

# Theoretischer Weg von Lagrangedichten zu Feynmandiagrammen und deren Berechnung

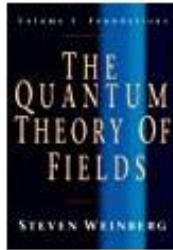
Alexander Huss  
alexander.huss@cern.ch

Forschung trifft Schule: CERN Summer School '23

# Quantenfeldtheorie in 2x 90 min

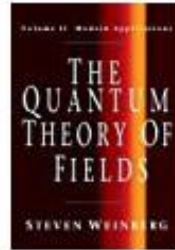
Alexander Huss

[alexander.huss@cern.ch](mailto:alexander.huss@cern.ch)



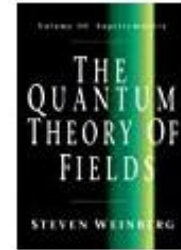
636 pg.

+



512 pg.

+



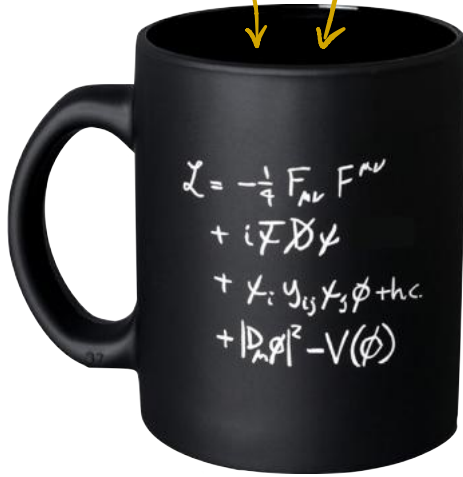
442 pg.

(SUSY)



$$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

(Michael)



THEORIE

Quantenfeldtheorie

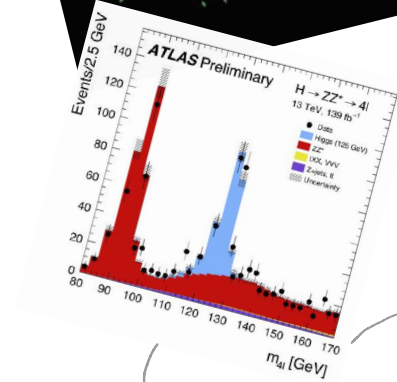
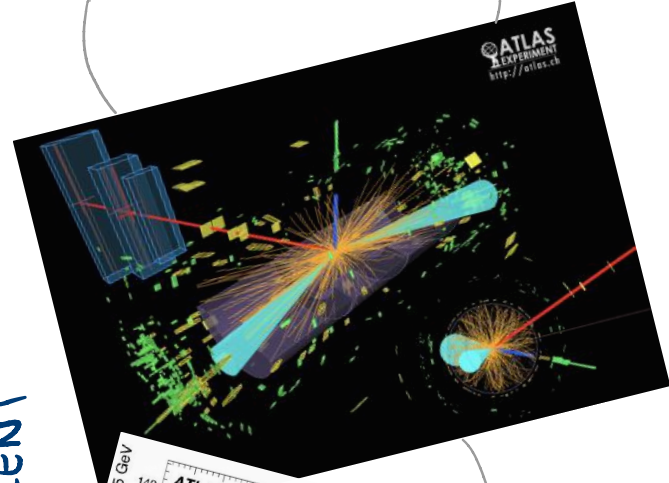
PHENOMENOLOGIE



EXPERIMENT

Beschleuniger

Detektoren



Datenanalyse

statistik

# 0. Konventionen & Beispiele

\* Natürliche Einheiten  $\hbar = c = 1$

$$\hookrightarrow [\hbar] = [Et] \Rightarrow [E] = \frac{1}{[t]}$$

$$\hookrightarrow [c] = \left[ \frac{x}{t} \right] \Rightarrow [x] = [t]$$

Teilchenphysik:  $[E] = eV$

$$[E] = [p] = [m] = eV$$

$$[t] = [x] = eV^{-1}$$

$\hookrightarrow$  Faustregel:  $1 \text{ GeV} \approx m_p$

\* Vierervektoren:  $x^\mu = (t, x, y, z)$   $\partial_\mu = (\partial_t, \vec{\nabla})$

$\hookrightarrow$  Skalarprodukt:  $a \cdot b = a^\mu b_\mu = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$  d'Alembert Operator  $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \Delta$

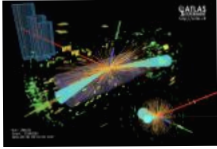
$\hookrightarrow$  Gamma Matrizen  $\gamma^\mu \mapsto \alpha = a^\mu \gamma_\mu$

python Skripte  
(auf indico verlinkt)

\* Beispiele: [albuss.web.cern.ch/fts23/](http://albuss.web.cern.ch/fts23/)

# Plan

0. Konventionen & Beispiele
1. Quantenfeldtheorie (QFT)
2. Störungstheorie & Feynman Diagramme
3. Ereignisraten, Wirkungsquerschnitte & Streuamplituden
4. Lepton Kollisionen
5. Proton Kollisionen & höhere Ordnungen
6. Monte Carlo Simulationen



Ereignisraten:

$$N = L \sigma$$

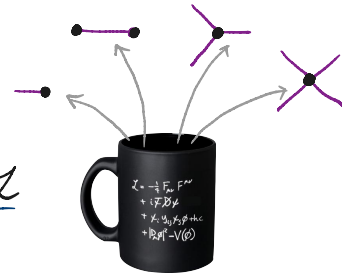
Wirkungsquerschnitt

$$d\sigma_{2 \rightarrow n} = \frac{1}{F} \langle |M|^2 \rangle d\Phi_n$$

Streuamplituden

$$\text{Feynman diagrams} + \dots \leftrightarrow \underline{\mathcal{Z}}$$

Feynman diagrams  
& rules



Schritt 2

Schritt 1

# 1 Quantenfeldtheorie

$$QFT = QM \otimes SRT$$

## \* Quantenmechanik (QM)

Schrödinger Gl.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \hat{H} \psi(\vec{x}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{x}) \right] \psi(\vec{x}, t)$$

⊕ Beschreibung mikroskopischer Natur ( $\Delta x$  klein)

⊖ nicht relativistisch:  $\hat{x}$  (op) vs.  $t$  (Param),  $\partial_t$  vs.  $\Delta$

⊖ Teilchenzahl fix (abgesehen von zweiter Quantisierung)

## \* Spezielle Relativitätstheorie (SRT)

Prinzip der Relativität  $\leftrightarrow$  Invarianz bzgl. Lorentz Transformationen

$$X^\mu \rightarrow X'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu \quad (\text{Drehungen \& "Boosts"})$$

⊕ Prozesse mit hoher Geschw./Energie ( $v \sim c$ )

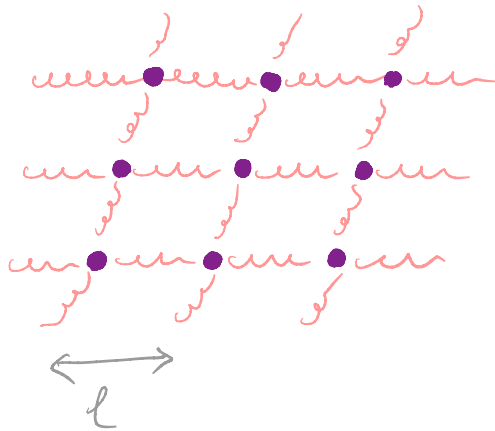
# Quantenfeldtheorie

Hochenergiephysik: z.B. Kollision von **energetischen** Teilchen um **kleine Distanzen** aufzulösen ( $\leadsto$  fundamentale Struktur)

\* Teilchen  $\xi$   $\leftrightarrow$  Feld  $\Phi_{\xi}^{\mu}(t, \vec{x}) \leadsto$  Anregungen

\*  $E=mc^2$  & QM  $\Rightarrow$  Teilchenerzeugung / Vernichtung.

\* QFT ist eine **Matratze**:



$$L = \frac{1}{2} \sum_a m \dot{q}_a^2 - \sum_{a,b} k_{ab} q_a q_b - \dots$$

$\hookrightarrow$  Euler Lagrange

$$m \ddot{q}_a = \sum_b k_{ab} q_b + \dots$$

(  $k_{ab}$  diagonalisieren  $\Rightarrow$  Eigenmoden / Eigenfreq )  
 $\hookrightarrow$  allg. Lsg. Wellenpakete von Moden )

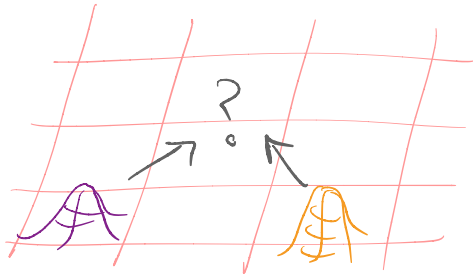
# Quantenfeldtheorie

Hochenergiephysik: z.B. Kollision von **energetischen** Teilchen um **kleine Distanzen** aufzulösen ( $\leadsto$  fundamentale Struktur)

\* Teilchen  $\xi$   $\leftrightarrow$  Feld  $\Phi_{\xi}^{\chi}(\pm i, \vec{x}) \leadsto$  Anregungen

\*  $E=mc^2$  & QM  $\Rightarrow$  Teilchenerzeugung / Vernichtung.

\* QFT ist eine **Matratze**:



$$L = \frac{1}{2} \sum_a m \dot{q}_a^2 - \sum_{a,b} k_{ab} q_a q_b - \dots$$

$\hookrightarrow$  Euler Lagrange

$$m \ddot{q}_a = \sum_b k_{ab} q_b + \dots$$

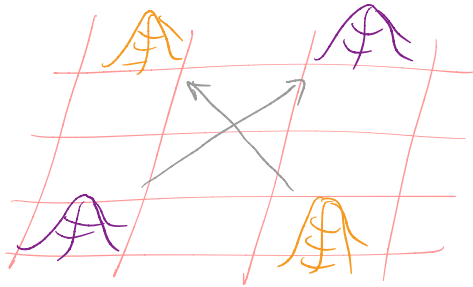
# Quantenfeldtheorie

Hochenergiephysik: z.B. Kollision von **energetischen** Teilchen um **kleine Distanzen** aufzulösen ( $\leadsto$  fundamentale Struktur)

\* Teilchen  $\xi \leftrightarrow$  Feld  $\Phi_{\xi}^{\chi}(\vec{t}, \vec{x}) \rightsquigarrow$  Anregungen

\*  $E=mc^2$  & QM  $\Rightarrow$  Teilchenerzeugung / Vernichtung.

\* QFT ist eine **Matratze**:



$$L = \frac{1}{2} \sum_a m \dot{q}_a^2 - \sum_{a,b} k_{ab} q_a q_b$$

$\hookrightarrow$  Euler Lagrange

$$m \ddot{q}_a = \sum_b k_{ab} q_b$$

linear  $\rightarrow$  Superposition  $\rightarrow$  keine WW



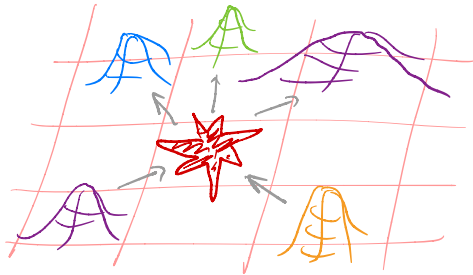
# Quantenfeldtheorie

Hochenergiephysik: z.B. Kollision von **energetischen** Teilchen um **kleine Distanzen** aufzulösen ( $\leadsto$  fundamentale Struktur)

\* Teilchen  $\xi \leftrightarrow$  Feld  $\Phi_{\xi}^{\chi}(\vec{t}, \vec{x}) \leadsto$  Anregungen

\*  $E=mc^2$  & QM  $\Rightarrow$  Teilchenerzeugung / Vernichtung

\* QFT ist eine **Matratze**:

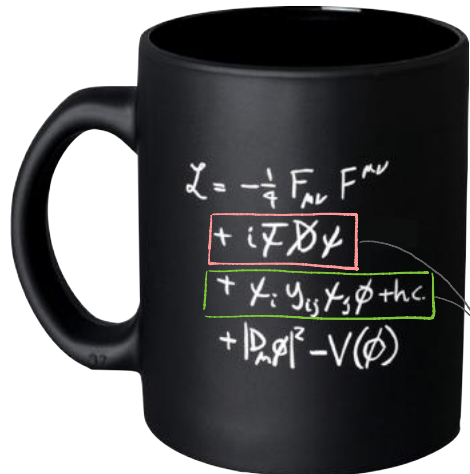


$$L = \frac{1}{2} \sum_a m \dot{q}_a^2 - \sum_{a,b} k_{ab} q_a q_b - \sum_{a,b,c} g_{abc} q_a q_b q_c \dots$$

