

$$\omega = 2\Omega \quad (36)$$

สิ่งสำคัญอย่างหนึ่งที่จะระบุตัวตนของคลื่นความโน้มถ่วงคือ พลังงานของคลื่น การที่จะหาพลังงานของคลื่นที่แผ่ไปกับ เราสามารถหาได้ 2 วิธีหลักๆ คือ หา energy momentum tensor ของมัน ซึ่งต้องใช้ Lagrangian formulation อย่างที่สอง เราสามารถหาได้โดย ทำ perturbation อันดับสองของ $G_{\mu\nu}$ (ทั้งสองแบบให้ผลเหมือนกัน) ใน การบรรยายนี้จะใช้วิธีที่สอง กล่าวคือ

$$t_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G} G_{\mu\nu}^{(2)} \quad (37)$$

เนื่องจาก expression ของ $G_{\mu\nu}^{(2)}$ ยาวมาก เราจะไม่เขียนรูปแบบของมันอย่างชัดเจน ณ ที่นี้ ดูเหมือนว่าจะสามารถหา พลังงานงานที่แผ่ไปกับคลื่นความโน้มถ่วงได้แล้ว แต่จริงๆ แล้ว ถ้าเราพิจารณาที่จุด จุดหนึ่ง เราจะพบว่า ที่จุดนั้น (เล็กมากพอ) เราจะสามารถหา พิกัดเหมาะๆ ที่ทำให้ กาลอวกาศแบนราบได้ (จริงๆ แล้ว กาลอวกาศ แบนราบอยู่แล้ว) ซึ่งนั่นหมายความว่า energy momentum tensor ที่เราได้มานั้น มันมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งโดยหลักการแล้วจะเป็นศูนย์ทุกจุด เพื่อที่จะนิยามพลังงานของ คลื่นความโน้มถ่วงได้ เหมาะๆ เราจะนิยาม energy momentum tensor ผ่านค่าเฉลี่ยรอบๆจุดที่พิจารณาแทน กล่าวคือ

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu} &\equiv -\frac{1}{8\pi G} \langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle, \\ &= -\frac{1}{8\pi G} \left\langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma}^{(2)} \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \kappa (h^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma} \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} T) \right\rangle, \\ &= \frac{1}{32\pi G} \left\langle \partial_\mu h_{\rho\sigma} \partial_\nu h^{\rho\sigma} + 2 (\partial^\rho h - \partial_\sigma h^{\rho\sigma}) \partial_{(\mu} h_{\nu)\rho} - \partial_\mu h \partial_\nu h \right. \\ &\quad \left. + \kappa (2h T_{\mu\nu} - 4h_{\rho(\mu} T_{\nu)}^\rho - h^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma} \eta_{\mu\nu}) \right\rangle \quad (38) \end{aligned}$$

โดยที่ การเฉลี่ยนี้สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\begin{aligned} \langle \partial_\mu a \rangle &= 0, \\ \langle \partial_\mu (ab) \rangle &= 0, \\ \langle b \partial_\mu a \rangle &= -\langle a \partial_\mu b \rangle, \quad (39) \end{aligned}$$

และเพื่อความสะดวกมากกว่านี้ เราจะเลือก gauge ที่ $h_{\mu\nu}$ มัน transverse และ traceless รวมไปถึง พิจารณาในกรณีของสุญญากาศ ซึ่งสุดท้ายแล้วเราจะได้

$$t_{\mu\nu}^{TT} = \frac{1}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{\rho\sigma}^{TT} \partial_\nu h_{\rho\sigma}^{TT} \rangle = \frac{1}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{ij}^{TT} \partial_\nu h_{ij}^{TT} \rangle. \quad (40)$$

นอกจากนี้แล้ว ถ้าเราต้องการหาว่า พลังงานที่ไหลไปตามคลื่นโน้มถ่วงนี้มีค่าเท่าใด (เรียกว่า energy flux) เราสามารถ นิยามผ่าน component $0i$ ได้ดังนี้

$$F(\vec{n}) = t^{0l} n_l = \frac{1}{32\pi G} \langle \partial_0 h_{ij}^{TT} \partial_t h_{TT}^{ij} \rangle n^l = \frac{\omega^2}{32\pi G} \langle \bar{h}_{TT}^{ij} \bar{h}_{ij}^{TT} \rangle \quad (41)$$

