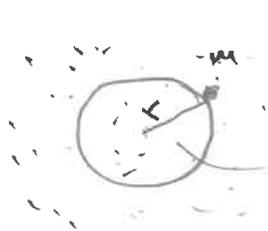


Faka kozmo logika počiva na epioj teoriji relativnosti i kvantnoj fizici, moćna je izvesti najbitniju kosmološku jednačinu - Friedmann jednačinu koja opisuje širenje svemira i polazi od Newtonove teorije gravitacije. Naravno izvod iz Newtonove teorije gravitacije nije strogo rigorozan, i promišljanje neki detalji koji na ovaj uvid iz osnovnih dovoljno da razumijemo koncept širenje svemira

$$F = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$



$$V = - G \frac{M \cdot m}{r} \quad \text{- potencijalna energija}$$



$\rho$  - gustoća

$$M = \frac{4}{3} r^3 \pi \cdot \rho \quad V = - \frac{4\pi}{3} G \rho r^2 \cdot m$$

$$V = - \frac{4\pi}{3} G \rho r^2 m \quad E_k = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v(t) = ?$$

Zakon očuvanja energije:

$$U = E_k + V$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{4\pi}{3} G \rho r^2 m = U \quad U - konstanta$$

$$\Rightarrow r(t) = ?$$

Uradimo comoving koordinate

$$\vec{r} = a(t) \vec{x}$$

$a(t)$  - scale factor, suis samo o vremenu  
a ne o položaju jer je svemir  
izotropan i homogen

U comoving koordinatama fiksna  
koordinata govori o fiksnoj fizičkoj  
tlačini udaljenosti između čestica  
mijena.  $\dot{x} = 0$

$$E_k = \frac{1}{2} m (\dot{a}^2 x^2 + a^2 \dot{x}^2) = \frac{1}{2} m \dot{a}^2 x^2$$

$$V = - \frac{4\pi}{3} G \rho a^2 x^2 m$$

$$\frac{1}{2} m \dot{a}^2 x^2 - \frac{4\pi}{3} G \rho m a^2 x^2 = U \quad \left| \frac{2}{m a^2 x^2} \right.$$

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{4\pi}{3} G \rho = \frac{2U}{m a^2 x^2} = \frac{2U}{m a^2 x^2}$$

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho = \frac{2U}{m a^2 x^2}$$

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k c^2}{a^2} \quad k c^2 = \frac{2U}{m x^2}$$

### Friedmann-ova jednačina

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} \quad (kc^2 = \frac{24}{m \cdot a^2})$$

$k$  - ne zavisi ovisiti o  $x$ , jer ni ostali članovi u jednačini ne ovise o  $x$ , jer bi homogenost bila narušena.

Iz kosmološkog principa koji zahtijeva da je svemir homogen i izotrop sledi da  $U$  mora biti proporcionalna  $x^2$ , naravno  $U$  je različita ali konstantna za danu promatranu česticu (galaksiju).

$$k = - \frac{24}{m c^2 a^2} \text{ ne ovisi o vremenu jer}$$

je  $U$  - ukupna energija koja je očuvana i comoving koordinate su fiksne sledi da je  $k$  - konstanta ne ovisi ni o prostoru ni o vremenu

$$[k] = \frac{1}{L^2} \left(\frac{1}{m c^2}\right) - \text{to je konstanta}$$

koja ima svoju karakterističnu vrijednost za neki svemir koji se živi i koji se ne mijenja tijekom evolucije svemira

Može se pokazati da usljednost  
k definira geometriju svemira tj.

zakrivljenost svemira

$k = 0$  - ravan svemir

$k > 0$  - pozitivna zakrivljenost

$k < 0$  - negativna zakrivljenost

Širenje svemira na skalu od  $30 \cdot 10^4$  l.y.  
na kojima se svemir može smatrati homogenim  
i izotropnim dođe općenito Friedmannov  
jednadžba. Naš lokalni svemir nije homogen  
i izotropan.

$v = Hd$        $v > c$  za daleke galaksije

Namom se čini da se daleke galaksije  
udaljavaju od nas brzinom  $> c$  ali  
to je zato jer se sam prostor širi i  
nema narušavanja zakona kauzalnosti  
jer se ne može poslati signal između  
dalekih udaljenih galaksija

Specijalna teorija relativnosti nije  
narušena, jer ako se referiramo na  
relativnu brzinu objekata koji prolaze  
jedan pored drugog i ne može se  
primjeniti na usporedbu relativnih brzina  
dalekih objekata,

# Jednažba fluida

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} \Rightarrow a(t) = ? \Rightarrow \rho(t) = ?$$

Treba poznati hustotu materije u svemiru  $\rho(t) = ?$ . Kdo treba urči u radu i Hubble  $\odot$  materiji u svemiru rovnos je jednažba fluida

Kad govorimo o hustoti  $\rho(t)$  - materiji u svemiru misli na hustotu mase / energie i zračnja a oni imaju različite tlak i tako dovode do različite evolucij hustote materije  $\rho(t)$ .

