Kapitel 4

Symmetrien

Dieses Kapitel ist ein Sammelsurium spezieller Themen, die mit Symmetrie zu tun haben. Der erste Abschnitt enthält einige allgemeine Bemerkungen über die mathematische Beschreibung von Symmetrie („Gruppentheorie") und die Beziehung zwischen Symmetrie und Erhaltungssätzen (Noether-Theorem). Wir werden uns dann mit der Rotationssymmetrie und ihrer Verbindung zu Drehimpuls und Spin beschäftigen. Das führt uns seinerseits auf die „inneren" Symmetrien – Isospin, SU(3) und Flavor SU(6). Abschließend werden wir „diskrete" Symmetrien betrachten – Parität, Ladungskonjugation und Zeitumkehr. Bis auf die Theorie über den Spin (Abschnitte 4.2, 4.3 und 4.4) – die in folgenden Kapiteln ausführlich gebraucht werden wird – und den Stoff über Parität (Abschnitt 4.6) – nützliche Grundlage für Kapitel 10 – kann dieses Kapitel so oberflächlich (oder sorgfältig) studiert werden, wie es der Leser möchte. Ich empfehle an dieser Stelle ein zügiges Vorgehen und eine – sofern nötig – spätere Rückkehr zu speziellen Abschnitten. Einige Kenntnisse über Matrizenrechnung werden hier vorausgesetzt; Leser, die mit der Quantenmechanik vertraut sind, werden die Abschnitte über den Drehimpuls als einen einfachen Überblick empfinden (für jene, die sich in der Quantenmechanik nicht auskennen, könnten die entsprechenden Stellen unverständlich sein; in diesem Fall sollten Sie die entsprechenden Kapitel einer Einführung in die Quantentheorie durcharbeiten). Die Gruppentheorie wird hier in einer skandalös flüchtigen Weise berührt (mein Hauptanliegen ist, einige grundlegende Begriffe einzuführen), aber ein ernsthafter Student der Elementarteilchenphysik sollte sich überlegen, diese Thematik später einmal in größerem Detail zu studieren.

4.1 Symmetrien, Gruppen und Erhaltungssätze

Betrachten Sie den Graphen in Abbildung 4.1. Ich habe keine Ahnung, wie die Formel für die Funktion $f(x)$ aussehen könnte, aber so viel *kann* ich sagen: es ist eine *ungerade* Funktion $f(-x) = -f(x)$. (Wenn Sie mir nicht glauben, pausen Sie die Kurve ab, drehen Sie die Pause um 180° und vergewissern Sie sich, daß sie dem Original

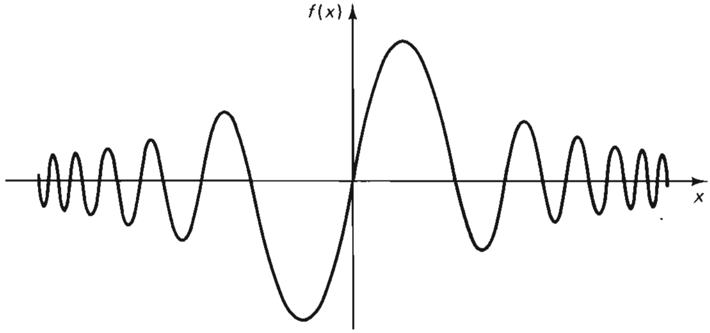

Abbildung 4.1: Eine ungerade Funktion.

vollkommen entspricht.) Daraus folgt zum Beispiel, daß

$$\begin{aligned} [f(-x)]^6 &= [f(x)]^6, \quad \int_{-3}^{+3} f(x)dx = 0, \\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{+2} &= \left.\frac{df}{dx}\right|_{-2}, \quad \int_{-7}^{+7} [f(x)]^2 dx = 2\int_0^{+7} [f(x)]^2 dx \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ich weiß, daß keine Kosinusfunktionen in der Fourierentwicklung von $f(x)$ auftreten und daß die Taylorentwicklung nur ungerade Exponenten enthält. Tatsächlich weiß ich eine ganze Menge über $f(x)$, allein aus meiner Beobachtung, daß sie eine bestimmte – in diesem Fall ungerade – Symmetrie hat, obschon ich die genaue Funktionsgleichung nicht kenne. In der Physik legt die Intuition oder ein allgemeines Prinzip in einer Problemstellung meist eine Symmetrie nahe, und deren systematische Ausnutzung kann sich als ein äußerst erfolgreiches Instrument erweisen. [In gewisser Hinsicht ist der Rückgriff auf eine Symmetrie charakteristisch für eine unvollständige Theorie. Wenn wir beispielsweise entdecken würden, daß die explizite Form von $f(x)$ etwa $f(x) = e^{-x^2}\sin(x^3)$ lautete, dann würden die Theoreme in (4.1) ihren Glanz verlieren. Warum sollten wir uns mit *Teil*informationen zufrieden geben, wenn wir *alles* wissen können? Aber selbst in einer ausgereiften Theorie führen Symmetrieüberlegungen oftmals zu einem tieferen Verständnis und rechnerischer Vereinfachung; wenn man, zum Beispiel, $f(x)$ von -3 bis $+3$ integriert, so ist es hilfreich zu wissen, daß $f(x)$ ungerade ist, selbst, *wenn* man die Funktionsgleichung kennt!]