จะเห็นได้ว่า ณ ตอนนี เราสามารถเชื่อมโยง พลังงานที่คลื่นพาไปได้ และ คุณสมบัติของ แหล่งกำเนิดได้แล้ว สุดท้ายแล้วเราจะได้ว่า energy flux ของ คลื่นโน้มถ่วงที่เกิดจากการเซตระบบแบบนี้จะเป็นคลื่นแบบ transverse และ traceless ที่เคลื่อนที่ไปในทิศทาง z สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} F(\hat{z}) &= \frac{\omega^2}{32\pi G} \left(\frac{8G}{r} M a^2 \Omega^2 \right)^2 \langle \cos^2 2\Omega t + \sin^2 2\Omega t + \sin^2 2\Omega t + \cos^2 2\Omega t \rangle, \\ &= \frac{16G}{\pi} \left(\frac{M a^2 \Omega^3}{r} \right)^2 \end{aligned} \quad (42)$$

คำถาม: เราสามารถคำนวณหา energy flux ของคลื่นความโน้มถ่วงที่เคลื่อนที่ไปในทิศ x และ y ได้หรือไม่

คำตอบคือ ได้ แต่ถ้าเราต้องการใช้สูตรข้างบน เราจะเป็นจะต้องทำให้คลื่นที่เคลื่อนที่ไปในทิศทางดังกล่าวเป็นคลื่นแบบ transverse และ traceless ก่อน อย่างไรก็ตาม เราอาจจะมีคำถามต่อมาว่า เราจะสามารถหาคลื่นแบบ transverse และ traceless ในทิศทาง x และ y ได้อย่างไร หนึ่งในหลักการสำคัญคือ เราจะต้อง หา projection operator เหมาะๆ มาทำการ project คลื่นลงบนแกนที่เราต้องการ ซึ่ง projection operator นั้นคือ $P_i^j = \delta_i^j - \hat{n}^i \hat{n}_j$ โดยที่ \hat{n}^i คือ unit normal vector ของทิศทางที่เราต้องการจะ project ลงไป เพื่อให้เห็นภาพการใช้งานของ projection operator มากขึ้น ลองพิจารณา dot product ของ เวกเตอร์ใดๆที่เรา project ไปแล้ว จะได้ว่า

$$\begin{aligned} v^i &= P_i^j v^j, \\ \hat{n}_i v^i &= \hat{n}_i P_i^j v^j, \\ &= \hat{n}_i (\delta_i^j - \hat{n}^i \hat{n}_j) v^j, \\ &= \hat{n}_j v^j - \hat{n}_i \hat{n}^i \hat{n}_j v^j = 0. \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า เราจะได้เวกเตอร์ transverse โดยการใส่ projection operator และเพื่อที่จะได้เทนเซอร์ที่เป็น transversal และ traceless เราจะลองพิจารณา trace ของ transverse

tensor ใดๆ $A_T^{ij} = P_k^i P_l^j A^{kl}$ กล่าวคือ

$$\begin{aligned}
A_T^i{}_i &= P_k^i P_{il} A^{kl}, \\
&= P_{il} (\delta_k^i - \hat{n}^i \hat{n}_k) A^{kl}, \\
&= P_{il} A^{il} - P_{il} \hat{n}^i \hat{n}_k A^{kl}, \\
&= P_{il} A^{il} - (\delta_{il} - \hat{n}_i \hat{n}_l) \hat{n}^i \hat{n}_k A^{kl}, \\
&= P_{il} A^{il} - (\hat{n}_l \hat{n}_k A^{kl} - \hat{n}_l \hat{n}_k A^{kl}), \\
\text{Tr}(A_T) &= P_{il} A^{il}.
\end{aligned} \tag{43}$$

เมื่อ trace ของ projection operator คือ

$$P^i{}_i = (\delta_i^i - \hat{n}^i \hat{n}_i) = 2, \tag{44}$$

เราจะได้ว่า transverse-traceless operator จะนิยามได้ดังนี้

$$H^{ij} = P_k^i P_l^j - \frac{1}{2} P^{ij} P_{kl}, \tag{45}$$

ณ ตอนนี เราได้วิธีการที่จะทำให้ คลื่นความโน้มถ่วงเป็นแบบ transverse และ traceless ในทิศทาง x and y แล้ว เราจะลองใช้ transverse-traceless operator หาคคลื่นโน้มถ่วงในทิศทาง x ซึ่ง unit normal vector สามารถเขียนได้ดังนี้ $\hat{n} = (1, 0, 0)$ ดังนั้น เราสามารถคำนวณหา \bar{h}_{TT}^{ij} ในแต่ละ components ได้ กล่าวคือ

