Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften, Fachrichtung Physik

Die Theorie hinter dem Standardmodell: Symmetrien & Lagrangedichten

Michael Kobel
Technische Universität Dresden

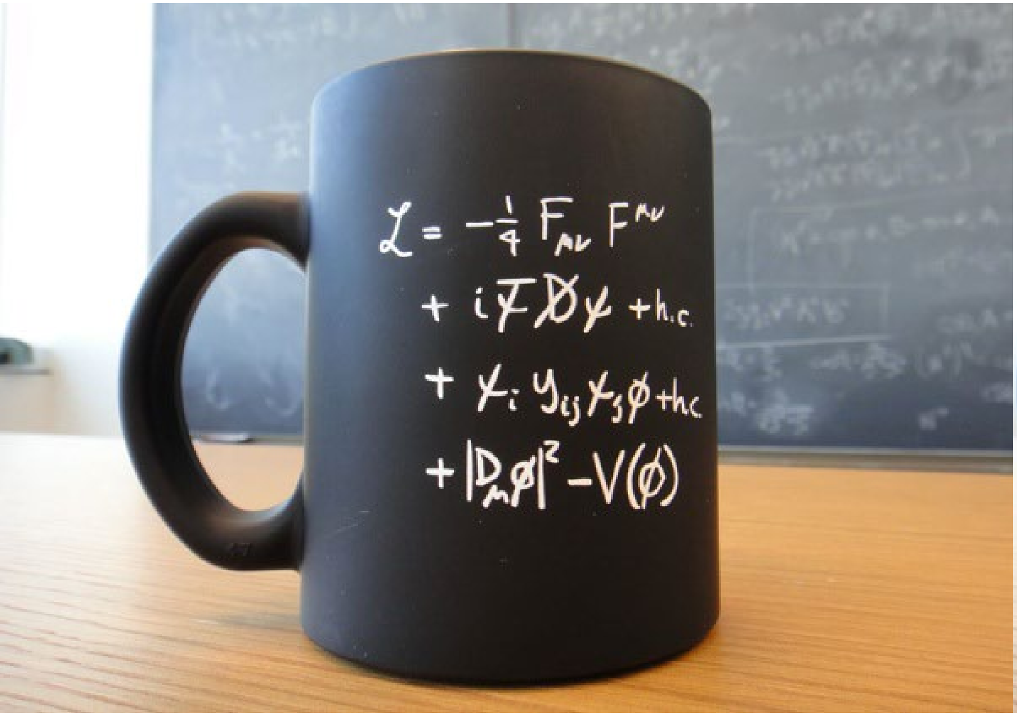
Netzwerk Teilchenwelt Summer School
CERN 1.08.2023

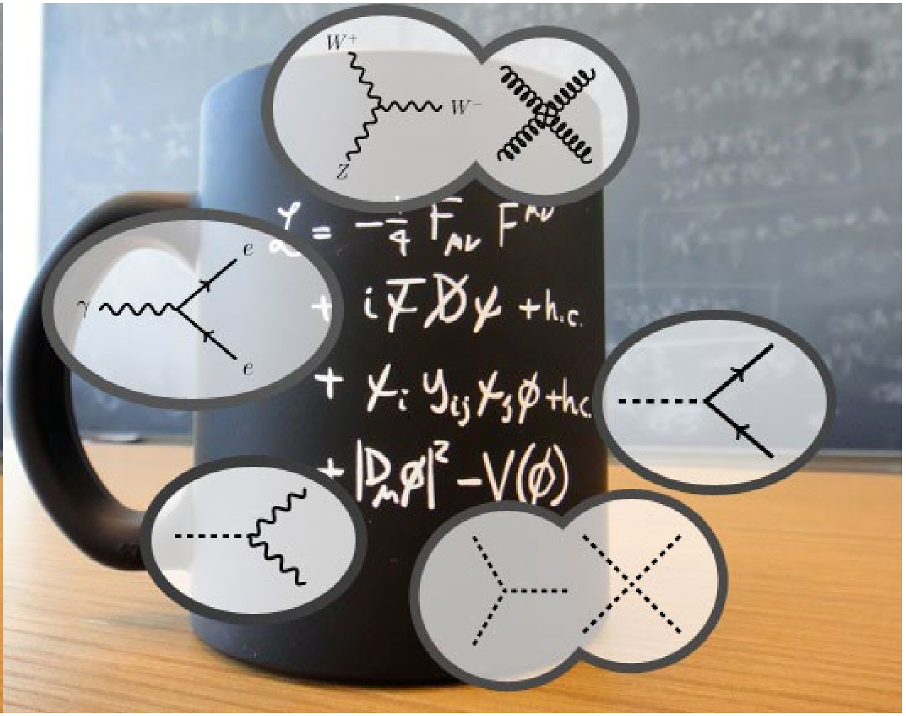
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Ziel: Herkunft und Bedeutung dieser Formel