Die deutlichsten Beispiele für Symmetrie in der Physik sind vermutlich Kristalle. Allerdings sind wir weniger an der statischen Symmetrie von *Formen* als vielmehr an dynamischen Symmetrien von *Bewegung* interessiert. Die Griechen glaubten offensichtlich, daß sich die Symmetrien in der Natur direkt in der Bewegung von Objekten spiegeln sollten: Sterne müssen sich auf Kreisbahnen bewegen, da diese die symmetrischsten aller Bahnen darstellen. Wie wir wissen, halten sich die Planeten nicht daran, und das war äußerst peinlich (und nicht das letzte Mal, daß naive Intuition über Symmetrie in Konflikt mit dem Experiment geriet). Newton erkannte, daß sich fundamentale Symmetrien nicht in der Bewegung einzelner Objekte zeigen, sondern im *Ensemble aller möglichen* Bewegungen – Symmetrien manifestieren sich eher in den *Bewegungsgleichungen* als in speziellen Lösungen dieser Gleichungen. Das Newtonsche Gravitationsgesetz weist beispielsweise sphärische Symmetrie auf – die Kraft

Tabelle 4.1: Einige Symmetrien und die zugehörigen Erhaltungssätze

Symmetrie		Erhaltungssatz
zeitliche Translation	$\leftrightarrow$	Energie
räumliche Translation	$\leftrightarrow$	Impuls
Rotation	$\leftrightarrow$	Drehimpuls
Eichtransformation	$\leftrightarrow$	Ladung

ist in allen Richtungen gleich groß –, die Planetenbahnen hingegen sind elliptisch. Somit wird uns die zugrundeliegende Symmetrie des Systems nur indirekt zuteil; Sie könnten sich in der Tat fragen, wie wir sie je aus der Beobachtung der Planetenbahnen entdeckt hätten, wenn wir nicht den starken Verdacht hegten, daß das Gravitationsfeld der Sonne eine sphärische Symmetrie aufweisen „sollte".
Erst 1917 wurden die dynamischen Konsequenzen der Symmetrie völlig verstanden. In jenem Jahr veröffentlichte Emmy Noether ihr berühmtes Theorem über den Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungssätzen:

NOETHER-THEOREM: SYMMETRIEN $\leftrightarrow$ ERHALTUNGSSÄTZE

Jede Symmetrie in der Natur zieht einen Erhaltungssatz nach sich; umgekehrt bedeutet jeder Erhaltungssatz eine zugrundeliegende Symmetrie. Zum Beispiel sind die physikalischen Gesetze bezüglich einer zeitlichen Translation symmetrisch; sie funktionieren heute genauso wie gestern. Das Noether-Theorem verbindet diese Invarianz mit der Energieerhaltung. Wenn ein System unter räumlicher Translation invariant ist, dann ist der Impuls erhalten; wenn es bezüglich der Rotation um einen Punkt symmetrisch ist, dann ist der Drehimpuls erhalten. In ähnlicher Weise liefert die Invarianz der Elektrodynamik unter Eichtransformationen die Ladungserhaltung (wir nennen das eine „innere" Symmetrie, im Gegensatz zu den Raumzeit-Symmetrien). Ich werde das Noether-Theorem nicht *beweisen*; die Einzelheiten sind nicht besonders erhellend.[1] Wichtig ist allein die tiefgreifende und schöne *Idee*, daß Symmetrien mit Erhaltungssätzen zusammenhängen (siehe Tabelle 4.1).
Ich habe eher beiläufig über Symmetrien gesprochen und einige Beispiele angeführt, aber was genau *ist* eine Symmetrie? Es ist eine Operation, die man (zumindest gedanklich) auf ein System anwenden kann und unter der es *invariant* bleibt – die es in einen Zustand überführt, der von dem vorherigen nicht zu unterscheiden ist. Im Falle der Funktion aus Abbildung 4.1 bedeuten die Änderung des Vorzeichens, $x \rightarrow -x$, und die Multiplikation des Ganzen mit -1 $[f(x) \rightarrow -f(-x)]$ eine symmetrische Operation. Um ein aussagekräftigeres Beispiel zu nehmen, betrachten Sie das gleichseitige Dreieck (Abb. 4.2). Durch eine im Uhrzeigersinn ausgeführte Rotation um 120° (R_+) wird es genauso wie durch eine gegen den Uhrzeigersinn ausgeführte Rotation um 120° (R_-), durch eine Spiegelung an der Achse Aa (R_a) beziehungsweise an den entsprechenden Achsen durch B (R_b) oder C (R_c) in sich selbst überführt. Ist das alles? Nun, wenn wir *überhaupt nichts* machen (I), bleibt es offensichtlich ebenfalls invariant, so daß auch dies eine Symmetrieoperation ist, wenn auch eine äußerst triviale. Und dann könnten wir noch Operationen verbinden und das Dreieck beispielsweise