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{TT}^{11} &= \left(P_k^1 P_l^1 - \frac{1}{2} P^{11} P_{kl} \right) \bar{h}^{kl}, \\
&= \left((\delta_k^1 - \hat{n}^1 \hat{n}_k) (\delta_l^1 - \hat{n}^1 \hat{n}_l) - \frac{1}{2} (\delta^{11} - \hat{n}^1 \hat{n}^1) (\delta_{kl} - \hat{n}_k \hat{n}_l) \right) \bar{h}^{kl}, \\
&= (\delta_k^1 \delta_l^1 - \hat{n}^1 \hat{n}_k \delta_l^1 - \hat{n}^1 \hat{n}_l \delta_k^1 + \hat{n}_k \hat{n}_l) \bar{h}^{kl}, \\
&= \bar{h}^{11} - \hat{n}^1 \hat{n}_k \bar{h}^{k1} - \hat{n}^1 \hat{n}_l \bar{h}^{l1} + \bar{h}^{11} = 2\bar{h}^{11} - \bar{h}^{11} - \bar{h}^{11} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{TT}^{22} &= \left((\delta_k^2 - \hat{n}^2 \hat{n}_k) (\delta_l^2 - \hat{n}^2 \hat{n}_l) - \frac{1}{2} (\delta^{22} - \hat{n}^2 \hat{n}^2) (\delta_{kl} - \hat{n}_k \hat{n}_l) \right) \bar{h}^{kl}, \\
&= \delta_k^2 \delta_l^2 \bar{h}^{kl} - \frac{1}{2} (\delta_{kl} - \hat{n}_k \hat{n}_l) \bar{h}^{kl}, \\
&= \bar{h}^{22} - \frac{1}{2} (\bar{h}^{ll} - \hat{n}_k \hat{n}_l \bar{h}^{kl}), \\
&= \bar{h}^{22} + \frac{1}{2} \bar{h}^{11} = \frac{2G}{r} M a^2 (2\Omega)^2 \left(\cos 2\Omega t - \frac{1}{2} \cos 2\Omega t \right) = \frac{1}{2} \frac{2G}{r} M a^2 (2\Omega)^2 \cos 2\Omega t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{TT}^{33} &= \left((\delta_k^3 - \hat{n}^3 \hat{n}_k) (\delta_l^3 - \hat{n}^3 \hat{n}_l) - \frac{1}{2} (\delta^{33} - \hat{n}^3 \hat{n}^3) (\delta_{kl} - \hat{n}_k \hat{n}_l) \right) \bar{h}^{kl}, \\
&= \delta_k^3 \delta_k^3 \bar{h}^{kl} - \frac{1}{2} (\delta_{kl} - \hat{n}_k \hat{n}_l) \bar{h}^{kl}, \\
&= \bar{h}^{33} - \frac{1}{2} (h^{ll} - \hat{n}_k \hat{n}_l \bar{h}^{kl}), \\
&= \frac{1}{2} \bar{h}^{11} = -\frac{1}{2} \frac{2G}{r} M a^2 (2\Omega)^2 \cos 2\Omega t.
\end{aligned}$$

โดยใช้วิธีการเดียวกันนี้ เราจะได้

$$\bar{h}_{TT}^{1i} = \bar{h}_{TT}^{23} = 0. \quad (46)$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$\bar{h}_{TT}^{ij}(\hat{x}) = \frac{2G}{r} M a^2 (2\Omega)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \cos 2\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \cos 2\Omega t \end{pmatrix}, \quad (47)$$

ดังนั้น energy flux ของคลื่นโน้มถ่วงที่เคลื่อนที่ไปในทิศ x จะเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
F(\hat{x}) &= \frac{\omega^2}{32\pi G} \langle \bar{h}_{TT}^{ij}(\hat{x}) \bar{h}_{ij}^{TT}(\hat{x}) \rangle, \\
&= \frac{\omega^2}{32\pi G} \left(\frac{8G}{c^4 r} M a^2 \Omega^2 \right)^2 \left\langle \frac{1}{4} \cos^2 2\Omega t + \frac{1}{4} \cos^2 2\Omega t \right\rangle, \\
&= \frac{2G}{\pi} \left(\frac{M a^2 \Omega^3}{r} \right)^2 = \frac{1}{8} F(\hat{z}).
\end{aligned} \quad (48)$$

โดยใช้สมมาตรแล้ว การคำนวณ energy flux ของคลื่นโน้มถ่วงที่เคลื่อนที่ไปในทิศ y จะได้ค่าเท่ากับผลที่คำนวณในทิศ x $F(\hat{y}) = F(\hat{x})$ ซึ่งจะเห็นได้ว่ามีค่าน้อยกว่าคลื่นที่เคลื่อนที่ไปในทิศทางที่ตั้งฉากกับระนาบการหมุนของดาวคู่ถึง 8 เท่า ดังนั้น เราจะได้เห็นว่า คลื่นความโน้มถ่วงที่เกิดจากดาวคู่นั้นขึ้นอยู่กับทิศทางค่อนข้างมาก