$\hookrightarrow$  Euler Lagrange

$$m \ddot{q}_a = \sum_b k_{ab} q_b + \sum_{b,c} g_{abc} q_b q_c \dots$$

nicht linear  $\Rightarrow$  WW



Elektron

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\partial_\nu g_\mu^a \partial_\nu g_\mu^a - g_s f^{abc} \partial_\mu g_\nu^a g_\mu^b g_\nu^c - \frac{1}{4}g_s^2 f^{abc} f^{ade} g_\mu^b g_\nu^c g_\mu^d g_\nu^e + \\
 & \frac{1}{2}ig_s^2 (g_1^T \gamma^\mu g_1^T) g_\mu^a + G^a \partial^2 G^a + g_s f^{abc} \partial_\mu G^a G^b g_\mu^c - \partial_\nu W_\mu^+ \partial_\nu W_\mu^- - \\
 & M^2 W_\mu^+ W_\mu^- - \frac{1}{2}\partial_\nu Z_\mu^0 \partial_\nu Z_\mu^0 - \frac{1}{2c_w} M^2 Z_\mu^0 Z_\mu^0 - \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2}\partial_\mu H \partial_\mu H - \\
 & \frac{1}{2}m_h^2 H^2 - \partial_\mu \phi^+ \partial_\mu \phi^- - M^2 \phi^+ \phi^- - \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^0 \partial_\mu \phi^0 - \frac{1}{2c_w} M \phi^0 \phi^0 - \beta_h [\frac{2M^2}{g^2} + \\
 & \frac{2M}{g} H + \frac{1}{2}(H^2 + \phi^0 \phi^0 + 2\phi^+ \phi^-)] + \frac{2M^4}{g^4} \alpha_h - ig_{c_w} [\partial_\nu Z_\mu^0 (W_\mu^+ W_\nu^- - \\
 & W_\mu^- W_\nu^+) - Z_\nu^0 (W_\mu^+ \partial_\nu W_\mu^- - W_\mu^- \partial_\nu W_\mu^+) + Z_\mu^0 (W_\nu^+ \partial_\nu W_\mu^- - \\
 & W_\mu^- \partial_\nu W_\nu^+)] - ig_{s_w} [\partial_\nu A_\mu (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) - A_\nu (W_\mu^+ \partial_\nu W_\mu^- - \\
 & W_\mu^- \partial_\nu W_\mu^+) + A_\mu (W_\nu^+ \partial_\nu W_\mu^- - W_\nu^- \partial_\nu W_\mu^+)] - \frac{1}{2}g^2 W_\mu^+ W_\nu^- W_\nu^+ W_\mu^- + \\
 & \frac{1}{2}g^2 W_\mu^+ W_\nu^- W_\mu^+ W_\nu^- + g^2 c_w^2 (Z_\mu^0 W_\nu^+ Z_\nu^0 W_\mu^- - Z_\mu^0 Z_\nu^0 W_\nu^+ W_\mu^-) + \\
 & g_s^2 s_w^2 (A_\mu W_\nu^+ A_\nu W_\mu^- - A_\mu A_\nu W_\nu^+ W_\mu^-) + g^2 s_w c_w [A_\mu Z_\nu^0 (W_\mu^+ W_\nu^- - \\
 & W_\nu^+ W_\mu^-) - 2A_\mu Z_\mu^0 W_\nu^+ W_\nu^-] - g\alpha [H^3 + H \phi^0 \phi^0 + 2H \phi^+ \phi^-] - \\
 & \frac{1}{2}g^2 \alpha_h [H^4 + (\phi^0)^4 + 4(\phi^+ \phi^-)^2 + 4(\phi^0)^2 \phi^+ \phi^- + 4H^2 \phi^+ \phi^- + 2(\phi^0)^2 H^2] - \\
 & g M W_\mu^+ W_\mu^- H - \frac{1}{2}g \frac{M}{c_w} Z_\mu^0 Z_\mu^0 H - \frac{1}{2}ig [W_\mu^+ (\phi^0 \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu \phi^+) - \\
 & W_\mu^- (\phi^0 \partial_\mu \phi^+ - \phi^+ \partial_\mu \phi^-)] + \frac{1}{2}g [W_\mu^+ (H \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu H) - W_\mu^- (H \partial_\mu \phi^+ - \\
 & \phi^+ \partial_\mu H)] + \frac{1}{2}g \frac{1}{c_w} (Z_\mu^0 (H \partial_\mu \phi^0 - \phi^0 \partial_\mu H) - ig \frac{s_w^2}{c_w} M Z_\mu^0 (W_\mu^+ \phi^- - W_\mu^- \phi^+) + \\
 & ig s_w M A_\mu (W_\mu^+ \phi^- - W_\mu^- \phi^+) - ig \frac{1-2c_w^2}{2c_w} Z_\mu^0 (\phi^+ \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu \phi^+) + \\
 & ig s_w A_\mu (\phi^+ \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu \phi^+) - \frac{1}{4}g^2 W_\mu^+ W_\mu^- [H^2 + (\phi^0)^2 + 2\phi^+ \phi^-] - \\
 & \frac{1}{4}g^2 \frac{1}{c_w} Z_\mu^0 [H^2 + (\phi^0)^2 + 2(2s_w^2 - 1)^2 \phi^+ \phi^-] - \frac{1}{2}g^2 \frac{s_w^2}{c_w} Z_\mu^0 \phi^0 (W_\mu^+ \phi^- + \\
 & W_\mu^- \phi^+) - \frac{1}{2}ig \frac{s_w^2}{c_w} Z_\mu^0 H (W_\mu^+ \phi^- - W_\mu^- \phi^+) + \frac{1}{2}g^2 s_w A_\mu \phi^0 (W_\mu^+ \phi^- + \\
 & W_\mu^- \phi^+) + \frac{1}{2}ig^2 s_w A_\mu H (W_\mu^+ \phi^- - W_\mu^- \phi^+) - \frac{g^2 s_w}{2c_w} (2c_w^2 - 1) Z_\mu^0 A_\mu \phi^+ \phi^- - \\
 & g^2 s_w^2 A_\mu A_\nu \phi^+ \phi^- - \bar{e}^\lambda (\gamma \partial + m_e) e^\lambda - \bar{\nu}^\lambda \gamma \partial \nu^\lambda - \bar{u}^\lambda (\gamma \partial + m_u) u^\lambda \\
 & d_j^\lambda (\gamma \partial + m_d) d_j^\lambda + ig s_w A_\mu [-(\bar{e}^\lambda \gamma^\mu e^\lambda) + \frac{2}{3}(\bar{\nu}^\lambda \gamma^\mu \nu^\lambda) - \frac{1}{3}(\bar{d}_j^\lambda \gamma^\mu d_j^\lambda)] + \\
 & \frac{ig}{2c_w} Z_\mu^0 [(\bar{\nu}^\lambda \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \nu^\lambda) + (\bar{e}^\lambda \gamma^\mu (4s_w^2 - 1 - \gamma^5) e^\lambda) + (\bar{u}_j^\lambda \gamma^\mu (\frac{1}{3}s_w^2 - \\
 & 1 - \gamma^5) u_j^\lambda) + (\bar{d}_j^\lambda \gamma^\mu (1 - \frac{8}{3}s_w^2 - \gamma^5) d_j^\lambda)] + \frac{ig}{2\sqrt{2}} W_\mu^+ [(\bar{\nu}^\lambda \gamma^\mu (1 + \gamma^5) e^\lambda) + \\
 & (\bar{u}_j^\lambda \gamma^\mu (1 + \gamma^5) C_{\lambda n} d_j^\lambda)] + \frac{ig}{2\sqrt{2}} W_\mu^- [(\bar{e}^\lambda \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \nu^\lambda) + (\bar{d}_j^\lambda C_{\lambda n}^\dagger \gamma^\mu (1 + \\
 & \gamma^5) u_j^\lambda)] + \frac{ig}{2\sqrt{2}} \frac{m_\mu^2}{M^2} [-\phi^+ (\bar{\nu}^\lambda (1 - \gamma^5) e^\lambda) + \phi^- (\bar{e}^\lambda (1 + \gamma^5) \nu^\lambda)] - \\
 & \frac{g}{2} \frac{m_\mu^2}{M} [H (\bar{e}^\lambda e^\lambda) + i\phi^0 (\bar{e}^\lambda \gamma^5 e^\lambda)] + \frac{ig}{2M\sqrt{2}} \phi^+ [-m_d^2 (\bar{u}_j^\lambda C_{\lambda n} (1 - \gamma^5) d_j^\lambda) + \\
 & m_u^2 (\bar{u}_j^\lambda C_{\lambda n} (1 + \gamma^5) d_j^\lambda) + \frac{ig}{2M\sqrt{2}} \phi^- [m_d^2 (\bar{d}_j^\lambda C_{\lambda n}^\dagger (1 + \gamma^5) u_j^\lambda) - m_u^2 (\bar{d}_j^\lambda C_{\lambda n}^\dagger (1 - \\
 & \gamma^5) u_j^\lambda) - \frac{g}{2} \frac{m_\mu^2}{M} H (\bar{u}_j^\lambda u_j^\lambda) - \frac{g}{2} \frac{m_\mu^2}{M} H (\bar{d}_j^\lambda d_j^\lambda) + \frac{ig}{2} \frac{m_\mu^2}{M^2} \phi^0 (\bar{u}_j^\lambda \gamma^5 u_j^\lambda) - \\
 & \frac{ig}{2} \frac{m_\mu^2}{M^2} \phi^0 (\bar{d}_j^\lambda \gamma^5 d_j^\lambda)] + \bar{X}^+ (\partial^2 - M^2) X^+ + \bar{X}^- (\partial^2 - M^2) X^- + X^0 (\partial^2 - \\
 & \frac{M^2}{c_w^2}) X^0 + \bar{Y} \partial^2 Y + ig_{c_w} W_\mu^+ (\partial_\mu \bar{X}^0 X^- - \partial_\mu \bar{X}^+ X^0) + ig_{s_w} W_\mu^+ (\partial_\mu \bar{Y} X^- - \\
 & \partial_\mu \bar{X}^+ Y) + ig_{c_w} W_\mu^- (\partial_\mu \bar{X}^- X^0 - \partial_\mu \bar{X}^0 X^+) + ig_{s_w} W_\mu^- (\partial_\mu \bar{X}^- Y - \\
 & \partial_\mu \bar{Y} X^+) + ig_{c_w} Z_\mu^0 (\partial_\mu \bar{X}^+ X^- - \partial_\mu \bar{X}^- X^0) + ig_{s_w} A_\mu (\partial_\mu \bar{X}^+ X^- + \\
 & \partial_\mu \bar{X}^- X^0) - \frac{1}{2}g M [\bar{X}^+ X^+ H + \bar{X}^- X^- H + \frac{1}{c_w} \bar{X}^0 X^0 H] + \\
 & \frac{1-2c_w^2}{2c_w} ig M [\bar{X}^+ X^0 \phi^+ - \bar{X}^- X^0 \phi^-] + \frac{1}{2c_w} ig M [\bar{X}^0 X^- \phi^+ - \bar{X}^0 X^+ \phi^-] + \\
 & ig M s_w [\bar{X}^0 X^- \phi^+ - \bar{X}^0 X^+ \phi^-] + \frac{1}{2}ig M [\bar{X}^+ X^+ \phi^0 - \bar{X}^- X^- \phi^0]
 \end{aligned}$$

freies Elektron

$$\tilde{\Psi}_e (i\partial - m_e) \Psi_e$$

$$-ie A_\mu \tilde{\Psi}_e \gamma^\mu \Psi_e$$

$$-ie Z_\mu \tilde{\Psi}_e \gamma^\mu (v_e - a_e \gamma^5) \Psi_e$$

+ ...

Wechselwirkungen

# Freie Felder

Spin 0:  $(\square + m^2) \phi(x) = 0$   $\Leftrightarrow \mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$   
Klein-Gordon Gl.

Spin  $\frac{1}{2}$ :  $(i\not{\partial} - m) \psi(x) = 0$   $\Leftrightarrow \mathcal{L}_\psi = \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi$   
Dirac Gl.

Spin 1:  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$   $\Leftrightarrow \mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$   
Maxwell Gl.