DR. HANS RIEGEL-STIFTUNG

http://www.quantumdiaries.org/2011/06/26/cern-mug-summarizes-standard-model-but-is-off-by-a-factor-of-2/





Lesenswert dazu: http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6552/aa5b25 (englisch)
https://cds.cern.ch/record/2244912/files/CERN-OPEN-2017-012.pdf (deutsch)

HEFT 1 / 66. JAHRGANG / 2017 ELEMENTARTEILCHENPHYSIK / PdN PHYSIK in der Schule

Links auch in Indico Agenda!

Der Lagrangian entmystifiziert

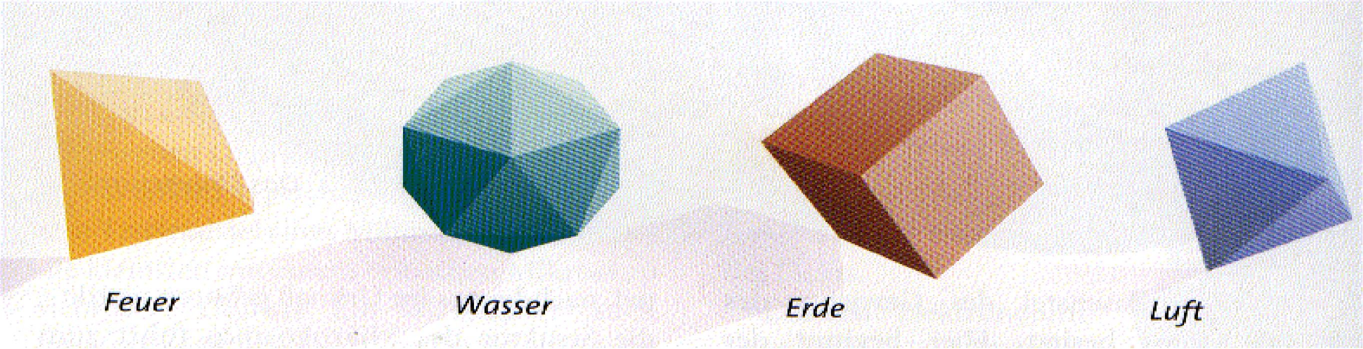
Kaffeeklatsch mit dem Standardmodell der Teilchenphysik

J. Woithe u. G. Wiener

1. **THEORIEN FRÜHER UND HEUTE**
2. Lagrangefunktion in klassischer Mechanik
3. Lagrangedichte der Teilchenphysik
4. Symmetrien
5. Vorhersagen und Bedeutung