3 Energy loss due to gravitational wave emission

จาก section ที่แล้ว จะเห็นได้ว่า คลื่นความโน้มถ่วงสามารถเกิดได้จากดาวคู่ นอกจากนั้น เรายังพบว่า คลื่นความโน้มถ่วงที่แผ่ออกมานั้นยังพาพลังงานส่วนหนึ่งออกมาด้วย นั่นหมายความว่า ระบบดาวคู่นั้นต้องสูญเสีย พลังงานของตัวมันด้วย ใน section นี้เรา

จะมาเรียนรู้ว่า อัตราการสูญเสียพลังงานที่ว่่านั้นมีค่าเท่าไร และเรามีหนทางที่จะวัดการมีอยู่ของคลื่นความโน้มถ่วงได้อย่างไร

เพื่อความสะดวกในการทำความเข้าใจ เราจะสรุปเนื้อหาสำคัญที่จะนำไปใช้ต่อก่อน กล่าวคือ จาก section ที่แล้ว เราได้เรียนรู้ว่า คลื่นความโน้มถ่วงสามารถหาได้จาก quadrupole moment tensor I^{ij} ซึ่งดูได้จากสมการ (34) โดยที่ สัมพันธ์กับคลื่นความโน้มถ่วงดังนี้

$$\bar{h}_{ij} = \frac{2G}{r} \ddot{I}_{ij}(t'), \quad (49)$$

โดยที่ $t' = t - r$ และ dot หมายถึงอนุพันธ์เทียบกับเวลา t ปริมาณที่สำคัญอย่างหนึ่งคือ energy flux ของคลื่นความโน้มถ่วง ซึ่งขึ้นกับ คลื่นความโน้มถ่วงดังนี้

$$F(\vec{n}) = \frac{1}{32\pi G} \langle \partial_0 \bar{h}_{TT}^{ij} n^k \partial_k \bar{h}_{ij}^{TT} \rangle = \frac{1}{32\pi G} \langle \partial_t \bar{h}_{TT}^{ij} \partial_r \bar{h}_{ij}^{TT} \rangle. \quad (50)$$

เพื่อความสะดวก เราจะเลือกคลื่นความโน้มถ่วงในทิศทาง \hat{r} และจะได้ว่า $\bar{h}_{TT}^{ij} = h_{TT}^{ij}$ เนื่องจาก \bar{h}^{ij} เป็น trace reverse ของ h^{ij} จากสมการนี้ เราจะเห็นได้ว่า energy flux ขึ้นกับ คลื่นที่เป็น transverse และ traceless ซึ่งเราก็ได้เรียนรู้วิธีการหามาแล้วโดยใช้ projection ในสมการ (45) ดังนั้นส่วนที่เป็น transverse และ traceless ของ quadrupole moment tensor จะเขียนได้ดังนี้

$$I_{TT}^{ij} = \left(P_k^i P_l^j - \frac{1}{2} P^{ij} P_{kl} \right) I^{kl}. \quad (51)$$

ถัดจากนี้เราจะพิจารณาการไหลของ energy จากปริมาณที่เราสรุปไปก่อนหน้านี้ ในทำนองเดียวกันกับกรณีของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ความส่องสว่าง (luminosity) ของคลื่นที่ระยะห่างจากแหล่งกำเนิด r สามารถนิยามให้ขึ้นกับ energy flux ที่ผ่านผิวปิดที่ระยะทาง r ได้ดังนี้

$$\frac{dE}{dt} = -L_{GW} = - \int F(\hat{r}) r^2 d\Omega = - \int F(\hat{r}) r^2 \sin^2 \theta d\theta d\phi. \quad (52)$$

ข้อสังเกตหนึ่ง จากสมการข้างบนคือ เครื่องหมายลบที่อยู่ข้างหน้าสมการนั้นบ่งบอกถึงการสูญเสียพลังงานของแหล่งกำเนิด แทนค่าปริมาณต่างๆลงในสมการข้างบน จะได้ว่า

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{r^2}{32\pi G} \int \langle \partial_t \bar{h}_{TT}^{ij} \partial_r \bar{h}_{ij}^{TT} \rangle \sin^2 \theta d\theta d\phi. \quad (53)$$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณตอนหลัง เราจะพิจารณาส่วนของ traceless ของ quadrupole moment tensor ซึ่งเรียกว่า "reduced quadrupole moment tensor" โดยที่มันนิยามได้ดังนี้

$$J^{ij} = I^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij}I. \quad (54)$$

ทั้งนี้ เนื่องจากว่า $J_{TT}^{ij} = I_{TT}^{ij}$ อัตราการไหลของพลังงานในสมการ (53) จะยังคงใช้ได้เหมือนเดิม