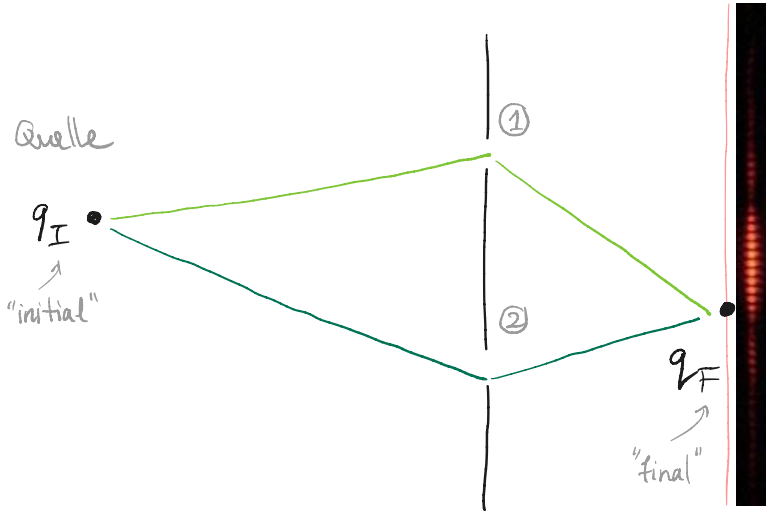
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\hookrightarrow$  Eichfreiheit:  $A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \varphi(x)$   
 $\Rightarrow F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

# Pfadintegralquantisierung

Das Doppelspaltexperiment

Schirm /  
Detektor



mehr Löcher  
& mehr Blenden?

klassisch:

$$P_{q_I \rightarrow q_F} = P_1 + P_2$$

QM:

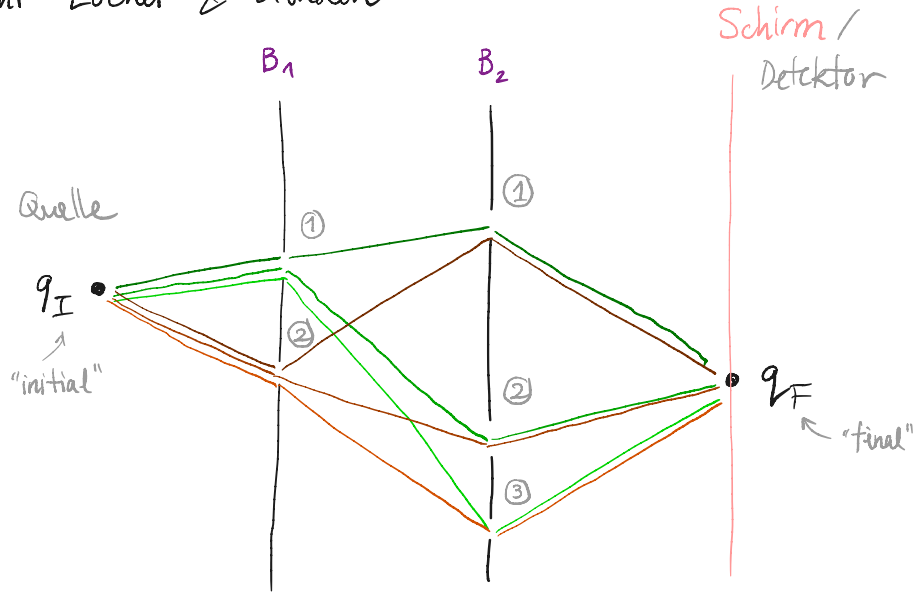
$$\begin{aligned} P_{q_I \rightarrow q_F} &= |A_1 + A_2|^2 \\ &= |A_1|^2 + |A_2|^2 + 2 \operatorname{Re}\{A_1^* A_2\} \end{aligned}$$

Interferenz!

↳ Wellennatur (WSK)  
des Elektrons !

# Pathintegralquantisierung

↔ Mehr Löcher & Blenden



$$P = |A|^2$$

$$A = A_{11} + A_{12} + A_{13} \\ + A_{21} + A_{22} + A_{23}$$

noch mehr Löcher  
& Blenden !!!

# Pfadintegralquantisierung

↳  $\infty$  viele Blenden & Löcher



$$P = |\mathcal{A}|^2$$

$$\mathcal{A} = \sum_{\text{Pfade}} \mathcal{A}_{\text{Pfad}}$$

eine Blende mit  
unendlich vielen Löchern  
 $\hat{=}$  keine Blende

↳ Im Heisenberg Bild

$$\langle q_F | e^{-i\hat{H}T} | q_I \rangle = \int \mathcal{D}[q(t)]$$

Operator

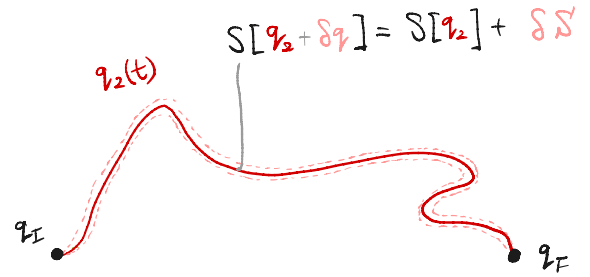
$$e^{i \int_0^T dt L(q, \dot{q})}$$

keine Operatoren (Pfadintegraldarstellung)

# Der klassische Limes ( $\hbar \rightarrow 0$ )

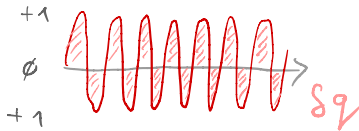
$$\int \mathcal{D}[q(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S[q(t)]}$$

$q(0) = q_I$        $S[q(t)] = \int_0^T dt L(q(t), \dot{q}(t))$   
 $q(T) = q_F$



\* Bemerkung:  $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$   
 $\hbar \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{\hbar} \rightarrow \infty$  }  $e^{\frac{i}{\hbar} S} \hat{=} \text{Oszillationen mit } \infty \text{ hoher Frequenz}$

\*  $q_2(t) \rightarrow$  Pfad sensitiv auf kleine Deformationen  $\delta q$   
 $\Rightarrow$  Integral über benachbarte Pfade heben sich auf!



$\Rightarrow$  Mittelwert / Integral = 0

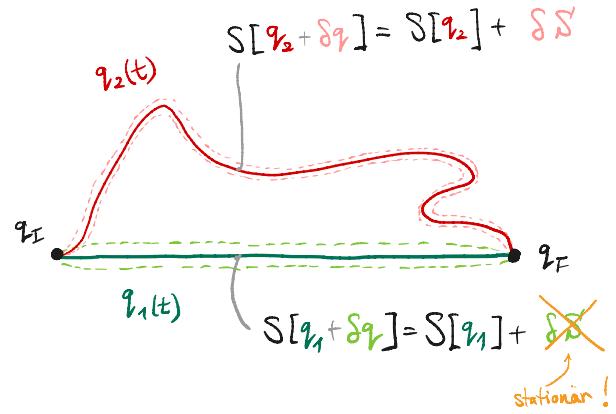
welche Pfade  
 können  
 überleben?

# Der klassische Limes ( $\hbar \rightarrow 0$ )

$$\int_{q_I}^{q_F} \mathcal{D}[q(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S[q(t)]}$$

$q(0) = q_I$   
 $q(T) = q_F$

$$S[q(t)] = \int_0^T dt L(q(t), \dot{q}(t))$$



\* Bemerkung:  $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$   
 $\hbar \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{\hbar} \rightarrow \infty$  } Oszillationen mit "∞" hoher Frequenz

\*  $q_1(t) \rightarrow$  Pfad **insensitiv** auf kleine Deformationen  $\delta q$

$\Rightarrow$  benachbarte Pfade haben  $\sim$  gleiche Phase

$\Leftarrow$  summieren sich kohärent auf

$\Leftrightarrow \delta S = 0$  (  $\rightarrow$  Euler-Lagrange Gln. der klassischen Mechanik  
 "Prinzip der minimalen Wirkung" )



# Feldquantisierung

$$\left. \begin{array}{l} t \longmapsto (t, \vec{x}) = x^\mu \\ q(t) \longmapsto \phi(t, \vec{x}) = \phi(x) \\ \Delta[q(t)] \longmapsto \Delta[\phi(x)] \\ L(\dot{q}(t), q(t)) \longmapsto \mathcal{L}(\partial_\mu \phi(x), \phi(x)) \end{array} \right\}$$

Pfadintegral der QFT

$$\int \mathcal{D}[\phi] e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\partial_\mu \phi, \phi)}$$

Enthält vollständige Information der Theorie

\* EXTREM schweres Integral zu lösen (Störungstheorie, Gittersimulation, ...)  
(Ausnahme: die freie Theorie)

# Zusammenfassung QFT

- \* Teilchen sind elementare Anregungen eines Feldes  $\phi$   
↳ separates Feld für jede Teilchenspezies
- \* Neue Theorie nötig um QM & SRT zu kombinieren
- \* Zentrales Objekt Pfadintegral
- \* in der praktischen Anwendung brauchen wir Amplituden

$$\mathcal{A}_{\phi_1, \dots, \phi_n} \iff \int \mathcal{D}[\phi] \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{i \int d^4x \mathcal{L}(\partial_\mu \phi, \phi)}$$

↑  
erzeuge/vernichte ein  
Teilchen  $\phi$  bei  $x_1$

## 2. Störungstheorie & Feynman Diagramme

Ein Pfadintegral, das wir exakt lösen können  $\iff$  Gauß Integral

1 dimensional

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left(-\frac{1}{2} a x^2\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 \exp\left(-\frac{1}{2} a x^2\right) = a^{-1} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^4 \exp\left(-\frac{1}{2} a x^2\right) = 3 a^{-2} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

N-dimensional

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix} \quad (N \times N) \text{ Matrix}$$

$\iff$  allgemeine quadratische Form

$$\vec{x}^T A \vec{x} = \sum_{ij} x_i x_j A_{ij}$$

## 2. Störungstheorie & Feynman Diagramme

Ein Pfadintegral, das wir exakt lösen können  $\iff$  Gauß Integral

1 dimensional

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left(-\frac{1}{2} a x^2\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 \exp\left(-\frac{1}{2} a x^2\right) = a^{-1} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

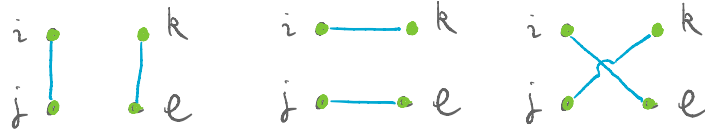
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^4 \exp\left(-\frac{1}{2} a x^2\right) = 3 a^{-2} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

N-dimensional

$$\int d^N \vec{x} \exp\left(-\frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{x}\right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^N}{\det A}} \equiv \mathcal{N}$$

$$\int d^N \vec{x} x_i x_j \exp\left(-\frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{x}\right) = \mathcal{N} \bar{A}_{ij}^{-1}$$

$$\int d^N \vec{x} x_i x_j x_k x_l \exp\left(-\frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{x}\right) = \mathcal{N} [\bar{A}_{ij}^{-1} \bar{A}_{kl}^{-1} + \bar{A}_{ik}^{-1} \bar{A}_{jl}^{-1} + \bar{A}_{il}^{-1} \bar{A}_{jk}^{-1}]$$

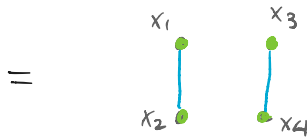


# Die Freie Theorie

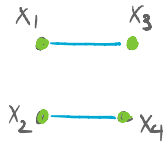
" $\infty$ " dimensional

$$\frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}[\phi] \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \exp \left\{ i \int d^4x \phi(x) (\square + m^2) \phi(x) \right\}$$

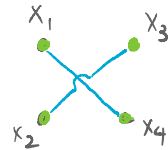
$$= \Delta_\phi(x_1 - x_2) \Delta_\phi(x_3 - x_4) + \Delta_\phi(x_1 - x_3) \Delta_\phi(x_2 - x_4) + \Delta_\phi(x_1 - x_4) \Delta_\phi(x_2 - x_3)$$



+



+



sehr langwellige "Streuung"  
 $\Rightarrow$  brauchen Wechselwirkung

\* Feynman Propagator  $\Delta_\phi(x-y) \leftrightarrow$  das Inverse zu  $(\square + m^2)$

$$\Leftrightarrow (\square + m^2) \Delta_\phi(x-y) = -\delta(x-y)$$

$$\Delta_\phi(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

- $\Leftrightarrow x^0 \leq y^0$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) erzeuge Teilchen bei } x \text{ (y)} \\ \text{(ii) propagiere von } x \text{ (y)} \rightarrow y \text{ (x)} \\ \text{(iii) vernichte Teilchen bei } y \text{ (x)} \end{array} \right.$

# Störungstheorie & Feynmandiagramme

Wenn nicht exakt, approximativ (& systematisch verbesserbar)

Idee: Wechselwirkungen sind "kleine" Störungen um die freie Theorie

$$\alpha_{em} \sim 1/137$$

$$\alpha_{\text{Schwach}} \sim \frac{\alpha_{em}}{\sin^2 \theta_w} \sim 1/30$$

$$\alpha_s \sim 1/10$$

$$\Rightarrow \mathcal{O} = \mathcal{O}^{(0)} + \alpha \mathcal{O}^{(1)} + \alpha^2 \mathcal{O}^{(2)} + \dots$$