$\rho(t)$  nije isti i da hustota svemiru dominiraju fotoni / zračnj, ali deso deuterij i trar / čestice

Poni radou termodinamiku

$$\Delta Q = \Delta E + p \Delta V$$

$$T dS = dE + p dV$$

isot

primjerimo na volumenu  $V$  koji se širi  
i ima konstantni radijus iznos 1

- 6 -

Volumen ima radijus  $a$  ( $x=1$ )  $r=a \cdot 1 = a$

$$E = mc^2 \rightarrow E = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho c^2$$

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi a^2 \rho c^2 \frac{da}{dt} + \frac{4\pi}{3} a^3 c^2 \frac{d\rho}{dt}$$

$$V = \frac{4\pi}{3} a^3 \rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi a^2 \frac{da}{dt}$$

Przetpostavimo, da reverzibilno ekspanzijo

$$\Rightarrow dS = 0$$

$$dE + p dV = 0$$

$$\cancel{4\pi a^2} \rho c^2 \dot{a} + \frac{4\pi}{3} a^3 c^2 \dot{\rho} + \cancel{4\pi a^2} \dot{a} p = 0$$

$$\rho c^2 \dot{a} + \frac{c^2 a}{3} \dot{\rho} + \dot{a} p = 0$$

$$\frac{c^2 a}{3} \dot{\rho} + \dot{a} (\rho c^2 + p) = 0 \quad / \quad \frac{3}{c^2 a}$$

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0$$

Jednadžba fluida

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2}$$

Friedmannova jednadžba

Friedmannova jednačina

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k c^2}{a^2}$$

Jednačina fluida

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) = 0$$

↓  
 gustota se  
 mijenja jer se

svemir širi, volumen raste

$$\dot{\rho} \sim - \rho \frac{\dot{a}}{a} \rho \quad (\text{gustota se smanjuje})$$

→ gustota energije je fluida i to je isto kao što je volumen svemira širi.

$$\dot{\rho} \sim - \rho \frac{\dot{a}}{a} \frac{P}{c^2}$$

$$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{s}} \sim \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{s}}$$

$$\frac{1}{\text{s}} \frac{1}{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \cdot \frac{1}{\frac{\text{s}^2}{\text{m}^2}} = \left(\frac{\text{s}}{\text{m}^2}\right) \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\left(\frac{\text{s}}{\text{m}^2}\right) \cdot \frac{1}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{s}}$$

$$\frac{\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\text{m}^3 \text{s}}$$

$$\frac{\text{s}}{\text{s}^2} \frac{\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{\text{s}} = \frac{\text{kg} \text{m}^2}{\text{s}^3}$$

Energija koja je izgubio fluid za otvara u gravitacijsku potencijalnu energiju

Istokujemo: Neuna e la zbog tlaka u homogenom svemiru jer su gustoća i tlak svugdje isti. Potrebno je prelijent tlaka sa sile. Tako da tlak ne doprinosi sili koja uzrokuje ekspanziju, već samo atječe kroz rad kojeg napravi kako se svemir širi.

$$P = f(\rho)$$

Iz jednačine fluida:  $\dot{\rho} + \rho \frac{\dot{a}}{a} (\rho + \frac{P}{c^2}) = 0$

znamo kako se gustoća mijenja u vremenu ako znamo tlak.

Prezuma je pretpostavka da postoji reljstven tlak u svaku danu gustoću

$P \equiv P(\rho)$  — JEDNAČINA STANJA

Najjednostavniji slučaj je da je  $P = 0$  i to je slučaj kod imamo u svemiru nerelativističke čestice / tvar.

# AKCELERACIJSKA JEDNAČINA

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2}; \quad \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0$$

↓  
deriviramo po vremenu

$$\cancel{\frac{\dot{a}}{a}} \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{\cancel{8\pi G}}{3} \dot{\rho} + \cancel{3} \frac{kc^2}{a^3} \dot{a}$$

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)$$

$$\cancel{\frac{\dot{a}}{a}} \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} = \frac{4\pi G}{3} \left(-3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\right) + kc^2 \frac{\dot{a}}{a^3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -4\pi G \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) + \frac{kc^2}{a^2}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) + \cancel{\frac{kc^2}{a^2}} + \frac{8\pi G}{3} \rho - \cancel{\frac{kc^2}{a^2}}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) + 4\pi G \cdot \frac{2}{3} \rho$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G \left(\rho + \frac{p}{c^2} - \frac{2}{3} \rho\right)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G \left(\frac{1}{3} \rho + \frac{p}{c^2}\right)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)$$

$$\left( \frac{\ddot{a}}{a} \right) = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k c^2}{a^2} \quad ;$$

F. 7.

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0$$

7. F.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = - \frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right)$$

Akceleracijska jednačina

- Uočimo: Ako materija u svemiru ima neki tlak, to povećava gravitacijsku silu i doprinosi usporavanju svemirne ekspanzije.
- Pod pretpostavkom da nema sila zbog tlaka u izotropnom svemiru, jer nema gradijenta tlaka.
- U akceleracijskoj jednačini nema konstante  $k$  čija vrijednost definiše geometriju svemira, nestane/pokriće se u ovom izvedu.