จะเห็นได้ว่า ประเด็นหลักๆของการคำนวณคือ เราจะต้องคำนวณปริมาณนี้ $\langle \partial_t \bar{h}_{TT}^{ij} \partial_r \bar{h}_{ij}^{TT} \rangle$ แล้วก็ทำการ อินทิเกรตตามสมการข้างบน
พิจารณา $\partial_t \bar{h}_{TT}^{ij}$ และ $\partial_r \bar{h}_{ij}^{TT}$ จะได้ว่า

$$\partial_t \bar{h}_{TT}^{ij} = \frac{2G}{r} \ddot{J}_{TT}^{ij}, \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \partial_r \bar{h}_{ij}^{TT} &= 2G \left(-\frac{1}{r^2} \ddot{J}_{ij}^{TT} + \frac{1}{r} \ddot{J}_{ij}^{TT} \frac{\partial t'}{\partial r} \right), \\ &= \frac{2G}{r} \left(-\frac{1}{r} \ddot{J}_{ij}^{TT} - \ddot{J}_{ij}^{TT} \right), \\ &= -\frac{2G}{r} \ddot{J}_{ij}^{TT}, \end{aligned} \quad (56)$$

โดยที่เราได้ตัดพจน์ r^{-2} ทิ้ง โดยใช้สมมุติฐานที่ว่า คลื่นอยู่ไกลจากแหล่งกำเนิดมากๆ ดังนั้น พจน์ $\langle \partial_t \bar{h}_{TT}^{ij} \partial_r \bar{h}_{ij}^{TT} \rangle$ จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\langle \partial_t \bar{h}_{TT}^{ij} \partial_r \bar{h}_{ij}^{TT} \rangle = - \left(\frac{2G}{r} \right)^2 \langle \ddot{J}_{TT}^{ij} \ddot{J}_{ij}^{TT} \rangle. \quad (57)$$

แทนค่าปริมาณนี้ลงในสมการ (53) จะได้ อัตราการไหลของพลังงานคือ

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{8\pi} \int \langle \ddot{J}_{TT}^{ij} \ddot{J}_{ij}^{TT} \rangle \sin^2 \theta d\theta d\phi. \quad (58)$$

เมื่อเราคำนวณ reduced quadrupole moment tensor โดยใช้ตัวดำเนินการที่นิยามในสมการ (45) เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} J_{TT}^{ij} &= \left[(\delta_k^i - \hat{n}^i \hat{n}_k) (\delta_l^j - \hat{n}^j \hat{n}_l) - \frac{1}{2} (\delta^{ij} - \hat{n}^i \hat{n}^j) (\delta_{kl} - \hat{n}_k \hat{n}_l) \right] J^{kl}, \\ &= \left[J^{ij} - J^{il} \hat{n}^j \hat{n}_l - J^{kj} \hat{n}^i \hat{n}_k + J^{kl} \hat{n}^i \hat{n}_k \hat{n}^j \hat{n}_l + \frac{1}{2} \delta^{ij} \hat{n}_k \hat{n}_l J^{kl} - \frac{1}{2} J^{kl} \hat{n}_k \hat{n}_l \hat{n}^i \hat{n}^j \right], \\ &= \left[J^{ij} - J^{il} \hat{n}^j \hat{n}_l - J^{kj} \hat{n}^i \hat{n}_k + \frac{1}{2} J^{kl} \hat{n}_k \hat{n}_l \hat{n}^i \hat{n}^j + \frac{1}{2} \delta^{ij} \hat{n}_k \hat{n}_l J^{kl} \right], \end{aligned} \quad (59)$$

และจะได้

$$\ddot{J}_{TT}^{ij} = \left[\ddot{J}^{ij} - 2\hat{n}_k \hat{n}^{(i} \ddot{J}^{j)k} + \frac{1}{2} \ddot{J}^{kl} \hat{n}_k \hat{n}_l \hat{n}^i \hat{n}^j + \frac{1}{2} \delta^{ij} \hat{n}_k \hat{n}_l \ddot{J}^{kl} \right]. \quad (60)$$