Beispiel Elektron g-2:  $a_e = \frac{g_e - 2}{2}$

$$a_e^{exp} = 1\,159\,652\,180.73(28) \times 10^{-12} \quad (0.24 \text{ ppb})$$

$$a_e^{th} = 1\,159\,652\,182.032(13)(12)(720) \times 10^{-12}$$

contribution	value in units of $10^{-12}$
$A_1^{(2)}(\alpha/\pi)$	1 161 409 733.640 $\pm$ 0.720
$A_1^{(4)}(\alpha/\pi)^2$	- 1 772 305.065 $\pm$ 0.003
$A_1^{(6)}(\alpha/\pi)^3$	14 804.203
$A_1^{(8)}(\alpha/\pi)^4$	- 55.667
$A_1^{(10)}(\alpha/\pi)^5$	0.451 $\pm$ 0.013
$A_2^{(4)}(m_e/m_\mu)(\alpha/\pi)^2$	2.804
$A_2^{(6)}(m_e/m_\mu)(\alpha/\pi)^3$	- 0.092
$A_2^{(8)}(m_e/m_\mu)(\alpha/\pi)^4$	0.026
$A_2^{(10)}(m_e/m_\mu)(\alpha/\pi)^5$	- 0.0002
$A_2^{(4)}(m_e/m_\tau)(\alpha/\pi)^2$	0.010
$A_2^{(6)}(m_e/m_\tau)(\alpha/\pi)^3$	- 0.0008
$a_e(\text{hadronic v.p.})$	1.8490 $\pm$ 0.0108
$a_e(\text{hadronic v.p., NLO})$	- 0.2213 $\pm$ 0.0012
$a_e(\text{hadronic v.p., NNLO})$	0.0280 $\pm$ 0.0002
$a_e(\text{hadronic L-L})$	0.0370 $\pm$ 0.0050
$a_e(\text{weak})$	0.03053 $\pm$ 0.00023

# Störungstheorie

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \overbrace{\phi(x)(\square+m^2)\phi(x)}^{\text{frei}} - \overbrace{\frac{\lambda}{4!} \phi(x)^4}^{\text{WW}} \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ -i \int d^4y \frac{\lambda}{4!} \phi(y)^4 \right\} \exp \left\{ i \int d^4x \phi(x)(\square+m^2)\phi(x) \right\} \\ &= \left\{ 1 - i \frac{\lambda}{4!} \int d^4y \phi(y)^4 + \frac{1}{2!} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4y_1 d^4y_2 \phi(y_1)^4 \phi(y_2)^4 + \dots \right\} \\ & \quad \times \exp \left\{ i \int d^4x \phi(x)(\square+m^2)\phi(x) \right\} \end{aligned}$$

# Störungstheorie

$$\frac{1}{N} \int \Delta[\phi] \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \exp \left\{ i \int d^4x \left[ \phi(x) (\square + m^2) \phi(x) - \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x) \right] \right\}$$

$$= \lambda^0 \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_3 \\ | & | \\ x_2 & x_4 \end{array} + \begin{array}{cc} x_1 & x_3 \\ \text{---} & \text{---} \\ x_2 & x_4 \end{array} + \begin{array}{cc} x_1 & x_3 \\ \diagdown & / \\ x_2 & x_4 \end{array} \end{array} \right\} \text{ ("langweilig" / nicht zusammenhängend)}$$

$$+ \int d^4y (-i\lambda) \left\{ \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_3 \\ \diagdown & / \\ y & \\ / & \diagdown \\ x_2 & x_4 \end{array} + \dots + \begin{array}{c} | & | \\ | & | \\ \bigcirc \end{array} + \dots + \begin{array}{c} | & | \\ | & | \\ \bigcirc \end{array} + \dots \end{array} \right\}$$

("Vakuum blasen")      (nicht zusammenhängend)

$$+ \mathcal{O}(\lambda^2)$$



# Feynman Regeln für Streuamplituden (Impulsraum)

\* nur zusammenhängende Diagramme

\* amputierte externe Propagatoren & ersetze durch 1-Teilchen Wellenfktn.

$$[\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_n\phi)(\partial^n\phi) - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4]$$

⇒ Feynman Regeln für  $\mathcal{A}$

• externe Linien


 $\rightsquigarrow 1$


 $\rightsquigarrow 1$

• Propagator


 $\rightsquigarrow \frac{i}{p^2 - m_\phi^2}$

• Vertex


 $\rightsquigarrow -i\lambda$

↳ male alle zusammenhängende Diagramme

↳ Impulserhaltung an jedem Vertex ( $\int d^4w$ )

↳ Integriere über alle unbestimmten Impulse  $\rightsquigarrow \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}$  (Loops / Schleifen)

# Feynman Regeln für das Standardmodell

↔ direkte Korrespondenz zw. WW Term in  $i\mathcal{L}_{SM}$  & Vertizes:

$$-ie A_\mu \bar{\psi}_{e,r} \gamma_{rs}^\mu \psi_{e,s} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} e \quad r \\ \swarrow \quad \uparrow \\ \bullet \\ \searrow \quad \swarrow \\ e \quad s \end{array} \quad \begin{array}{c} \mu \\ \leftarrow \quad \rightarrow \\ \mu \end{array} = -ie \gamma_{rs}^\mu$$

manchmal nicht so trivial ( $\partial_\mu \rightarrow -ip_\mu$ , identische Felder)

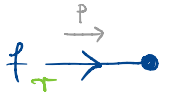
$$\frac{ig_s}{2} (\partial_\mu^a - \partial_\nu^a) f^{abc} A^{b,\mu} A^{c,\nu}$$

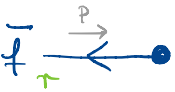
$$\Rightarrow \begin{array}{c} a \\ \mu \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \leftarrow \quad \swarrow \\ g \quad p_1 \quad p_2 \quad g \\ \searrow \quad \downarrow \quad \swarrow \\ g \quad p_3 \quad g \\ c \quad \nu \end{array} = -g_s f^{abc} \left[ \begin{array}{l} g_{\mu\nu} (p_1 - p_2)_\rho \\ + g_{\nu\rho} (p_2 - p_3)_\mu \\ + g_{\rho\mu} (p_3 - p_1)_\nu \end{array} \right]$$

# Mehr Regeln

(komplette Liste z.B. in "Feynman Diagrams For Pedestrians" von Thorsten Ohl)

## \* Externe Felder

einlaufendes  $f$   =  $U_{f,r}(P,\sigma)$

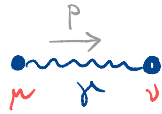
einlaufendes  $\bar{f}$   =  $\tilde{V}_{f,r}(P,\sigma)$

auslaufendes  $f$   =  $\tilde{U}_{f,r}(P,\sigma)$

auslaufendes  $\bar{f}$   =  $V_{f,r}(P,\sigma)$

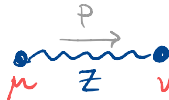
## \* Propagatoren

Photon



$$= \frac{-i g_{\mu\nu}}{p^2}$$

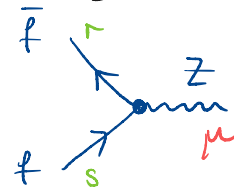
Z-Boson



$$= \frac{-i g_{\mu\nu}}{p^2 - M_Z^2 + i \Gamma_Z M_Z}$$

↑  
zerfallsbreite

## \* Vertex



$$= ie \gamma_{rt}^{\mu} (v_f \mathbb{1}_{ts} + a_f \gamma_{ts}^5)$$

$$v_f = \frac{I_3^f - 2Q_f s_w^2}{2s_w c_w}; \quad a_f = \frac{I_3^f}{2s_w c_w}$$

# Zusammenfassung Feynman Diagramme

\* QFT ist kompliziert

\* Bei einer störungstheoretischen Auswertung  $\rightsquigarrow$  Vereinfachung

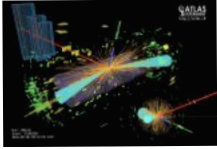
$\hookrightarrow$  Amplituden  $\longleftrightarrow$  Feynmandiagramme

$\hookrightarrow$  können als Startpunkt verwendet werden

(müssen uns keine Gedanken über komplizierte Pfadintegrale machen)

$\hookrightarrow$  Vollkommen algorithmisch  $\rightarrow$  automatisierbar

[tools/feyngame]



Ereignisraten:

$$N = L \sigma$$

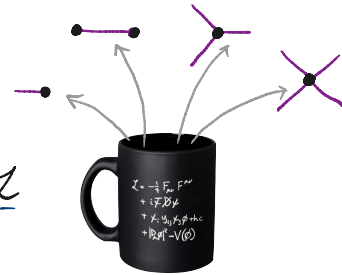
Wirkungsquerschnitt

$$d\sigma_{2 \rightarrow n} = \frac{1}{F} \langle |M|^2 \rangle d\Phi_n$$

Streuamplituden

$$\text{Feynman diagrams} + \dots \leftrightarrow \underline{\mathcal{Z}}$$

Feynman diagrams  
& rules



Schritt 2

Schritt 1 ✓

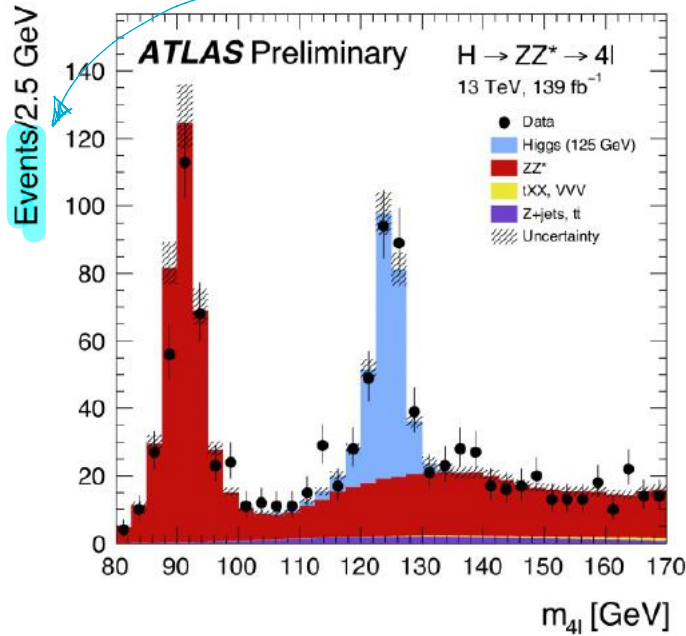
# 3. Ereignisraten etc.

Am Ende messen wir # Ereignisse  
für einen bestimmten Prozess  $a+b \rightarrow 1+2+\dots+n$

Luminosität  
 $\sim$  # Kollisionen

Wirkungs-  
querschnitt

$$dN = L d\sigma$$



- \*  $\sigma_H (13\text{TeV}) \approx 50 \text{ pb}$
  - \*  $\int dt \mathcal{L} \approx 150 \text{ fb}^{-1}$   
Run 2
  - \*  $\sigma_Z (13\text{TeV}) \approx 50 \text{ nb}$
  - \*  $\sigma_W (13\text{TeV}) \approx 200 \text{ nb}$
  - \*  $\mathcal{L} (\text{instantan}) \approx 0.02 \text{ pb}^{-1} \text{ s}^{-1}$
- }  $\sim 7$  Millionen Higgs Bosonen produziert  
 }  $\sim 1000$  Z's  
 }  $\sim 4000$  W's  
 } jede Sekunde!

# Berechnung von Wirkungsquerschnitten

Fermi's goldene Regel:  $a+b \rightarrow 1+2+\dots+n$

$$d\sigma = \frac{1}{F} \langle |A|^2 \rangle d\Phi$$

Fluß

WSK  $\hat{=}$   $|Amplitude|^2$

Phasenraum

(LIPS)

$$= \frac{1}{4(P_a \cdot P_b)} = \frac{1}{2 E_{cm}^2}$$

Feynman  
Diagramme

$$d\Phi_n(P_1, \dots, P_n; P_a + P_b) \quad \text{on shell} \quad E > 0$$

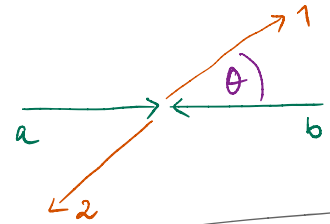
$$= \frac{n}{\pi} \frac{d^4 P_i}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(P_i^2 - m_i^2) \Theta(P_i^0)$$

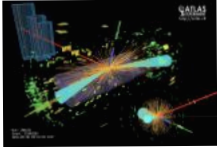
$$\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_1 + \dots + P_n - (P_a + P_b))$$

Energie- Impuls  
Erhaltung

Spezialfall:  $a+b \rightarrow 1+2$

$$d\Phi_2 = \frac{d \cos \theta}{16\pi} \quad (\text{masselos})$$





Ereignisraten:

$$N = L \sigma$$

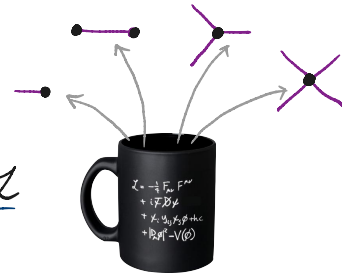
Wirkungsquerschnitt

$$d\sigma_{2 \rightarrow n} = \frac{1}{F} \langle |M|^2 \rangle d\Phi_n$$

Streuamplituden

$$\text{Feynman diagrams} + \dots \leftrightarrow \underline{\mathcal{Z}}$$

Feynman diagrams  
& rules

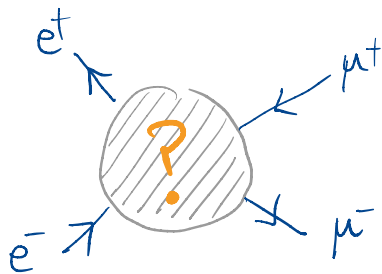


Schritt 2 ✓

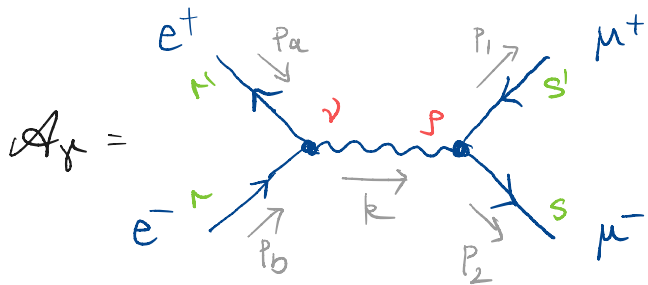
Schritt 1 ✓



4.  $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$  (Annahme:  $m_e, m_\mu \ll E \Leftrightarrow$  Kollisionsenergie)