Friedmannova jednačina za  $c=1$  (prirodne jedinice)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}$$

$$\downarrow$$
$$\left[\frac{1}{s^2}\right] \Rightarrow [k] = \frac{1}{s^2}$$

## GEOMETRIJA SVEMIRA

$k$  - definiše zakrivljenost / geometriju svemira

Fokus je na interpretaciji  $k$  kao parametra koji definiše zakrivljenost trodimenzionalnog prostora. Opa teorija relativnosti sferičniji definiše zakrivljenost prostor-vremena u skladu sa energijom i materijom

Najjednostavniji svemiri:

homogen i izotropni  $\rightarrow$  to smo već uzeli u računu + RAVAN

Međutim svemir može biti homogen i izotropni a imati različite geometrije. Izotropni svemir nužno ne može doći do ravnine a njemu uvijek Euklidova geometrija

Izotropen + homogen  $\begin{cases} \rightarrow k > 0 \ (\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ) \\ \rightarrow k = 0 \ (\text{RAVAN}) \\ \rightarrow k < 0 \ (\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ) \end{cases}$

Ravna geometrija svemira



$\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$

$\textcircled{R} \Rightarrow 0 = 2\pi R$

19. slededi, Riemann, Lobachevsky Gauss

$k > 0; \ \alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$

ZATVOREN - KONAŽNE  
VELIČINE  
Opseg  $< 2\pi R$   
BESKONAČAN

$k = 1 \ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \ \text{Opseg} = 2\pi R$

$k < 0 \ \alpha + \beta + \gamma < 180^\circ \ \text{Opseg} > 2\pi R$

OTVOREN  
BESKONAČAN

ŠTO ZNAČI SVEMIR BESKONAČAN

za  $k = 0$  i  $k > 0$

to znači da je svemir veći beskonačan  
u konačno vrijeme

Širi se u svim smjerovima

Nema načina da ovo istovremeno ujedine

Opazivi svemir:  $\rightarrow$  koji je konačan jer je  
brzina svjetlosti konačna. S vremenom opazivi  
svemir postaje veći. Prvo, svemir se širi  
a drugo svjetlost dvije vremena putuje

$$F. 7. \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}$$

$$a' = \frac{a}{\sqrt{|k|}}$$



$$\left(\frac{\dot{a}'}{a'}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

$$\left(\frac{\dot{a}'}{a'}\right)^2$$

negativna  
zobrazljivost

pozitivna  
zobrazljivost

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \Rightarrow a(t)$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + \frac{P}{c^2}) = 0 \Rightarrow \rho(t)$$

Hubbleov zákon

$v = H \cdot d$  - opoznanja  $\vec{v} = a \dot{\vec{x}}$

$$\vec{v} = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|} \vec{r} = \frac{|\dot{a} \vec{x}|}{a \vec{x}} \vec{r} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r}$$

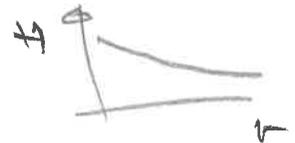
$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

Hubbleova konstanta kaže  
reči Hubbleov parameter

$H_0$  - "now" / sada  $H_0 > 0$  mjerenja  $\Rightarrow$   
srećit se s'vi

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}$$

zo očekivat do te usporava



Kako je evoluirao svemir ovise o  
tome što je u svemiru.

Moramo znati relaciju između gustoće  
materije  $\rho$  i tlaka  $p$ . Ova relacija se  
zove jednačina stanja.

Razmatramo dvije mogućnosti:

- Trava  $\rightarrow$  ne relativistička trava, čestice  
koje se gibaju  $v \ll c$  i čiji je tlak  
zanemarljiv  $p \approx 0$

$p \approx 0 \rightarrow$  jednostavna pretpostavka i dobra  
aproximacija kod je svemir ispunjen  
atomima koji su se obložili, pri čemu  
su udjeljeni i ništa se ne dešava, ali  
za slučaj kod razmatranja galaksija  
jer su daleko, a jedino između njih  
djeluje gravitacija.

1) Zračenje - fotoni, posređ. tlak  $p = \frac{\rho c^2}{3}$

Trar  $k=0$   $\dot{s} + s \frac{\dot{a}}{a} (s + \frac{p}{c^2})$

$P=0 \Rightarrow \dot{s} + 3 \frac{\dot{a}}{a} s = 0 \Rightarrow$

$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} (s a^3) = 0 \Rightarrow \frac{1}{a^3} (\cancel{\frac{1}{a^3} \dot{s} a^3} + \frac{1}{a^3} s \cdot 3\dot{a})$

$\Downarrow$

$(\dot{s} + 3 \frac{\dot{a}}{a} s) = 0$

$\frac{d}{dt} (s a^3) = 0$

$s \sim \frac{1}{a^3}$  OČEKIVANO

$(\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{8\pi G}{3} s \quad (k=0)$