“Standardmodell“ der griechischen Philosophie vor 2500 Jahren

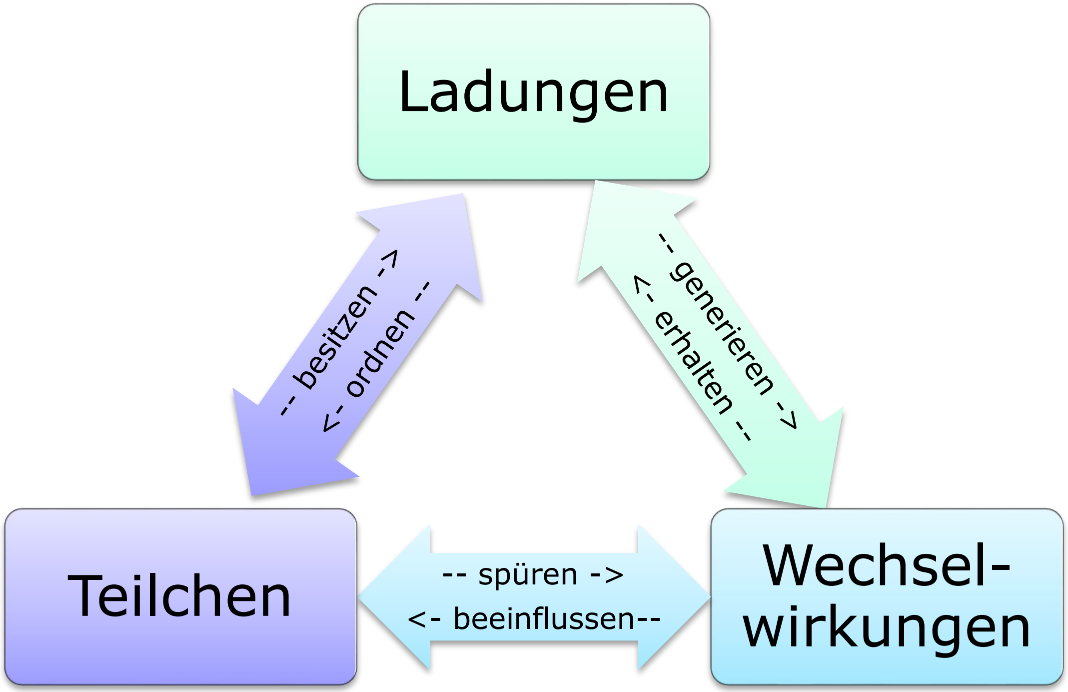
- **Elemente und Kräfte:** 500-430 v.Chr. Empedokles
  - **Vier Elemente:** Feuer, Wasser, Erde, Luft
  - **Zwei Urkräfte:** Liebe , Haß ⇔ Mischung , Trennung
- **Symmetrien:** 427-347 v.Chr. Platon
  - **Räumliche Symmetrien:** Schönheit der Körper



- **Kleinste Bausteine:** 460-371 v.Chr. Demokrit
  - **Atome:** verschiedene Formen und Gewichte
  - **Leere:** Verbindung und Bewegung im Nichts

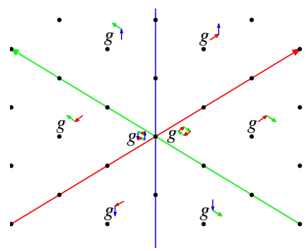
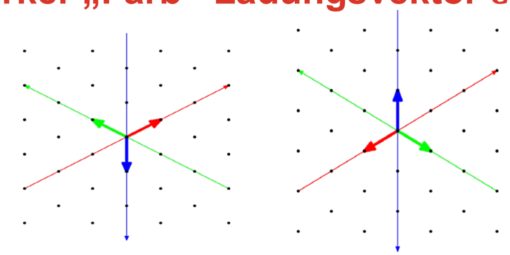
Vergleich mit heute

- **Urkräfte** (heute: enthalten in Wechselwirkungen (WW))
- **Kleinste Bausteine** (heute: unteilbare Elementarteilchen)
- **Räumliche Symmetrien** (heute: Ladungssymmetrien)
- Neu: verbindendes Konzept: **Ladungen für jede WW**
  - → Ladungen sind *das* Grundkonzept des Standardmodells (SM) !



Wechselwirkung – Boten - Ladungen

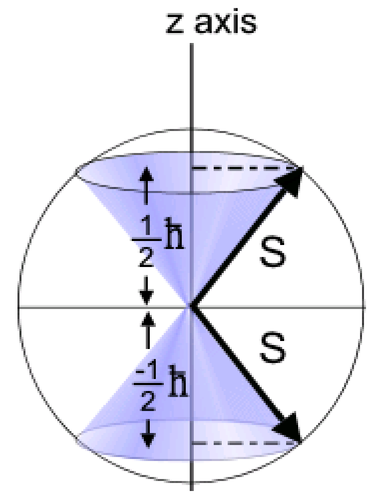
- Unterschiedliche mathematische Struktur der 3 Ladungen:
  - Starke`Farb´ladung, schwache `Isospin´ladung, elektrische Ladung