$\leadsto$  2 Diagramme



$\mathcal{A}_s =$

$$k = (p_a + p_b) = (p_1 + p_2)$$

$$= \tilde{v}_{e,r'}(p_a, \sigma_a) [-ie \gamma_{rr'}^\nu] u_{e,r}(p_b, \sigma_b)$$

$$\times \frac{-i g_{\nu\sigma}}{k^2}$$

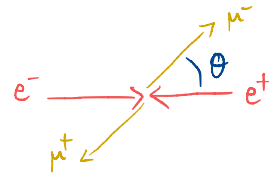
$$\times \tilde{u}_{\mu,s}(p_2, \sigma_2) [-ie \gamma_{ss'}^\rho] v_{\mu,s'}(p_1, \sigma_1)$$

$$= i \frac{e^2}{(p_a + p_b)^2} [\tilde{v}_e \gamma^\sigma u_e] [\tilde{u}_\mu \gamma_\sigma v_\mu] \in \mathbb{C}$$

# Volle Amplitude ( $\gamma + Z$ Austausch)

Mittelung  $\rightarrow$  unpolarisiert

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins } \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1', \sigma_2'} |A_1|^2 = \frac{1}{4} \frac{8e^4}{(P_a \cdot P_b)^2} \left[ (P_a \cdot P_1) (P_b \cdot P_2) + (P_a P_2) (P_b P_1) \right] = e^4 (1 + \cos^2 \theta)$$



\* mit Z-Boson Austausch

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |A_1 + A_2|^2 = e^4 \left[ G_1(k^2) (1 + \cos^2 \theta) + G_2(k^2) 2 \cos \theta \right]$$

$$\hookrightarrow G_1(k^2) = 1 + 2 v_e v_\mu \operatorname{Re} \left\{ \frac{k^2}{k^2 - M_Z^2 + i \Gamma_Z M_Z} \right\} + (v_e^2 + a_e^2) (v_\mu^2 + a_\mu^2) \left| \frac{k^2}{k^2 - M_Z^2 + i \Gamma_Z M_Z} \right|^2$$

$$\hookrightarrow G_2(k^2) = \underbrace{\emptyset + 2 a_e a_\mu \operatorname{Re} \left\{ \frac{k^2}{k^2 - M_Z^2 + i \Gamma_Z M_Z} \right\}}_{2 \operatorname{Re} [A_1^* A_2]} + \underbrace{4 v_e a_e v_\mu a_\mu \left| \frac{k^2}{k^2 - M_Z^2 + i \Gamma_Z M_Z} \right|^2}_{|A_2|^2}$$

$|A_1|^2$        $2 \operatorname{Re} [A_1^* A_2]$        $|A_2|^2$

# Wirkungsquerschnitte & Asymmetrie

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\alpha^2 \pi}{2s} \left[ (1 + \cos^2\theta) G_1(s) + 2 \cos\theta G_2(s) \right] \quad (s = 4E^2)$$

$$\sigma = \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\alpha^2 \pi}{2s} \frac{8}{3} G_1(s)$$

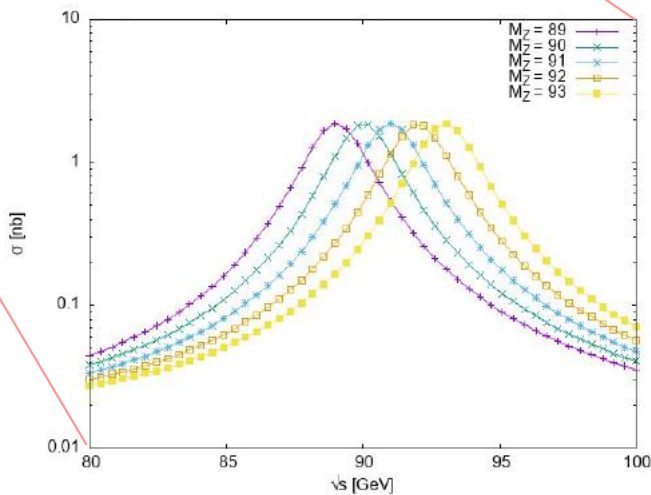
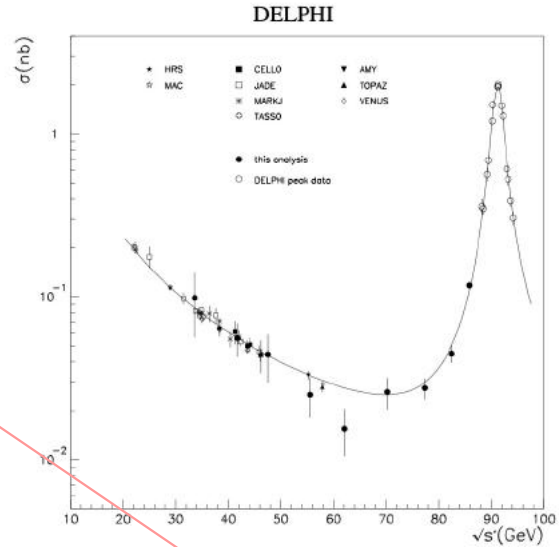
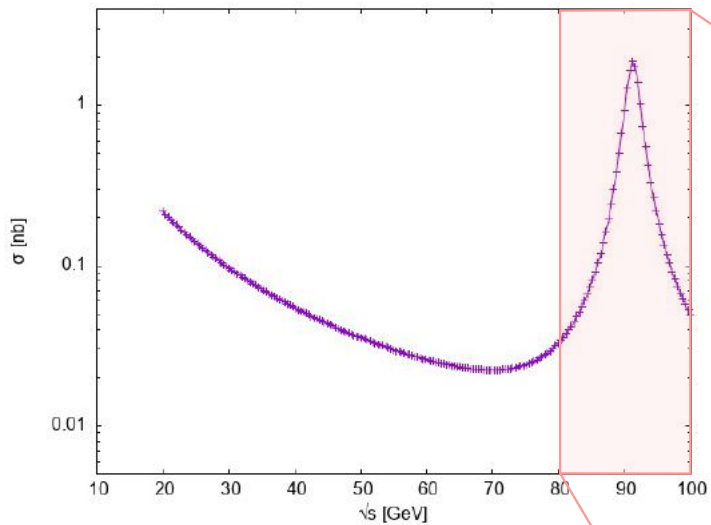
$$A_{FB} = \frac{\int_0^1 d\cos\theta \frac{d\sigma}{d\cos\theta} - \int_{-1}^0 d\cos\theta \frac{d\sigma}{d\cos\theta}}{\sigma} = \frac{\frac{\alpha^2 \pi}{2s} \{ 1 - (-1) \} G_2(s)}{\frac{\alpha^2 \pi}{2s} \frac{8}{3} G_1(s)} = \frac{3}{4} \frac{G_2(s)}{G_1(s)}$$

$$[\sigma] = \frac{1}{[A]} = \frac{1}{\text{GeV}^2} \rightsquigarrow \frac{1}{\text{GeV}^2} = 0.389 \dots \text{ mb} = 0.389 \dots \cdot 10^6 \text{ nb}$$

[org/epem]

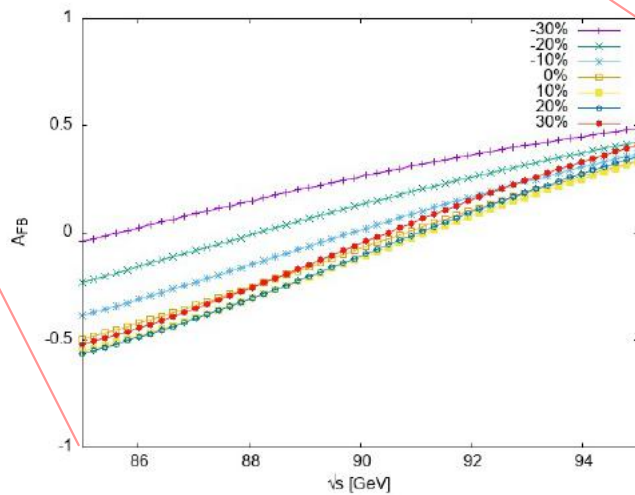
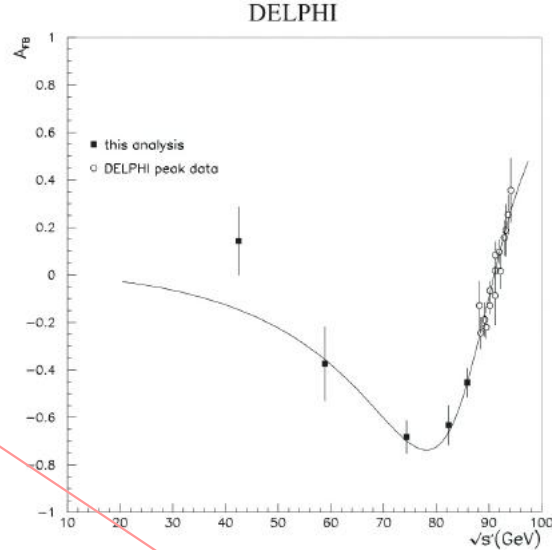
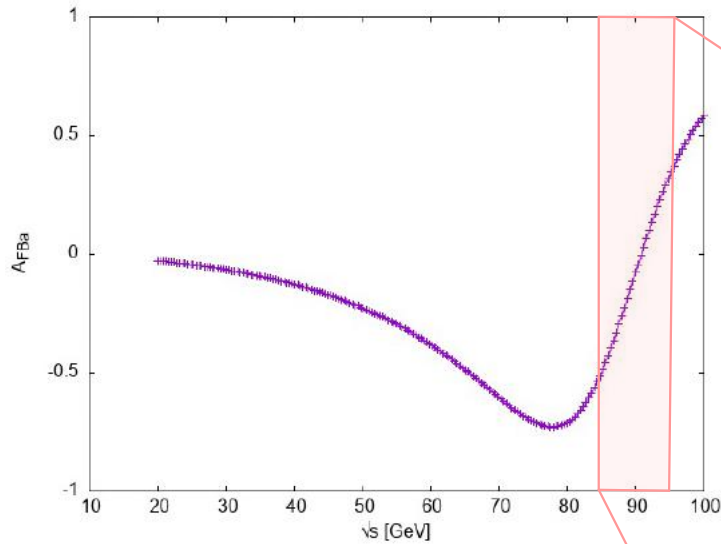
# Theorie vs. Daten

$\sigma$



$M_Z$   
Extraction

# Theorie vs. Daten AFB

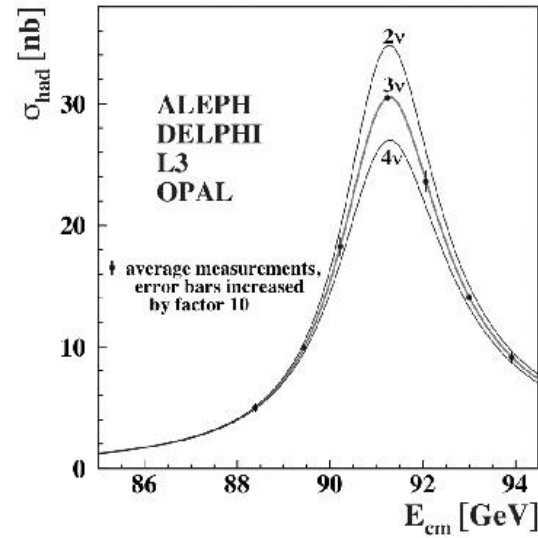
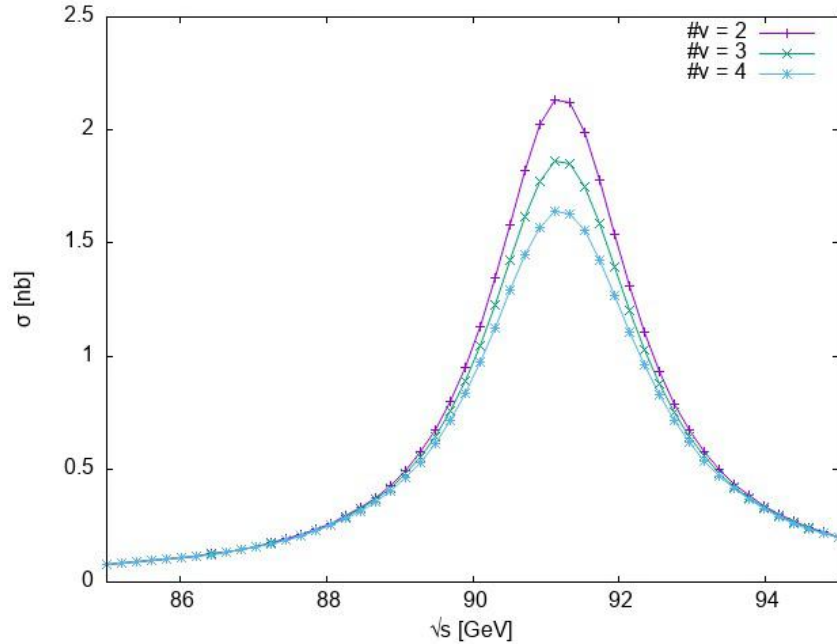