$\Downarrow$

$s = \frac{s_0}{a^3}$

Znamo koliko gustota materije u svemiru  
 ovise o  $a$  ( $s = \frac{s_0}{a^3}$ ); možemo

saobiti riješiti Fridmannovu jednačinu  
 za ravan svemir  $k=0$

$(\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{s_0}{a^3} \Rightarrow \dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{s_0}{a}$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \rho}{3} \frac{1}{a} \quad a \propto t^q \quad \dot{a} \propto t^{q-1}$$

$$\int^2 t^{2q-2} = \frac{8\pi G \rho}{3} t^{-q}$$

$$2q - 2 = -q \quad 3q = 2 \quad q = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{a \propto t^{2/3}}$$

$\times^2$   
 $\propto t^{2/3}$

$a=1 \rightarrow$  now / Soda  $t=t_0$

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \quad a^3 = \left(\frac{t}{t_0}\right)^2$$

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^3} = \frac{\rho_0}{\left(\frac{t}{t_0}\right)^2} = \rho_0 \frac{t_0^2}{t^2}$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/3}}{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}} = \frac{2}{3} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/3 - 2/3}$$

$$a = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$$

$$\dot{a} = \frac{2}{3} \frac{1}{t_0} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/3} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3} \frac{1}{t_0} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/3} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2/3}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{1}{t_0} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1} = \frac{2}{3} \frac{1}{t_0} \frac{t_0}{t}$$

$$\boxed{H = \frac{2}{3t}}$$

$\rightarrow$  širi se stalno

Zrotańc

$$P = \frac{\rho c^2}{3}$$

$$\ddot{\delta} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left( \delta + \frac{P}{c^2} \right)$$

$\Downarrow$

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (k=0)$$

$$\ddot{\delta} + \frac{3\dot{a}}{a} \left( \delta + \frac{\rho c^2}{2} \cdot \frac{1}{c^2} \right) = 0$$

$$\ddot{\delta} + \frac{3\dot{a}}{a} \left( \delta + \frac{\rho}{2} \right) = \ddot{\delta} + \frac{\rho}{a} \quad \frac{4}{3}$$

$$\ddot{\delta} + 4 \frac{\dot{a}}{a} \delta = 0$$

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dt} (\delta a^4) = 0$$

$$\frac{1}{a^4} (\dot{\delta} a^4 + 4 a^3 \dot{a} \delta) = 0$$

$$\dot{\delta} + 4 \frac{\dot{a}}{a} \delta = 0$$

$$\frac{1}{a^4} \frac{d}{dt} (\delta a^4) = 0$$

$\Downarrow$

$\delta a^4 = \text{const}$

$\Downarrow$

$$\boxed{\delta \sim \frac{1}{a^4}}$$

$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^4} \rightarrow$  u Friedmann'sche Gleichung  
 $\rho_0 \neq 0 \Rightarrow$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0}{a^4}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G \rho_0}{3} \frac{1}{a^2}$$

$a \sim t^c$   $\dot{a} = c t^{c-1}$

$$c^2 t^{2c-2} = \frac{8\pi G \rho_0}{3} t^{-2c}$$

$$2c - 2 = -2c$$

$$-2 = -4c$$

$$c = \frac{1}{2}$$

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}$$

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^4} = \rho_0 \frac{t_0^2}{t^2}$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{t_0} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/2}$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{t_0} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1/2} = \frac{1}{t_0} \cdot \frac{1}{2} \frac{t_0}{t}$$

$$H = \frac{1}{2t}$$

Trava:	$H = \frac{2}{3t}$
Radiation:	$H = \frac{1}{2t}$

$$S(t) = \frac{P_0}{c^3} \approx \frac{P_0 t_0^2}{t^3}$$

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$$

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}$$

$$S(t) = P_0 \frac{t_0^2}{t^2}$$

Sve mi se spominje širi des značenji  
 dominira nad travu jer se javlja još  
 jedan zločin osim moke koji također  
 usporava širenje - tlo

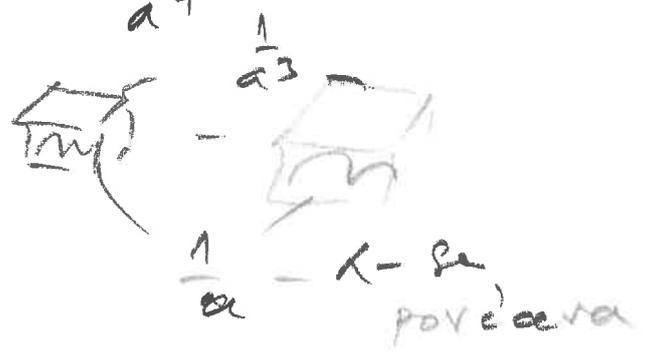
$$\frac{a'}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right)$$