หลังจากนั้น เราจะคำนวณหา $\langle \ddot{J}_{TT}^{ij} \ddot{J}_{ij}^{TT} \rangle$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \langle \ddot{J}_{TT}^{ij} \ddot{J}_{ij}^{TT} \rangle &= \left\langle \ddot{J}^{ij} \ddot{J}_{ij} - 4 \ddot{J}^{ij} \hat{n}^l \hat{n}_i \ddot{J}_{jl} + \ddot{J}^{ij} \hat{n}_i \hat{n}_j \hat{n}_k \hat{n}_l \ddot{J}^{kl} + 4 \hat{n}_l \hat{n}^{(i} \ddot{J}^{j)l} \hat{n}^k \hat{n}_i \ddot{J}_{jk} \right. \\ &\quad - 2 \hat{n}_l \hat{n}^i \ddot{J}^{jl} \hat{n}_i \hat{n}_j \hat{n}_k \hat{n}_m \ddot{J}^{km} + 2 \hat{n}_l \ddot{J}^{jl} \hat{n}^k \ddot{J}_{jk} + 2 \hat{n}_l \hat{n}^j \ddot{J}^{il} \hat{n}^k \hat{n}_i \ddot{J}_{jk} \\ &\quad - 2 \hat{n}_j \hat{n}_l \ddot{J}^{jl} \hat{n}_k \hat{n}_m \ddot{J}^{km} - 2 \hat{n}_l \hat{n}^i \ddot{J}^{jl} \delta_{ij} \hat{n}_k \hat{n}_m \ddot{J}^{km} \\ &\quad + \frac{1}{4} \hat{n}^i \hat{n}^j \hat{n}_k \hat{n}_l \ddot{J}^{kl} \hat{n}_i \hat{n}_j \hat{n}_m \hat{n}_p \ddot{J}^{mp} \\ &\quad \left. - 2 \hat{n}_l \hat{n}_j \ddot{J}^{jl} \hat{n}_k \hat{n}_m \ddot{J}^{km} + \frac{1}{2} \hat{n}_k \hat{n}_l \ddot{J}^{kl} \hat{n}_m \hat{n}_p \ddot{J}^{mp} + \frac{3}{4} n_k n_l \ddot{J}^{kl} \hat{n}_m \hat{n}_p \ddot{J}^{mp} \right\rangle \\ &= \left\langle \ddot{J}^{ij} \ddot{J}_{ij} - 2 \ddot{J}^{ij} \hat{n}^l \hat{n}_i \ddot{J}_{jl} + \frac{1}{2} \hat{n}_k \hat{n}_l \ddot{J}^{kl} \hat{n}_m \hat{n}_p \ddot{J}^{mp} \right\rangle. \quad (61) \end{aligned}$$

แทนค่า $\langle \ddot{J}_{TT}^{ij} \ddot{J}_{ij}^{TT} \rangle$ ลงในสมการ (58) เราจะได้ว่า

$$\frac{dE}{dt} = \frac{G}{8\pi} \int \left\langle \ddot{J}^{ij} \ddot{J}_{ij} - 2 \ddot{J}^{ij} \hat{n}^l \hat{n}_i \ddot{J}_{jl} + \frac{1}{2} \hat{n}_k \hat{n}_l \ddot{J}^{kl} \hat{n}_m \hat{n}_p \ddot{J}^{mp} \right\rangle \sin^2 \theta \, d\theta \, d\phi \quad (62)$$

เนื่องจาก \hat{n} คือ unit vector ในทิศทาง \hat{r} จะได้ว่า

$$\hat{n}_r^i = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) = \delta^{i1} \sin \theta \cos \phi + \delta^{i2} \sin \theta \sin \phi + \delta^{i3} \cos \theta \quad (63)$$

โดยใช้คุณสมบัติทางคณิตศาสตร์

$$\begin{aligned} \int \hat{n}^i \hat{n}^j \, d\Omega &= \frac{4\pi}{3} \delta^{ij}, \\ \int \hat{n}^i \hat{n}^j \hat{n}^k \hat{n}^l \, d\Omega &= \frac{4\pi}{15} (\delta^{ij} \delta^{kl} + \delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}), \end{aligned} \quad (64)$$

จะได้ อัตราการไหลของพลังงานดังนี้

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{5} \langle \ddot{J}^{ij} \ddot{J}_{ij} \rangle. \quad (65)$$

จริงๆแล้ว สมการนี้สามารถใช้ได้กับทุกๆแหล่งกำเนิด สำหรับคลื่นความโน้มถ่วงที่อยู่ไกลจากแหล่งกำเนิด เนื่องจาก quadrupole moment tensor ได้เก็บข้อมูลของแหล่งกำเนิด

ไว้หมดแล้ว สำหรับการบรรยายนี้ เราจะศึกษารูปแบบอย่างง่ายจากที่เราพิจารณามาก่อนหน้านี้ คือ ดาวคู่อย่างง่าย ซึ่งจะเห็นได้จากสมการ (34) และนำมาเขียนใหม่ได้เป็น

$$I^{ij} = Ma^2 \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\Omega t' & \sin 2\Omega t' & 0 \\ \sin 2\Omega t' & 1 - \cos 2\Omega t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (66)$$