←  $\sin^2 \theta_w$   
Extraktion

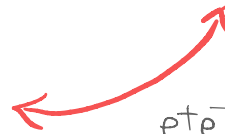
Test:  

$$\sin^2 \theta_w = 1 - \frac{M_w^2}{M_Z^2}$$

# Theorie vs. Daten $\sigma_{had}$



\* mit  $R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$  kann man  
auch  $\# \text{Farben} = N_c = 3$  testen



$$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$$

$$\rightsquigarrow e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$$

# Generationen = 3

(mit leichten Neutrinos)

# 5. Hadron Kollisionen: Das Parton Modell

Am LHC kollidieren wir Protonen ≠ elementar

⇒ hadronischer WQ = Summe über Streuung von Partonen (q & g)

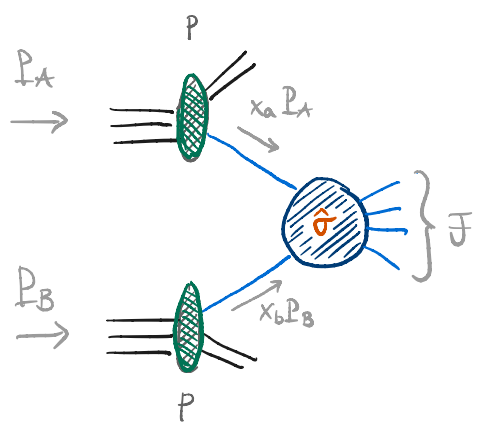
$$d\sigma_{A+B \rightarrow F+X}(P_A, P_B) = \sum_{a,b} \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b$$

Impuls Bruchteil

Partonverteilungsfunktion (PDF)

$$f_a(x_a) f_b(x_b) d\hat{\sigma}_{a+b \rightarrow F+X}(x_a P_A, x_b P_B)$$

≙ Anzahl Dichte für Parton a den Impulsbruchteil  $[x_a, x_a+dx_a]$  vom Proton zu tragen

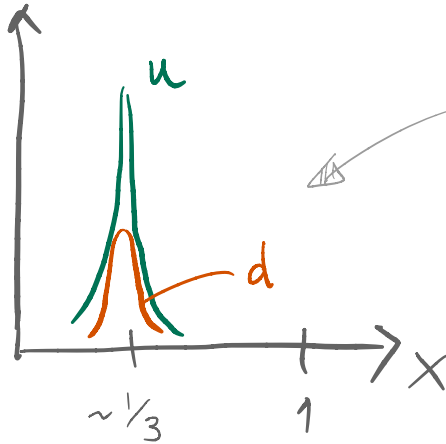


# Parton Distribution Functions

\* Freie Quarks? ( $p = uud$ )



$f_a(x)$



$$f_a(x) = \delta_{au} 2 \delta(x - \frac{1}{3}) + \delta_{ad} 1 \delta(x - \frac{1}{3})$$

+ Verschmierung

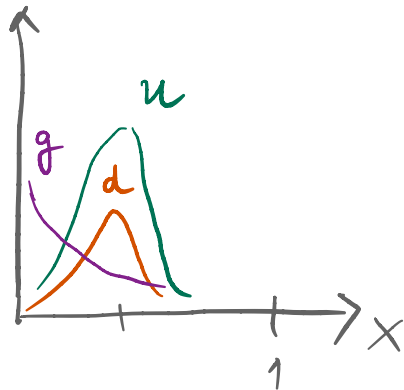
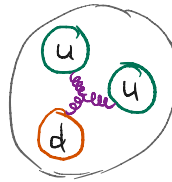


# Parton Distribution Functions

\* Freie Quarks? ( $p = uud$ )



\* Zusammengehalten mit Gluonen?



Das naive Parton Modell

↳ Komposition von Punktteilchen

↳ zoom in ( $Q^2 \uparrow$ )  $\leftrightarrow$  gleiche Komposition

"Scaling" (PDF unabhängig von der Skala / Längenauflösung so lange  $Q^2 \gg m_p$ )

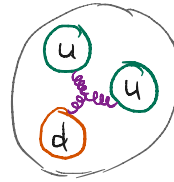
# Parton Distribution Functions

[org/pdf]

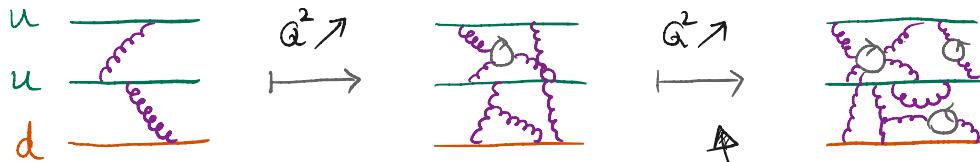
\* Freie Quarks? ( $p = uud$ )



\* Zusammengehalten mit Gluonen?



\* QCD



⇒ verschiebt Partonen von hohen  $x$  zu niedrigen  $x$

Vorhersage!  
↔ Tests

# Der Drell-Yan Prozess

[org / dy]

$$d\sigma_{DY} = \sum_{a,b} \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b f_a(x_a) f_b(x_b) d\hat{\sigma}_{ab \rightarrow e^+e^-} \quad (\text{only } (a,b) \in \{(q,\bar{q}), (\bar{q},q)\} @ LO)$$

\* Ausintegrieren des  $z \rightarrow l^+l^-$  Zerfalls

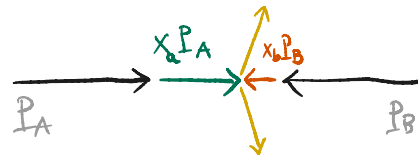
↳ betrachte Observablen des Eichbosons

$$q^2 = (p_1 + p_2)^2 = (p_a + p_b)^2$$

$$M_{ee} = \sqrt{q^2} \quad ; \quad Y_{ee} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{q^0 + q^3}{q^0 - q^3} \right)$$

↳ Rapidity:  $Y \rightarrow Y + \frac{1}{2} \ln(x_1/x_2)$

$$\Rightarrow \frac{d^2\sigma_{DY}}{dM_{ee} dY_{ee}} = f_a(x_a) f_b(x_b) \frac{2M_{ee}}{E_{cm}^2} \hat{\sigma}_{ab} \quad \left| \quad x_{a/b} = \frac{M_{ee}}{E_{cm}} e^{\pm Y_{ee}} \right.$$



# Der Drell-Yan Prozess

Wir haben gesehen, dass die führende Ordnung (LO) in der starken WW oft nicht ausreicht für Präzisionsphenomenologie

⇒ brauchen die nächste Ordnung ⇒ Diagramme mit Schleifen!

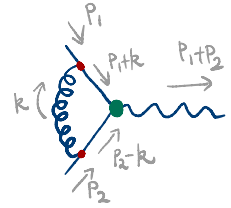
$$\begin{aligned}
 M_{2 \rightarrow 2} = & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \dots \\
 & \mathcal{O}(\alpha) M_{2 \rightarrow 2}^{(0)} + \mathcal{O}(\alpha \alpha_s) M_{2 \rightarrow 2}^{(1)} + \mathcal{O}(\alpha \alpha_s^2) M_{2 \rightarrow 2}^{(2)} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow |M_{2 \rightarrow 2}|^2 = & |M_{2 \rightarrow 2}^{(0)}|^2 + 2 \operatorname{Re} \{ (M_{2 \rightarrow 2}^{(0)})^* M_{2 \rightarrow 2}^{(1)} \} + \underbrace{|M_{2 \rightarrow 2}^{(1)}|^2 + 2 \operatorname{Re} \{ (M_{2 \rightarrow 2}^{(0)})^* M_{2 \rightarrow 2}^{(2)} \}}_{\dots} + \dots \\
 & \mathcal{O}(\alpha^2) \qquad \qquad \mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s) \qquad \qquad \mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^2)
 \end{aligned}$$

"virtuell"

# Divergenzen in Schleifendiagrammen

QM  $\longleftrightarrow$  summation über alle möglichen Konfigurationen  
 $\Rightarrow$  integration über den Schleifenimpuls  $\rightsquigarrow \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$



① ultraviolett (UV)  $\rightsquigarrow$   $k$  groß  $\Rightarrow$  Renormierung  $\alpha_s(\mu_R)$

② infrarot (IR)  $\rightsquigarrow$   $k$  klein oder kollinear  $\Rightarrow$  brauchen reelle Emission & PDF Renormierung

$$M_{2 \rightarrow 3} = \underbrace{\text{[diagram 1]} + \text{[diagram 2]} + \dots}_{\mathcal{O}(\alpha_s) M_{2 \rightarrow 3}^{(0)}}$$

The diagrams show a tree-level process with a loop correction. The first diagram has a gluon loop, and the second has a ghost loop. The loop momentum is  $k$ .

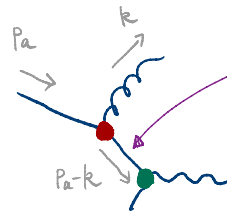
$$|M_{2 \rightarrow 3}|^2 = |M_{2 \rightarrow 3}^{(0)}|^2 + \dots$$

$\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  "reell"

$\longleftarrow$  streng genommen, ein anderer Prozess; kann aber entartet sein

# Kürzung von Divergenzen\*

Betrachte Sub-Diagramm:



Propagator

$$\frac{1}{(p_a - k)^2} = \frac{1}{E_a E (1 - \cos \theta)}$$

⇒ potentielle Divergenz

(a) gluon "soft":  $E \rightarrow 0$

(b) gluon kollinear:  $\vec{k} \parallel \vec{p}_a$

(a) "virtuelle" Korrekturen

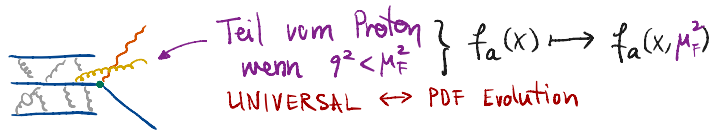
$$\hat{\sigma}_{\text{Lo}}(p_a, p_b) \cdot \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{(4\pi)^\epsilon}{\Gamma(1-\epsilon)} \times \left\{ \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{\epsilon} + \text{finite} \right\}$$

(b) "reelle" Korrekturen

$$\hat{\sigma}_{\text{Lo}}(p_a, p_b) \cdot \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{(4\pi)^\epsilon}{\Gamma(1-\epsilon)} \times \left\{ -\frac{1}{\epsilon^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{\epsilon} + \text{finite} \right\}$$

$$+ \int_0^1 dz_a \hat{\sigma}_{\text{Lo}}(z_a, p_a, p_b) \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \frac{(4\pi)^\epsilon}{\Gamma(1-\epsilon)} \times \left\{ -\frac{1}{\epsilon} - \ln\left(\frac{\mu_F^2}{Q^2}\right) \right\} P_{qq}(z_a) + \begin{pmatrix} z_a \leftrightarrow z_b \\ q_{\text{in}} \rightarrow \bar{q}_{\text{in}} \end{pmatrix}$$