Wechsel-wirkung	Botenteilchen	Ladung der Materieteilchen
Starke	Gluonen g 	Starker „Farb"-Ladungsvektor $\vec{C}$ 
Schwache	„Weakonen" (W^+, W^-, Z) $\begin{pmatrix} W^+ \\ Z \\ W^- \end{pmatrix} \begin{matrix} I=+1 & Z=+1 \\ I=0 & Z=0 \\ I=-1 & Z=-1 \end{matrix}$	Schwache „Isospin"–Ladungszahl I $\begin{pmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{d} \end{pmatrix} \begin{matrix} I=+\frac{1}{2} & Z=+\frac{2}{3} \\ I=-\frac{1}{2} & Z=-\frac{1}{3} \end{matrix}$
Elektro-magnetische	Photonen γ $Z = 0$	Elektrische Ladungszahl Z $Z = -1, +\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \dots$
Gravitation	Gravitonen ? Wahrscheinlich!	Masse ??? Nein!

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Warum der Name „schwache Isospin-Ladung“?

DR. HANS RIEGEL-STIFTUNG



http://de.wikipedia.org/wiki/Stern-Gerlach-Versuch

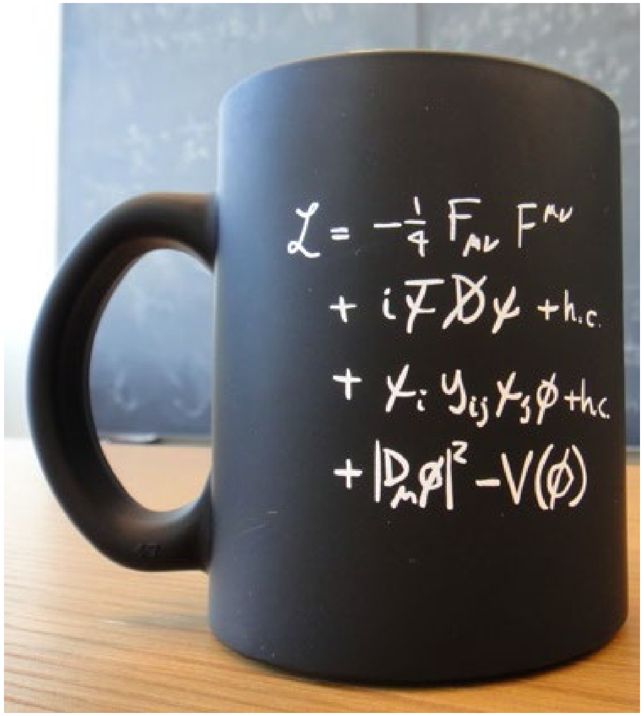
- Zugrundeliegende Symmetrie genau dieselbe wie bei Spin
- Vektor mit 3 Komponenten
  - Spin **S** = (S_x, S_y, S_z) im Ortsraum
  - Schwacher Isospin $\mathbf{I^W}$ = (I_1^W, I_2^W, I_3^W) im abstrakten schwachen Isospinraum
- Messbar nur:
  - Gesamter Betrag
  - eine Komponente (meist gewählt: die 3.)
  - sie beiden anderen sind „unscharf“
  - Relevant daher besonders schwache Ladungszahl I:= I_3^W
- Darstellung der Teilchen in Multipletts

$$\begin{array}{c} I_3^W \\ \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array} : \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} I_3^W \\ \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} : \begin{pmatrix} W^+ \\ Z^0 \\ W^- \end{pmatrix}$$

1. Theorien früher und heute
2. **LAGRANGEFUNKTION IN KLASSISCHER MECHANIK**
3. Lagrangedichte der Teilchenphysik
4. Symmetrien
5. Vorhersagen und Bedeutung

❖ Hintergrund der heutigen „Weltformel" der Teilchenphysik



!