ซึ่งเมื่อหา trace ของมันแล้วจะได้ว่า

$$I^i_i = 2Ma^2. \quad (67)$$

ดังนั้น reduced quadrupole moment tensor คือ

$$\begin{aligned} J^{ij} &= I^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij}I, \\ &= Ma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \cos 2\Omega t' & \sin 2\Omega t' & 0 \\ \sin 2\Omega t' & \frac{1}{3} - \cos 2\Omega t' & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (68)$$

$$\ddot{J}^{ij} = -Ma^2(2\Omega)^3 \begin{pmatrix} -\sin 2\Omega t' & \cos 2\Omega t' & 0 \\ \cos 2\Omega t' & \sin 2\Omega t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (69)$$

และจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -\frac{G}{5} (Mc^2 a^2 (2\Omega)^3)^2 2, \\ &= -\frac{128}{5} GM^2 a^4 \Omega^6. \end{aligned} \quad (70)$$

จากคำถามหลายๆคนในคาบแรกของ school นี้ ที่ถามว่า มวลของหลุมดำมันจะสื่อถึงความถี่ของคลื่นโน้มถ่วงอย่างไร จริงๆแล้ว เราสามารถคำนวณได้โดยทฤษฎีของนิวตัน

$$F = \frac{GM^2}{(2a)^2} = M\Omega^2 a = \frac{Mv^2}{a}, \quad (71)$$

$$\Omega^2 = \frac{GM}{4a^3} \Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{GM}{4a^3}}. \quad (72)$$

จะเห็นได้ว่า เราสามารถหาความสัมพันธ์ของความเร็วในการหมุนของดาวคู่ กับ มวลของดาวคู่ได้แล้ว จากนั้น แทนค่า Ω ลงในสมการ (70) เราจะได้ อัตราการสูญเสียพลังงานของดาวคู่คือ

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{128}{5} GM^2 a^4 \Omega^6 = -\frac{2}{5} \frac{G^4 M^5}{a^2} \quad (73)$$

นอกจากนั้นเรายังรู้ว่า พลังงานรวมของดาวคู่จะเขียนให้อยู่ในพจน์ของมวลของมันได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}M_1v_1^2 + \frac{1}{2}M_2v_2^2 - \frac{GM^2}{2a}, \\ &= -Mv^2, \end{aligned} \quad (74)$$

$$\text{or} \quad = -\frac{GM^2}{4a}. \quad (75)$$

ทั้งนี้ ถ้าเราต้องการเทียบผลการคำนวณนี้ กับผลกับจากการสังเกตการณ์ เราอาจจะต้อง เปลี่ยน ความเร็วให้อยู่ในพจน์ของ คาบ τ ของการหมุน ซึ่งจะได้ว่า $v = 2\pi a/\tau$ ดังนั้น เราสามารถเขียนพลังงานของดาวคู่ให้ขึ้นกับ คาบของการหมุนได้ดังนี้

$$E = -\left(\frac{M^5G^5\pi^2}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\tau^{-\frac{2}{3}}. \quad (76)$$

ดังนั้น โดยการใช้ความสัมพันธ์จากสมการนี้ ร่วมกับอัตราการสูญเสียพลังงานจากสมการ (73) เราจะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงคาบของดาวคู่ดังนี้

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{E}{\tau}\frac{d\tau}{dt} \Rightarrow \frac{d\tau}{dt} = -\frac{96}{5}(4)^{1/3}\pi(2\pi GM)^{5/3}\tau^{-5/3}. \quad (77)$$

เราสามารถนำสมการนี้ ไปเทียบกับผลจากการสังเกตการณ์ได้ค่อนข้างดี เนื่องจากว่า มัน ขึ้นกับคุณลักษณะของตัวดาวคู่เอง เช่น มวล M และ คาบ τ ซึ่งคาบนี้เองที่เราสามารถวัด ได้โดยตรงการสังเกตการณ์ของดาวคู่ที่เป็นดาวนิวตรอน ซึ่งหมุนรอบตัวเองอย่างรวดเร็ว และจะแผ่รังสีออกมาเป็นจังหวะแน่นอน (Pulsar)

จากการสังเกตการณ์ดาวนิวตรอนคู่ PSR B1913+16 ในปี 1974 และเก็บข้อมูลราวๆ 10 ปี Hulse and Taylor พบว่า อัตราการลดลงของคาบการโคจร สอดคล้องกับผลที่ได้ กับสมการข้างบนอย่างน่าเหลือเชื่อ ซึ่งนี่เป็นหลักฐานแรก ที่บ่งบอกถึงการมีอยู่ของคลื่น ความโน้มถ่วงที่ทำนายจากทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไป จากผลการสังเกตการณ์ดังกล่าว ทั้งสองก็ได้รับรางวัลโนเบล ในปี ค.ศ 1993