tlo ne doprinosi širenju

Gustota i za travu i za značenji  
 opala s  $t^{-2}$   $P_0 \frac{1}{t^2}$

$$a_{rad}(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}$$

$$S(t) = \frac{P_0}{a^4}$$



KOMBINACIJA: TRAVI & ZRAČENJA

$$S_{metlo} \sim \frac{1}{a^3} \quad S_{rad} \sim \frac{1}{a^4}$$

$$S = S_{met} + S_{rad}$$

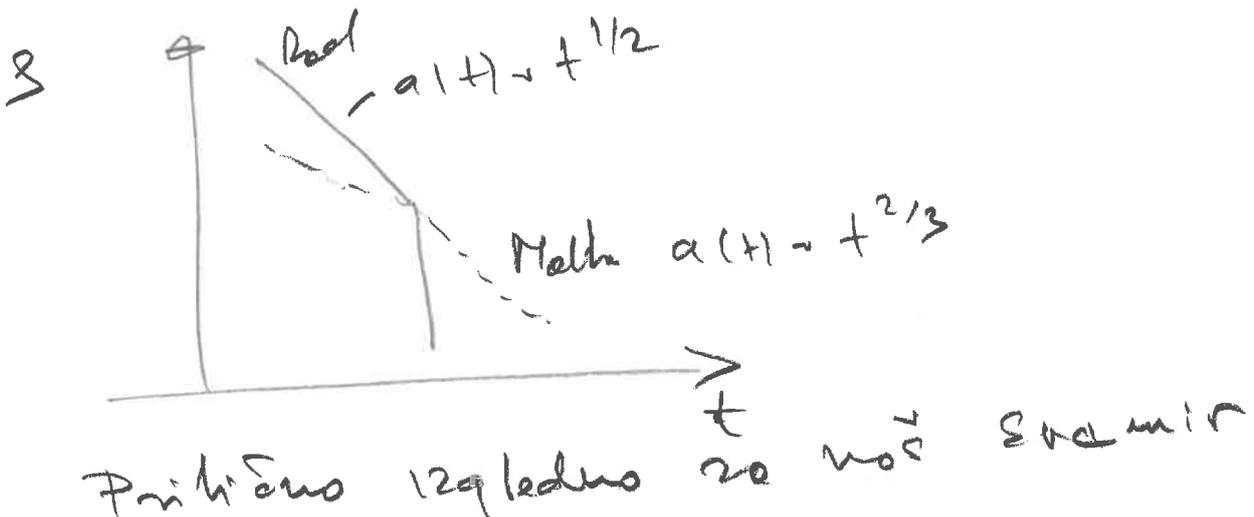
$a(t)$  - de lasti homogenizacije  $\rightarrow$

$S(a) \rightarrow S(t) ?$  teže

Zračenje dominira

$$a(t) \sim t^{1/2} \quad S_{rad} \sim \frac{1}{t^2} \quad S_{met} \sim \frac{1}{a^3} \sim \frac{1}{t^{3/2}}$$

Quanto da travi "sponji" opada od zračenja  
Tako da zračenje ne može dominirati  
za uvek, no koliko njih dalo udio travi  
u sredini na nekom velikom vremenu  
travi iz dominirati evolucijom vremena



# Gustoća Broja Čestica

$$n = \frac{\text{broj čestica}}{\text{volumen}} \quad - \quad q \text{ ukupna moć i energija}$$

$E = n E$  - srednja energija po čestici  
 ↓  
 gustoća energije

$n$  - zgodno konstanti jer se u kotlu broj čestica ne mijenja, broj čestica je očuvan.

Sve dok ~~je~~ vrijedi termodinamička ravnoteža broj čestica je očuvan  
 $n = \text{konst.}$

$$n \sim \frac{1}{a^3} \quad - \quad \text{zbog širenja}$$

Energije ne relativističke čestice minimumo je u ovom slučaju

$$S_{\text{traj}} \sim \frac{E}{T_{\text{traj}}} \cdot n \times E \sim \text{const.} \cdot \frac{1}{a^3}$$

$$S_{\text{rad}} \sim E_{\text{rad}} \sim n_{\text{rad}} \times E_{\text{rad}} \sim \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{a} \sim \frac{1}{a^4}$$

Ovo smo sve razmatrali za  $k=0$

Pitajući  $\frac{\dot{a}}{a} = H = 0$  do koje razine

širenje svemira  $\Downarrow$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = 0$$

$$\frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} = 0$$

$$\rho \sim \frac{1}{a^3}$$

Ala je  $k < 0$   $H \neq 0$

$$\rho \sim \frac{1}{a^4}$$

Budući da svemir lošim dominira materijom

a postoji još jedna ~~teži~~  $\frac{k}{a^2} \rightarrow 0$

$$\frac{1}{a^2} \gg \rho \sim \frac{1}{a^3} \Downarrow$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2}$$

$$\dot{a}^2 = -k \Rightarrow a \sim t$$

svemir se širi sve brže

Ala je  $k > 0$

$$H = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} = 0$$

može biti jednako 0  
širenje se zaustavlja

$\frac{k}{a^2}$  s vremenom se približava Sudaru

$H_0 = \frac{d\dot{a}}{a}$  - trenutna vrijednost Hubbleova parametra, kojeg je najlakše izmjeriti jer se sve galaksije udaljavaju brzinom  $v$  izraz

$$v = H_0 r$$

Tada izmjeriti:  $v$  - brzinu udaljavanja galaksija

$$H_0 = \frac{v}{r}$$

$r$  - udaljenost galaksije

Mjerenje  $v$ :

- poznati ka crvenom, nije tako jednostavno zbog "peculiar" brzina koje su nasumično orijentirane.