absorbiert in "NLO" PDF

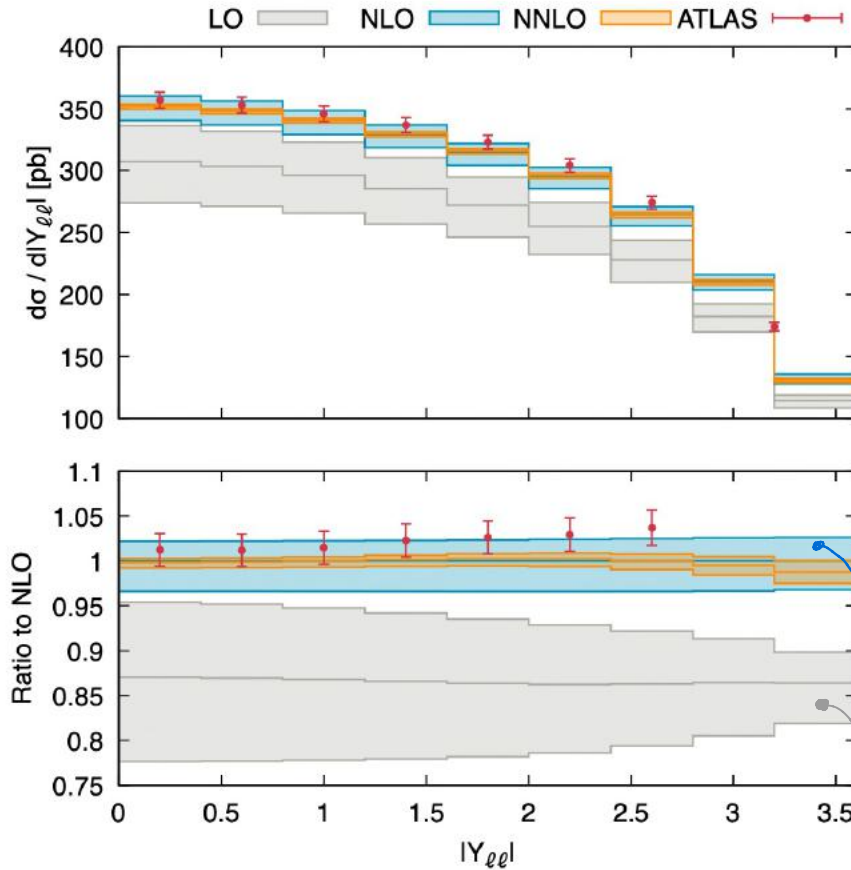


Teil vom Proton  
wenn  $q^2 < M_F^2$  }  $f_a(x) \mapsto f_a(x, M_F^2)$

UNIVERSAL ↔ PDF Evolution

\* Integration in  $D=4-2\epsilon$  Dimensionen

# Der Drell-Yan Prozess zu höheren Ordnungen



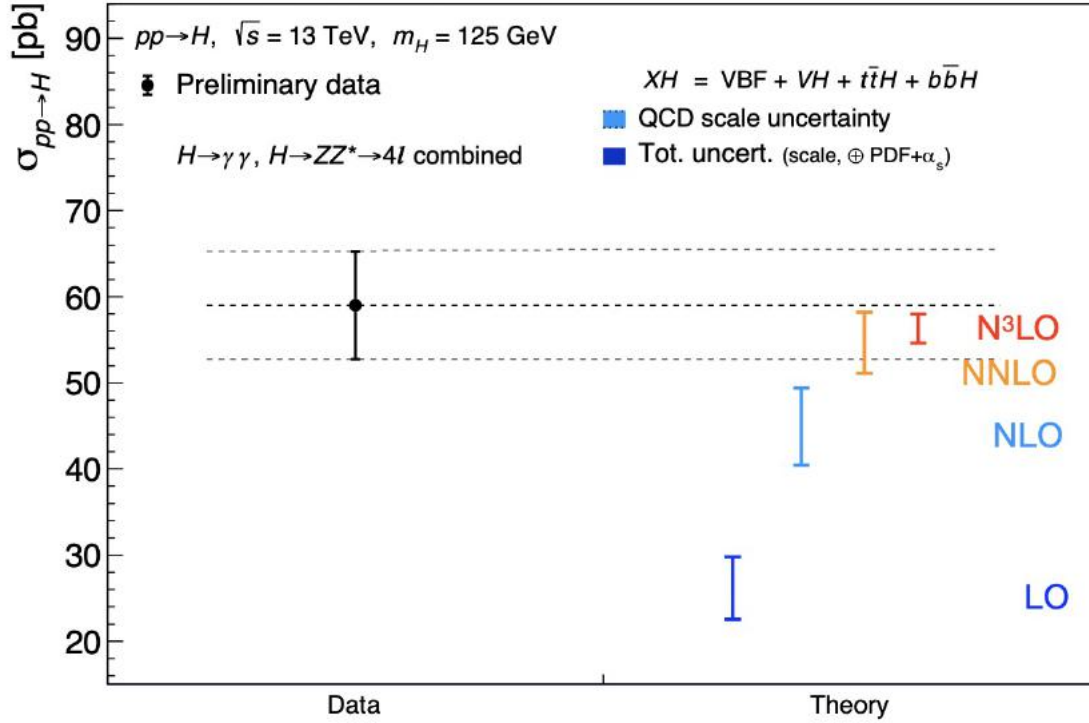
Theorie Unsicherheiten

↪ Abschätzung von Termen der nächsten Ordnung durch Variation von unphysikalischen Skalen ( $\mu_R, \mu_F$ )

auf Website

führende Ordnung

# Was wir heute vorhersagen können



\* LO

in Prinzip, jeder Prozess

\* NLO

meisten Prozesse

(up to 2 → 8)

\* NNLO

2 → 2 fertig,

einige 2 → 3

\* N<sup>3</sup>LO

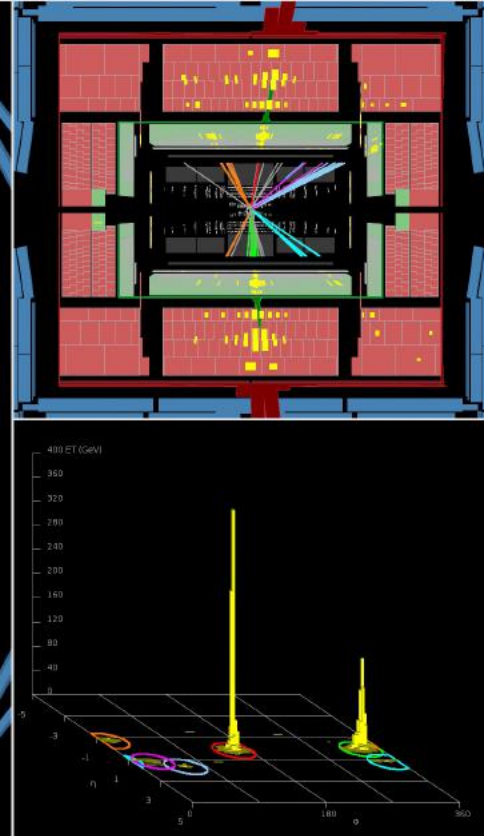
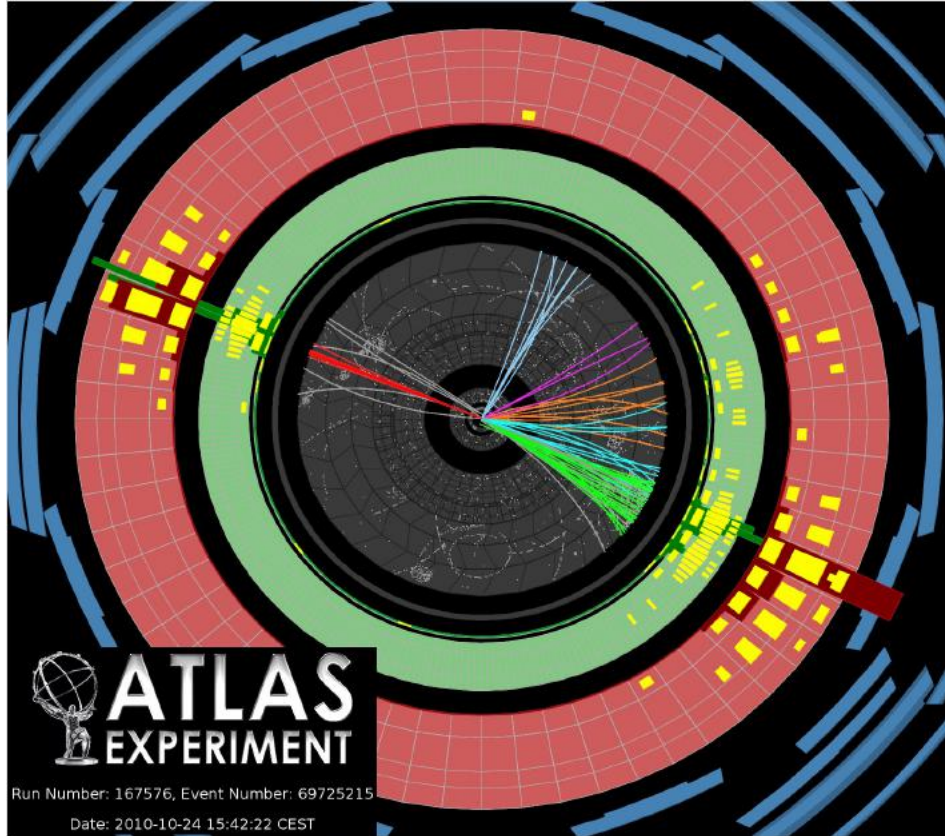
2 → 1



~ 1M CPU core hours



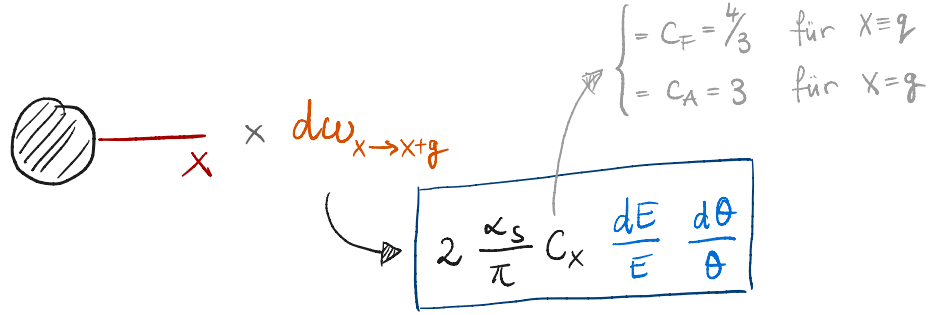
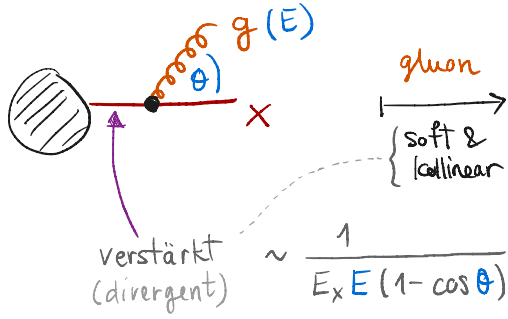
# 6. Ereignisse am LHC sind viel komplizierter



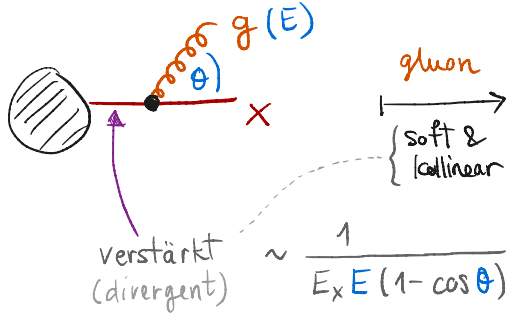
Wieso? Sind unsere bisherigen Techniken anwendbar?

[org/diags]

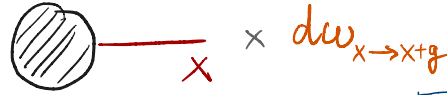
# QCD Emissionen



# QCD Emissionen



gluon  
 { soft & collinear

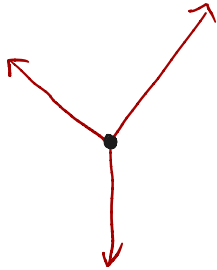


$$\begin{cases} = C_F = \frac{4}{3} & \text{für } X=q \\ = C_A = 3 & \text{für } X=g \end{cases}$$

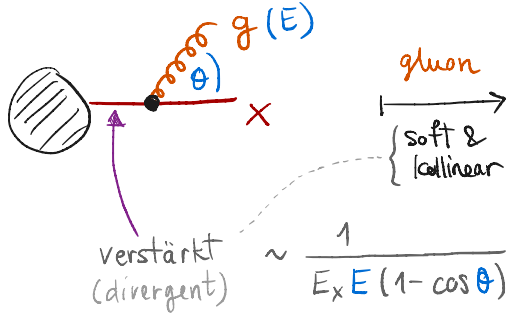
$$2 \frac{\alpha_s}{\pi} C_X \frac{dE}{E} \frac{d\theta}{\theta}$$

$\Rightarrow$  "Jets" sind eine Konsequenz der starken Wechselwirkung

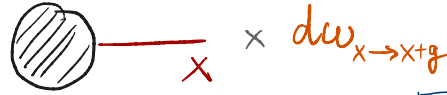
- ① hoch-energetische Partonen
- $\leftrightarrow$  "harte" Streuung



# QCD Emissionen



gluon  
 soft & collinear

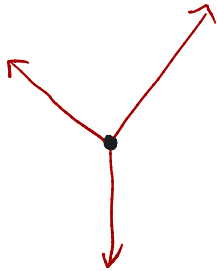


$$2 \frac{\alpha_s}{\pi} C_X \frac{dE}{E} \frac{d\theta}{\theta}$$

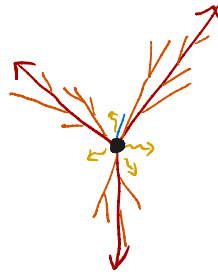
$= C_F = \frac{4}{3}$  für  $X=q$   
 $= C_A = 3$  für  $X=g$