Die „Weltformel" der klassischen Mechanik

$$L = T - V$$

- *L:* Langrange Funktion
  (Joseph L. Lagrange, 1736-1814, Mathematiker)
- *T:* Bewegungsenergie
- *V:* Potentielle Energie (z.B. Lageenergie)
- Vorgehen:
  - Finde T und V für das gegebene Problem
  - Anwenden von Mathematik
  - Erhalte Bewegungsgleichungen und Bewegungen

Prinzip der minimalen Wirkung

- Grundprinzip von Maureau de Maupertuis (1750)
  (Prinzip der minimalen Wirkung $S = \int_A^B L\,dt$)
  https://de.wikipedia.org/wiki/Pierre-Louis_Moreau_de_Maupertuis
  https://de.wikipedia.org/wiki/Hamiltonsches_Prinzip

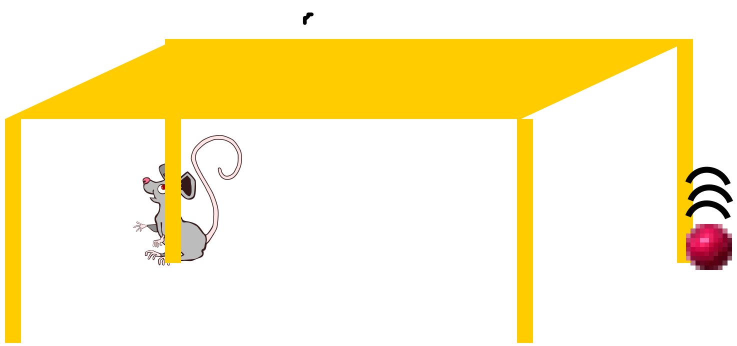
Vereinfacht gesagt:

Jede Bewegung von A nach B erfolgt so, dass der Mittelwert von L=T-V so klein (negativ) wie möglich ist

- Handwerkszeug: Mathematik von 1744
  (Euler, Lagrange: Variationsrechnung)

Qualitatives Beispiel: Freier Fall

T = 0, V groß
⇒ T-V sehr negativ
GUT !



T groß, V =0
⇒ T-V sehr positiv
SCHLECHT!

Mittelwert:
minimales T-V⇒
oben lange (langsam)
unten kurz (schnell)

Was leistet der Lagrange-Formalismus in der klassischen Mechanik?

- Wenn kinetische Energie T und potenzielle Energie V bekannt sind:
  - Bilde L=T-V
  - Definiere die „Wirkung“ $S = \int_{t_A}^{t_E} L(x(t), v(t))\, dt$
  - Suche $x(t)$ und $v(t) = \frac{d}{dt} x(t)$
    so dass Wirkung S minimal (= möglichst negativ) wird
    (Bemerkung: S minimal, wenn zeitlicher Mittelwert von L minimal)
  - Methode: Variationsrechnung (variiere x(t) solange, bis es passt)
    → erhalte so Bahn und die Bahngeschwindigkeit
  - Ergibt **immer** die Euler-Lagrange Gleichungen der klass. Mechanik (Uni-Studium Physik, 2. Semester)

$$\frac{dL}{dx} - \frac{d}{dt}\frac{dL}{dv} = 0$$

  - → Newtonsche Bewegungsgleichung → deren Lösung ergibt Bahn x(t)
  - Beispiel: freier Fall

Beispiel: freier Fall

$V = mgx$

$T = \frac{1}{2}mv^2$

Jede Bewegung erfolgt so,
dass das Zeitintegral über L=T-V („Wirkung“)
so klein wie möglich ist

$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - mgx$

nutze: Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{dv} = \frac{dL}{dx}$$