Treba razumjeti princip "peculiar" brzine ne onise o tome gdje se galaksija nalazi, već je Hubbleova brzina proporcionalna udaljenosti

$v_p = h_0 r + f(r)$       $v_H \propto r$ . Na velikim udaljenostima  $v_H$  dominira

Mjerenje udaljenosti: znatno teže i zahtjevnije

koristi se metoda "standardne svijeće"

- eksperimentalno super nova SN Ia

$$H_0 = 68.9 \frac{\text{km}}{\text{s}} \frac{1}{\text{Mpc}} \quad \text{dij ima} \quad H_0 = 74$$

Hubbleov parameter se izražava  
često ovako

$$H_0 = 100 h \frac{\text{km}}{\text{s}} \frac{1}{\text{Mpc}}$$

$$h = 0,68 - 0,74 \text{ danas}$$

$$h = 0,68 \rightarrow d = 100 \text{ Mpc} \quad v = H \cdot d$$

$$v = 100 \cdot 0,68 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 100 \text{ Mpc}$$

$$v = 0,68 \cdot 10^4 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 6800 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$1 \text{ Mpc} = 3,3 \cdot 10^6 \text{ l.y.}$$

$$100 \text{ Mpc} = 330 \cdot 10^6 \text{ l.y.}$$

Parameter gustoće  $\rho$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}$$

Za danu vrijednost  $H$  postoji točna  
određena gustoća koja će dati  
ravan svemir  $k=0$

$$k=0 \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho \Rightarrow \rho = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Kritična gustoća  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} = f(t)$   
jer je  $H = f(t)$

Znamo trenutnu vrijednost  $H_0$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} = \frac{\left(\frac{1}{\text{s}^2}\right)}{\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_c(t_0) = 1,88 h^2 \cdot 10^{-26} \text{ kg/m}^3$$

$\rho_c(t_0)$  - 6,7 atoma vodika po kubnom metru

$$\rho_c = 2,78 h^{-1} \cdot 10^{11} \frac{M_\odot}{(h^{-1} \text{Mpc})^3}$$

$\Downarrow$   
 $10^{11}$  do  $10^{12} M_\odot$  u galaksiji

$$\rho_c \sim 10^{-26} \text{ kg/m}^3$$

$$m_p = 10^{-27} \text{ kg} \quad m_p = 1,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$\Downarrow$   
to je protono u  $\text{m}^3$

Definirajmo parameter gustote

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}$$

$\Omega_0$  - trenutna gustota  $t = t_0$  - sada

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_c \cdot \Omega - \frac{k}{a^2} \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{3H^2}{8\pi G} \cdot \Omega - \frac{k}{a^2}$$

$$H^2 = H^2 \Omega - \frac{k}{a^2}$$

$$(H^2 - H^2 \Omega) = - \frac{k}{a^2}$$

$$H^2 (\Omega - 1) = \frac{k}{a^2}$$

$$\boxed{\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}}$$

Za slučaj  $\Omega = 1 \Rightarrow k = 0$ . Svemir  
ostaje ravan za sva vremena!

Naš svemir sadrži različitih oblika  
materije.

Možeme definovať i "parameter qustode"  
za čhu hoji opisuje zelektivnosť skúma

$$\Omega_k = - \frac{k}{a^2 H^2}$$

$$\Omega - 1 = - \Omega_k$$

$$\Omega + \Omega_k = 1$$

### PARAMETAR USPOKOVANIA $q_0$

$a(t)$  - rozvíjeme u Taylorov red okolo  
trentnej vrenne  $a(t_0)$

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0) [t-t_0] + \frac{1}{2} \ddot{a}(t_0) [t-t_0]^2 \quad (a(t_0))$$

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H [t-t_0] + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)} [t-t_0]^2$$

$$\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)} = \left( \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \right)^2 \frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)} \cdot \frac{1}{H_0^2}$$

$$\Rightarrow q = - \frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)} \cdot \frac{a(t_0)^2}{\dot{a}(t_0)^2}$$

Parameter usporovnyjci:

$$q_0 = - \frac{a(t_0)}{a^2(t_0)} \ddot{a}(t_0) \left( \frac{1/s^2}{1/s^2} \right)$$

jednoduchá. fluida

$$\dot{s} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0$$

jednoduchá stavba: redukce číselného ρ a p

Pogledujmo najjednostavší případ

$$p = 0$$

↓  
 Svemírom dominuje nerelativistická  
 materija: elementarne častice ili  
 galaksije

$$\ddot{\frac{a}{a}} = - \frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) = 0$$

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \rightarrow \frac{1/H^2 = 3}{8\pi G \rho_c}$$