จะเห็นได้ว่าการสังเกตการณ์ดังกล่าวเป็นการสังเกตการณ์ ที่บ่งบอกถึงการมีอยู่ของ คลื่นความโน้มถ่วงโดยอ้อม (ไม่ได้ตรวจวัดเจอคลื่นความโน้มถ่วงโดยตรง) ทั้งนี้ การวัด คลื่นความโน้มถ่วงโดยตรงนั้น สามารถตรวจวัดได้ยากมาก เนื่องจากว่า แอมพลิจูด ของ การสั้นของ physical length l นั้นมีค่าน้อยมาก กล่าวคือ

$$\frac{\delta l}{l} \sim -\frac{1}{2}h_{ij}\hat{n}^i\hat{n}^j \sim 10^{-21}, \quad (78)$$

โดยที่ n ระบุทิศทางของสองตำแหน่งที่เราสนใจหาระยะทางระหว่างมัน ถ้าเราสร้างเครื่องมือตรวจวัดด้วยระยะทางโดยประมาณ $l \sim 1$ km การเปลี่ยนแปลงของระยะนี้ δl เนื่องจากสนามความโน้มถ่วงจะมีค่าโดยประมาณ $\delta l \sim 10^{-18}$ m ซึ่งเล็กกว่าขนาดของอะตอมโดยประมาณ $a_0 \sim 5 \times 10^{-11}$ m ซึ่งนั่นหมายความว่า ขนาดของการเปลี่ยนแปลงนั้นเล็กกว่าขนาดอะตอมอยู่ 10^{-7} (น้อยมาก ๆ ๆ)

หนทางหนึ่งที่จะทำให้เราสามารถวัดค่าการแปรเปลี่ยนขนาดเล็กลงนี้ได้คือใช้หลักการของ laser Michelson interferometer ซึ่งโดยหลักการแล้ว เครื่องมือนี้จะมีส่วนหนึ่งที่แยกลำของเลเซอร์ ออกไปสองทิศทางแล้วใช้กระจกสะท้อนให้กลับมาแทรกสอดกัน โดยหลักการแล้วเราสามารถตั้งค่าให้มันสะท้อนหลายๆรอบก่อนแล้วกลับมาแทรกสอดกันได้นั้นหมายความว่า เราสามารถสร้างความยาว l เพิ่มขึ้นได้จากจำนวนรอบ นอกจากนั้นแล้ว เราสามารถจัดตั้งเครื่องมือ ให้มันเกิดการแทรกสอดแบบเสริมกันไว้ได้ ถ้าความยาวดังกล่าวเปลี่ยนไป จะทำให้รั้วของการแทรกสอดเปลี่ยนไปด้วย ดังนั้น เราสามารถตรวจวัดการเปลี่ยนแปลงเฟสของการแทรกสอดนี้ได้ โดยประมาณคือ

$$\delta\phi \sim 2n \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) \delta l \sim 10^{-9}, \quad (79)$$

โดยที่ n คือจำนวนรอบที่เลเซอร์สะท้อนก่อนจะมาแทรกสอดกัน และ $\lambda \sim 10^{-6}$ m คือความยาวคลื่นของเลเซอร์ โดยหลักการนี้ทำให้เรามีโอกาสจะตรวจวัดคลื่นความโน้มถ่วงได้โดยตรง อย่างไรก็ตาม ความยากลำบากจากการทดลองดังกล่าวเกิดขึ้นเนื่องจากการที่ต้องการเครื่องมือที่มีความแม่นยำมากพอ ซึ่งต้องจัดตั้งเครื่องมือเพื่อลดผลจากการแปรผันจากเหตุการณ์อื่นด้วย หลากหลายการทดลองถูกจัดตั้งขึ้นเพื่อตรวจวัดคลื่นความโน้มถ่วง เช่น LIGO ที่อเมริกา, Virgo ที่อิตาลี, KAGRA ที่ญี่ปุ่น จนในที่สุด ในปี 2015 LIGO ได้จัดตั้งเครื่องมือที่มีความสมบูรณ์เพียงพอที่จะวัดคลื่นความโน้มถ่วง และในปี 2016 ได้ประกาศการค้นพบคลื่นความโน้มถ่วงจากการ ยุบรวมตัวกันของหลุมดำสองหลุม และในที่สุด นักวิทยาศาสตร์ 3 ท่านที่มีส่วนสำคัญในการตรวจพบนี้ก็ได้รับรางวัลโนเบลในปี 2017 นอกจากนี้แล้ว ณ ปัจจุบัน เรายังตรวจพบคลื่นความโน้มถ่วงอีกมากมาย ซึ่งหนึ่งในผลนั้นจะถูกนำไปใช้ ในการกำจัดแบบจำลองที่ปรับเปลี่ยนความโน้มถ่วง ซึ่งพินิจจะพูดในรายละเอียดใน section ถัดไป