$$\frac{d}{dt}mv = -mg$$

$$ma = -mg$$

erhalte: Newtonsche Bewegungsgleichung

Lagrangefunktion -> Lagrangedichte $\mathcal{L}$

- Vergleich: **klassisch** $\leftrightarrow$ **Quantenfeldtheorie**

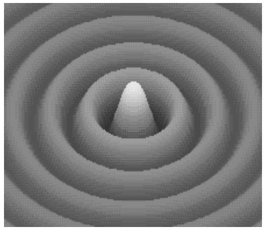
klassisch		Quantenfeldtheorie
$x(t)$ Bahn		$\psi(x,t)$ im Raum
$[L]$ = Energie		$[\mathcal{L}] = \frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}}$
$L = T - V$		$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$ jew. Dichte
$\dot{x} = \frac{d}{dt}x$ $L = L(x, \dot{x})$		$\mathcal{L}(\psi(x,t), \partial_\mu \psi(x,t))$ mit $\partial_\mu = (\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, $\frac{\partial}{\partial t}$: $\times\frac{1}{c}$
d/dx	$\longleftrightarrow$	$d/d\psi$
$d/d\dot{x}$	$\longleftrightarrow$	$d/d(\partial_\mu\psi)$
d/dt	$\longleftrightarrow$	∂_μ

$$\frac{dL}{dx} - \frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{x}} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \underbrace{\left| \frac{d\mathcal{L}}{d\psi} - \partial_\mu \frac{d\mathcal{L}}{d(\partial_\mu\psi)} = 0 \right|}$$

für alle vorkommenden Koordinaten

für alle vorkommenden Felder

Lagrangedichte der Teilchenphysik



❖ Quantenmechanik verlangt Ersetzungen:

- Keine Bahnen mehr: x(t) → Wellenfunktionen ψ(t,x,y,z)
- Zeitliche **und** örtliche Variationen: $\frac{d}{dt} \rightarrow \partial_\mu := (\frac{1}{c}\frac{d}{dt}, \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz})$
- Ersetze Zeitableitung $v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ → Raum+Zeitableitung $\partial_\mu\, \psi(t,x,y,z)$

❖ Lagrangefunktion L (Energie) → Lagrangedichte $\mathcal{L}$ (Energiedichte)

- Statt $S = \int_{t_A}^{t_E} L(x(t), v(t))dt$ → Wirkung $S = \int\iiint_{x,y,z,t} \mathcal{L}(\psi(t,x,y,z),\, \partial_\mu \psi(t,x,y,z))dx\,dy\,dz\,dt$
- Lagrangedichte wird weiterhin gebildet als $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$
- Aber: $\mathcal{T}$: kin. Energiedichte, $\mathcal{V}$: potenzielle Energiedichte
  sind nur für freie Teilchen (ohne WW) aus Quantenfeldtheorie bekannt
- *Die* theoretische Herausforderung: finde allgemein generelles $\mathcal{L} = \mathcal{T}\text{-}\mathcal{V}$

freie Baustein-Teilchen ohne Wechselwirkung

$\mathcal{V} = \mathrm{mc}^2\bar{\psi}\psi$

$\mathcal{T} = \mathrm{i}\hbar\mathrm{c}\ \bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi$

Euler-Lagrange Variationsrechnung:

Jede Bewegung erfolgt so,
dass das Raum-Zeitintegral über $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$
so klein wie möglich ist

(Uni-Studium Physik, 6. Semester)

https://de.wikipedia.org/wiki/Dirac-Matrizen

Dirac Gleichung

$$(\mathrm{i}\hbar\ \gamma^{\mu}\partial_{\mu} - \mathrm{mc})\psi = 0$$

(entspricht dem Newtonschen F=ma)

Einschub: 4er Vektoren und Produkte

klassisch | **relativistisch**

μ: 0 1 2 3

$$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = (p_1, p_2, p_3)$$

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) \qquad E = E_0 + E_{kin}$$

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -p_x, -p_y, -p_z\right)$$

Metrik in (Skalarprodukt) 3D | 4D

$$\vec{p}^{\,2} = \vec{p} \cdot \vec{p} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

Kurz-Schreibweise
↓ Summe über gleiche Indices

$$p^2 = \sum_\mu p^\mu p_\mu = p^\mu p_\mu$$

$$= \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$$

$$= \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^{\,2}$$

Von klassischer Mechanik zu QM und QFT

Für freie Teilchen durch Wohl

- Ersetzung der klassischen Größen durch Operatoren

nicht-relativistisch ↔ **relativistisch**

$$\frac{p^2}{2m} = E$$

$$p^\mu p_\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2 = m^2c^2$$

klass → QM

$$\vec{p} \to -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = -i\hbar \vec{\nabla}$$

$$E \to +i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

klass → QFT

$$p_\mu \to i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} =: i\hbar \partial_\mu$$

$$p^\mu \to i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} =: i\hbar \partial^\mu$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi}$$