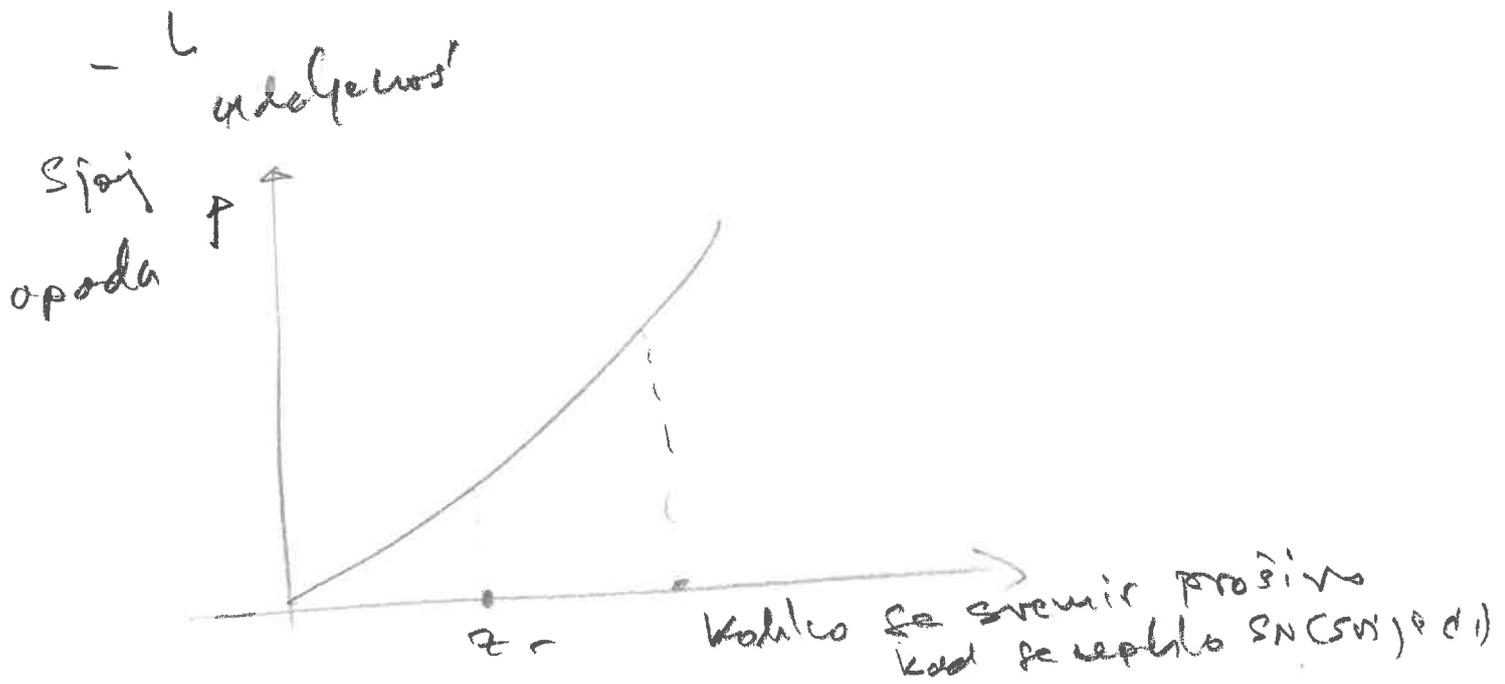
$$q_0 = - \frac{a}{a^2} \ddot{a} = - \frac{a^2}{a^2} \left( \frac{\ddot{a}}{a} \right) \rightarrow - \frac{4\pi G}{3} \rho$$

$$q_0 = \frac{4\pi G}{3} \rho \cdot \frac{3}{8\pi G \rho_c} = \frac{\rho_0}{2}$$

Parametar usporavanja se može  
prikazati:

$$f_0 = \frac{\Omega_0}{2}$$

Mjereni usporavaju svemirna gustota  
gustoća svemira.



Što je sjaaj slabiji to znači da je SN  
udaljenije od nas a što je brzinu veća  
( $v \approx H \cdot d$ ) to znači da se svemir brže  
širi. Dvije nezavisne grupe

1. Supernova Cosmology Project

\*

2. High-z Supernova Search Team

Brzina kojom se deleke galaksije udaljavaju  
od nas raste s vremenom

$$\Rightarrow f_0 < 0$$

## KOZMOLOŠKA KONSTANTA

Einsteinu je nerava a je svemir statičan  
iako su njegove vlastite jednačine opće  
teorije relativnosti to nisu dopuštale.

Matarija u svemiru zbog svoj gravitacijske  
djelovanja ne dopušta statičan svemir.

Uvodi jednu novu parametar, kozmološki  
konstantu kako bi osigura statičan  
svemir.