⇒ "Jets" sind eine Konsequenz der starken Wechselwirkung

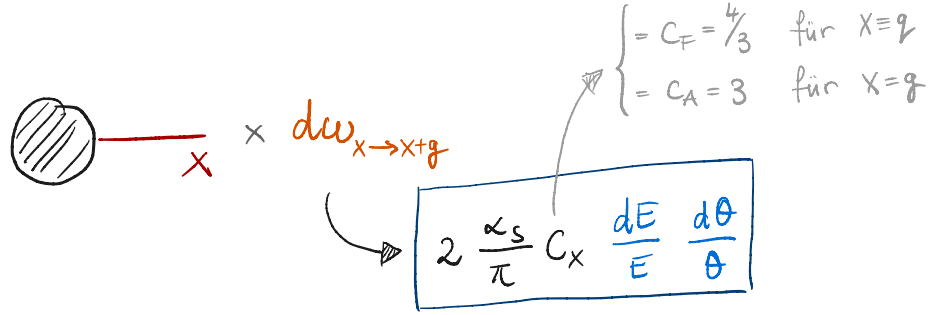
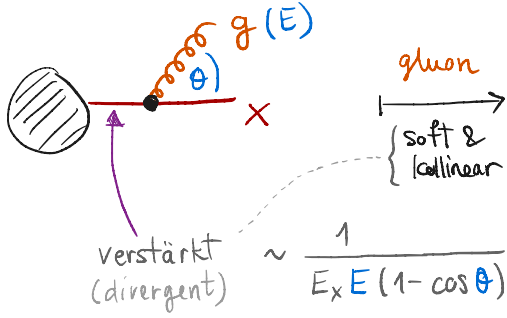
① hoch-energetische Partonen  
 ⇨ "harte" Streuung



② Asymptotische Freiheit & dew  
 ⇨ "parton shower"

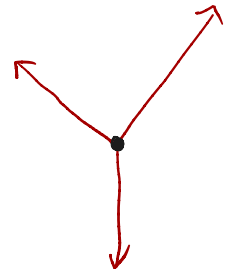


# QCD Emissionen

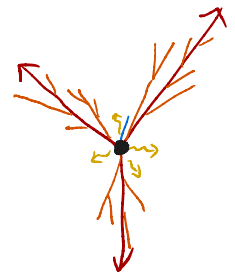


⇒ "Jets" sind eine Konsequenz der starken Wechselwirkung

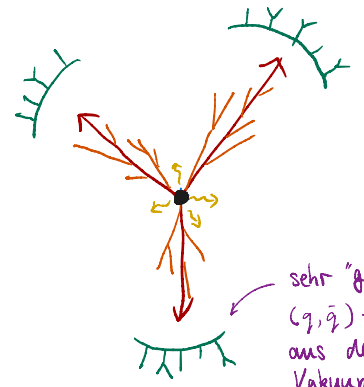
① hoch-energetische Partonen  
 ↳ "harte" Streuung



② Asymptotische Freiheit &  $d\omega$   
 ↳ "parton shower"

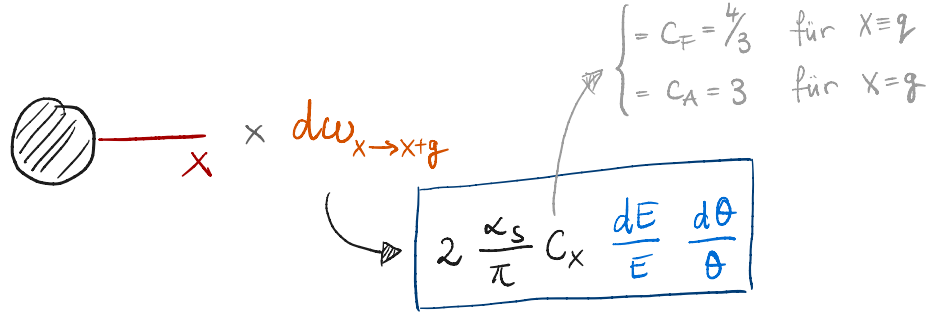
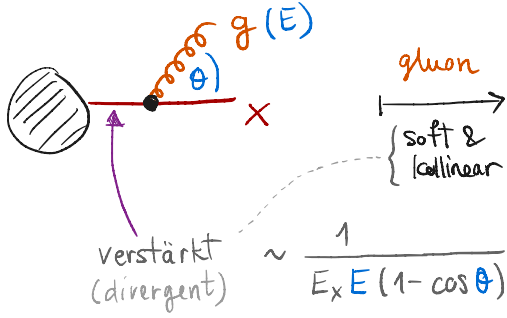


③ Hadronisierung



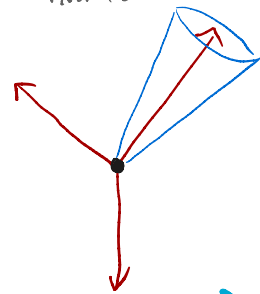
sehr "günstig":  
 $(q, \bar{q})$ -Paar  
 aus dem  
 Vakuum  
 $m_{u,d} \ll \Lambda_{QCD}$

# QCD Emissionen



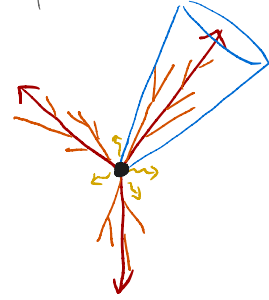
⇒ "Jets" sind eine Konsequenz der starken Wechselwirkung

① hoch-energetische Partonen  
 ↳ "harte" Streuung

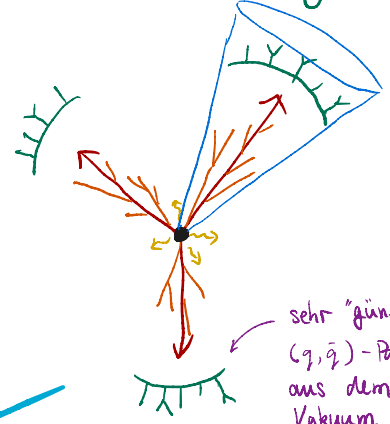


"Jets" rekonstruieren die zugrundeliegenden hoch-energetischen Objekte  
 ↳ Präzision

② Asymptotische Freiheit &  $dw$   
 ↳ "parton shower"

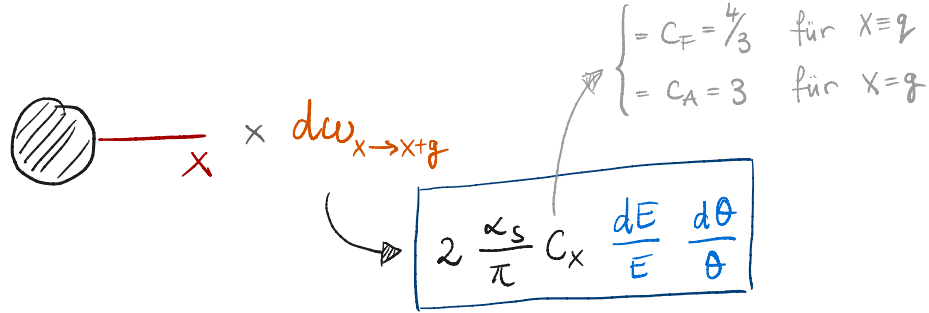
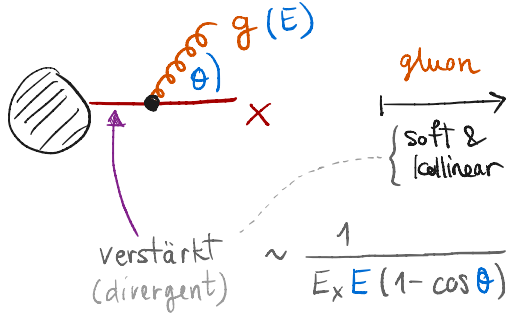


③ Hadronisierung



sehr "günstig":  
 $(q, \bar{q})$ -Paar  
 aus dem Vakuum  
 $m_{u,d} \ll \Lambda_{QCD}$

# QCD Emissionen



⇒ Emissionen faktorisieren!

Integral über  $E$  &  $\theta$  divergent  $\rightsquigarrow$  führe Skala ein  $q^2 > Q_0^2$   
 $\leftrightarrow$  Emission "aufgelöst"

$$\Rightarrow P_X \approx \frac{\alpha_s C_X}{2\pi} \ln^2\left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right) + \mathcal{O}(\alpha_s \ln Q^2, \alpha_s^2)$$

WSK ein aufgelöstes  
Gluon zu emittieren

potentiell sehr großer Logarithmus

$$\left. \begin{matrix} Q_0 = 1_{\text{QCD}} = 0.2 \text{ GeV} \\ Q = 100 \text{ GeV} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \ln^2(\dots) = \mathcal{O}(10)$$

→ sollten zu allen  
Ordnungen  
resummiert  
werden

# Parton Shower

- \* Wollen eine beliebige Anzahl von Emissionen simulieren  
geordnet in der Auflösungsvariable  $Q^2 > q_1^2 > q_2^2 > \dots \rightarrow Q_0^2$  (starke Ordnung)
- \* aktuelle Skala  $q_n^2 \rightsquigarrow$  WSK für nächste Emission bei  $q_{n+1}^2$ ?

$$\longleftrightarrow \left( \text{WSK für keine Emission} \right) \times \left( \text{Emission} \right)$$

*zwischen  $q_n^2 \rightarrow q_{n+1}^2$*       *@  $q_{n+1}^2$*

Sudakov form factor

$$\Delta(q_n^2, q_{n+1}^2)$$

$$\leftrightarrow \frac{d\Delta(Q^2, q^2)}{dq^2} = \Delta(Q^2, q^2) \frac{d\omega}{dq^2}$$

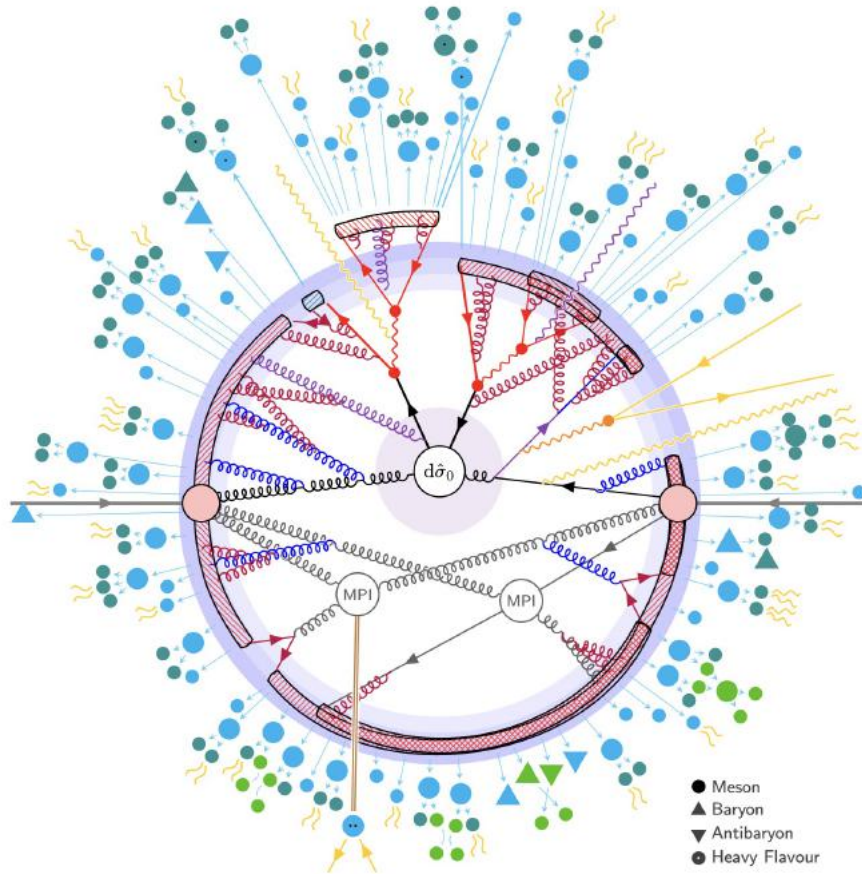
$$\left. \frac{d\omega_{x \rightarrow x+g}}{dq^2} \right|_{q^2=q_{n+1}^2}$$

$$\left( \Delta(Q^2, q^2 - dq^2) = \Delta(Q^2, q^2) \underbrace{\Delta(q^2, q^2 - dq^2)}_{\left(1 - \frac{d\omega}{dq^2}\right)} \right)$$

[orig/ps]



# Komplette Ereignis Simulation



- Hard Interaction
  - Resonance Decays
  - MECs, Matching & Merging
  - FSR
  - ISR\*
  - QED
  - Weak Showers
  - Hard Onium
  - Multiparton Interactions
  - Beam Remnants\*
  - Strings
  - Ministrings / Clusters
  - Colour Reconnections
  - String Interactions
  - Bose-Einstein & Fermi-Dirac
  - Primary Hadrons
  - Secondary Hadrons
  - Hadronic Reinteractions
- (\*: incoming lines are crossed)
- Meson
  - ▲ Baryon
  - ▼ Antibaryon
  - Heavy Flavour