SCHRÖDINGER GL.

$$\boxed{-\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu \psi = m^2c^2 \psi}$$

KLEIN-GORDON f. BOSONEN

DIRAC 1928: PROBLEM wegen 2. zeitlicher Ableitung
Lösungen mit negativer Aufenthaltswahrscheinlichkeit
→ Ausweg: Linearisierung durch Faktorisierung

❖ Linearisierung durch Faktorisierung der rel. Gleichung $p_\mu p^\mu = m^2c^2$

über Ansatz mit Hilfsgrößen γ so dass die Metrik stimmt $p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$

$$(\gamma^\kappa p_\kappa - mc)(\gamma^\lambda p_\lambda + mc) = 0$$

und $\gamma^\kappa p_\kappa \gamma^\lambda p_\lambda \overset{!}{=} p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$

$\kappa = \lambda$: $(\gamma^0)^2 = 1 \quad (\gamma^1)^2 = -1 \quad (\gamma^2)^2 = -1 \quad (\gamma^3)^2 = -1$

$\kappa \neq \lambda$ $\quad \gamma^\kappa \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^\kappa = 0 \iff \boxed{\gamma^\kappa \gamma^\lambda = -\gamma^\lambda \gamma^\kappa}$

→ Lösung: hyperkomplexe Zahlen, dargestellt als Matrizen

Es gibt verschiedene Darstellungen
- DIRAC
- WEYL
- MAJORANA

in jedem Fall (mind.) 4x4 Matrizen – ....

Die Diracschen Gamma-Matrizen

- Verschiedene 4x4 „Darstellungen" möglich. Hier Dirac-Darstellung:

Abkürzungen: $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\underbrace{\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Pauli-Matrizen}}$

$$\boxed{\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} ; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

VORSICHT: γ^μ ist kein 4er Vektor im phys. Sinn weil sie allen Bezugssystemen gleich sind man kann also Vierervektoren konstruieren wie die Teilchen-Stromdichte $j^\mu = (\rho c, \vec{j})$

$$j^\mu = \tilde{\psi} \gamma^\mu \psi \quad \text{ist Vier-Vektor}$$

mit adjungierter Wellenfunkt. $\boxed{\tilde{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0}$

weil dann $j^0 = \tilde{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_{1} \psi = \psi^\dagger \psi = |\psi|^2$

! Da γ^μ 4x4 Matrizen sind hat ψ auch 4 Komponenten

→ Interpretation?

Die Dirac-Gleichung in Komponenten

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = (\gamma^\kappa p_\kappa - mc)(\gamma^\lambda p_\lambda + mc) = 0$$

$$= 0 \quad \text{oder} \quad = 0$$

klass. → QFT

$p_\mu \to i\hbar\partial_\mu$

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0 \quad \text{oder} \quad (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + mc)\psi = 0$$

DIRAC Gleichung(en)

in Komponenten:

$$i\hbar\frac{\partial}{c\partial t}\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\\ \psi_C\\ \psi_D\end{pmatrix} + i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\\ \psi_C\\ \psi_D\end{pmatrix} + i\hbar\frac{\partial}{\partial y}(\ )(\ ) + i\hbar\frac{\partial}{\partial z}(\ )(\ ) - mc(\ ) = 0$$

$\uparrow \partial_0$ $\quad \uparrow \gamma^0$ $\quad \uparrow \partial_1$ $\quad \uparrow \gamma^1$

Jedes Fermion hat 4 verschiedene Lösungen!