Friedmannu jednačina s  $10^5$  jedinicama  
datih u članu  $\Lambda$  - kozmološko konstante

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Ako se radi o udaljenoj  
akceleraciji  $\Lambda$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda}{3}$$

Na sleden način lahko isto funkcijo izrazimo z gostoto energije  $\rho$  kot dio kritične gostote  $\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}$ , tako močemo definirati parameter gostote  $\Omega$  kot molsko konstanto

$$\Omega_k = \frac{\Lambda}{3H^2}$$
$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

Tako je  $\Lambda$ -konstanta  $\Omega_k$  mije konstanta jer se ti mijenja, Friedmannova jednačina se može zapisati kao:

$$\Omega + \Omega_k - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}$$

Za ravan svemir  $k=0$

$$\Omega + \Omega_k = 1$$

Príklad 10 je opísaný a hoo fluid w<sub>21</sub>  
ina hustota  $\rho_k$  i tlak  $P_k$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad \Omega_k = \frac{\Lambda}{3H^2}$$

$$\rho_k = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad \uparrow$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) - \frac{k}{a^2}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad \rho_k = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

$$\Omega_k = \frac{\rho_k}{\rho_c} = \frac{\frac{\Lambda}{8\pi G}}{\frac{3H^2}{8\pi G}} = \frac{\Lambda}{3H^2}$$

$\Lambda$  - nije konstanta  $\rightarrow$  quinte sence

quintessence fluid ima jednaku

Stanja:  $p_Q = w \rho_Q c^2$

$w$  - konstanta

$w = -1 \rightarrow$  odvojena kosmološki konstanta  $\Lambda$

$w < -\frac{1}{3}$  - ubrzano širenje je moguće  
Sve dok je  $w < -\frac{1}{3}$

Akceleracijska jednačina:

$$\ddot{a} = - \frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3P}{c^2} \right)$$

$\Lambda$  - razmatramo kao fluid koji ima  
energiju gustine  $\rho_\Lambda$  i  $P_\Lambda$

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \Downarrow$$

$$\dot{\rho}^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho + \rho_\Lambda) - \frac{1}{a^2}$$

$P_\Lambda$  - efektivni tlak kosmološke konstante  
nalazimo tako da ga definiramo  
tako da dobijemo akceleracijsku  
jednačinu istog oblika koja  
sadrži  $\Lambda$

$$\rho \rightarrow \rho + \rho_\Lambda \quad P \rightarrow P + P_\Lambda$$

Jednačina fluida glasi:

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left( \rho + \frac{P}{c^2} \right) = 0$$

ako  $\Lambda$  razmatramo kao fluid mora  
vrijediti ova jednačina

$$\dot{\rho}_\Lambda + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left( \rho_\Lambda + \frac{P_\Lambda}{c^2} \right) = 0$$

$\rho_\Lambda$  - je konstanta po definiciji

$$\Rightarrow \dot{\rho}_\Lambda = 0 \Rightarrow \rho_\Lambda + \frac{P_\Lambda}{c^2} = 0$$

⇓

$$P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$$

Kozmološko konstanto ima negativan tlak

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \rho_\Lambda + \frac{3P}{c^2} - \frac{3P_\Lambda}{c^2} \right)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \rho_\Lambda + \frac{3P}{c^2} - \frac{3\rho_\Lambda c^2}{c^2} \right)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3P}{c^2} - 2\rho_\Lambda \right)$$

kozmoško konstanto - gostota

energije praznega prostora.

Kvantna fluktuacije v vakuumu! deli  
vplivajo kot je 20 120 pecto večja  
od temperature.

### I flukcije rešava:

- tačka je svemir ravan
- Problem horizonta
- Problem magnetskog monopola

### Iz flukcije $\ddot{a}(t) > 0$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) \text{ za } \ddot{a} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho + \frac{3p}{c^2} < 0$$

Pretpostavimo  $\rho > 0 \Rightarrow p < -\frac{\rho c^2}{3}$

Negativni tlak!

Ali imamo nek. fluid čiji je tlak  $p < 0$   
 npr. kosmološka konstanta  $p = -\rho c^2$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

ova dva člana postaju  
 zanemarljiva pri brzom  
 kopanju širenja ( $\rho \sim \frac{1}{a^3}$ ;  $\rho_{\text{konst}} \sim \frac{1}{a^0}$ )

$$H^2 = \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow \dot{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} a$$

$$a(t) = e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t}$$

$$|\Omega_{tot} - 1| = \frac{k}{a^2 H^2}$$

Problem u Bing Bangu  $\Omega_{tot}$  s  
s vremenom odstupo od 1 ako mo  
pocetku nije bio egzaktno  $\Omega_{tot} = 1$

Inflacija:  $\ddot{a} > 0$      $\frac{d}{dt}(\dot{a}) > 0$      $\frac{d}{dt}(\dot{a} \cdot H) = 0$

$\frac{d}{dt}(aH) > 0 \Rightarrow$  raste brzina u  $\frac{k}{a^2 H^2}$

s vremenom: gura  $\Omega_{tot}$  prema 1

$$= \frac{\sqrt{4\pi}}{3} t$$

$$|\Omega_{tot} - 1| \sim 2$$

Između  $10^{36}$  -  $10^{34}$  s svemir se  
proširio za faktor  $10^{43}$

$H \Rightarrow$  Milky way