❖ Interpretation von Dirac 1928: ANTITEILCHEN (entdeckt 1932)

$\underbrace{\text{Spin } +\frac{1}{2} \text{ und } -\frac{1}{2}}_{\text{2 Lösungen}}$ $\otimes$ und $\underbrace{\text{Teilchen-Antiteilchen}}_{\text{2 Lösungen}}$

$e^-\Uparrow \quad e^-\Downarrow \qquad e^+\Uparrow \quad e^+\Downarrow$

mathematisch als Spinoren × Ebene Welle

Teilchen

$$\boxed{\psi(x^\mu, p^\mu) = u(p^\mu)\, e^{-i\frac{1}{\hbar} p_\mu x^\mu}}$$

Antiteilchen

$$\boxed{\psi(x^\mu, p^\mu) = v(p^\mu)\, e^{+\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu}}$$

$x^\mu = (ct, x, y, z)$

$p^\mu = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z)$

Teilchen-Spinor

$E = \hbar\omega$

$p = \hbar k$

$e^{i(kr - \omega t)}$

ebene Welle

Antiteilchen-Spinor

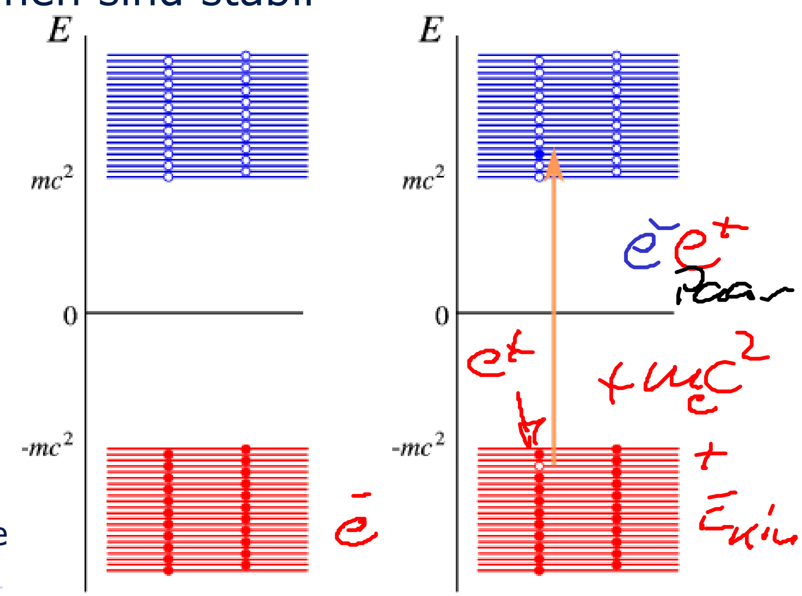
→ Symbole ←

scheinbar (s. n. Seite) negative Energie Bewegung rückwärts in t

Missverständliches Bild: Dirac See

- Probleme z.B.
  - Antimaterie-Teilchen sind keine „Quasiteilchen-Anregungen“ (Löcher) sondern echte Teilchen in der realen Welt, genau wie Teilchen, z.B. Experimente in Beschleunigern mit „Strahlen“ aus Billionen von Antiteilchen, genauso wie mit Strahlen aus Billionen Teilchen
  - Keine „spontane Abregung“, denn Positronen sind stabil
- Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Dirac-See

  Der **Dirac-See** ist ein theoretisches Modell, welches das Vakuum als einen unendlichen „See“ von Teilchen mit negativer Energie beschreibt. Es wurde vom britischen Physiker Paul Dirac 1930 entwickelt, um die Quanten-zustände negativer Energie zu erklären, die in der Dirac-Gleichung für relativistische Elektronen vorher-gesagt werden. Für diese Theorie wurde auch die Bezeichnung **Löchertheorie** verwendet. Das Positron, das Antiteilchen zum Elektron, wurde von Dirac als *Loch* im Dirac-See vorhergesagt und auch nach seiner experimentellen Entdeckung 1932 noch jahrelang so interpretiert. Heute werden die Zustände negativer Energie mit Hilfe der Quantenfeldtheorie als Erzeugungsoperatoren für Antiteilchen *positiver* Energie interpretiert, siehe Feynman-Stückelberg-Interpretation.



http://oer.physics.manchester.ac.uk/NP/Notes/Notes/Notesse28.xht

- Mathematisch völlig äquivalent, siehe z.B. https://arxiv.org/pdf/hep-th/0510040.pdf, aber irreführende Vorstellung