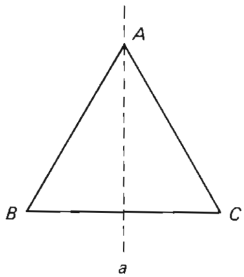

Abbildung 4.2: Symmetrien eines gleichseitigen Dreiecks.

um 240° im Uhrzeigersinn drehen. Aber das ist dasselbe wie die Rotation um 120° gegen den Uhrzeigersinn (d.h., $R_+^2 = R_-$). Wie sich herausstellt, haben wir bereits alle möglichen Symmetrieoperationen für das gleichseitige Dreieck gefunden (s. Aufgabe 4.1).
Die auf ein System anwendbare Menge aller Symmetrieoperationen muß die folgenden Eigenschaften haben:

1. *Abgeschlossenheit.* Wenn R_i und R_j dazugehören, dann muß das *Produkt* R_iR_j – das bedeutet, daß erst R_j und dann R_i anzuwenden ist – ebenfalls eine mögliche Operation sein; das heißt, daß es ein R_k gibt, so daß $R_iR_j = R_k$.

2. *Einselement.* Es gibt ein Element I, so daß gilt: $IR_i = R_iI = R_i$ für alle R_i.

3. *Inverses.* Zu jedem Element R_i gibt es ein *Inverses* R_i^{-1}, so daß gilt: $R_iR_i^{-1} = R_i^{-1}R_i = I$.

4. *Assoziativität.* $R_i(R_jR_k) = (R_iR_j)R_k$.

Dies sind gerade die Eigenschaften, die eine *Gruppe* definieren. Und in der Tat kann die mathematische Theorie der Gruppen als die systematische Untersuchung der Symmetrien angesehen werden. Beachten Sie, daß Gruppenelemente im allgemeinen nicht *kommutativ* sein müssen: $R_iR_j \neq R_jR_i$; *wenn* alle Elemente kommutieren, wird die Gruppe *abelsch* genannt. Räumliche und zeitliche Translationen bilden eine abelsche Gruppe; Rotationen *nicht*.[2] Gruppen können *endlich* (wie die Dreiecksgruppe, die nur sechs Elemente hat) oder *unendlich* sein (zum Beispiel die Menge der ganzen Zahlen, bei denen die Addition die Rolle der Gruppen-„Multiplikation" spielt). Wir werden *kontinuierliche* Gruppen kennenlernen (wie die Gruppe aller Rotationen in einer Ebene), in denen die Elemente von einem oder mehreren kontinuierlichen Parametern abhängen (in diesem Fall dem Rotationswinkel), und *diskrete* Gruppen, in denen die Elemente durch einen Index gekennzeichnet werden können, der nur ganze Zahlen annimmt (alle endlichen Gruppen sind natürlich diskret).
Wie sich zeigt, sind die meisten der für die Physik interessanten Gruppen *Matrizen*gruppen. Die in Kapitel 3 eingeführte Lorentzgruppe besteht beispielsweise aus der Menge von 4×4 Λ-Matrizen. In der Elementarteilchenphysik sind die häufigsten Gruppen von einem Typus, den Mathematiker $U(n)$ nennen: die Gruppe aller unitären $n \times n$-Matrizen (s. Tabelle 4.2). (Eine *unitäre Matrix* ist eine Matrix, deren

Tabelle 4.2: Die wichtigsten Gruppen in der Elementarteilchenphysik

Gruppenname		Matrizen in der Gruppe
$U(n)$	$n \times n$	unitär ($U^\dagger U = 1$)
$SU(n)$	$n \times n$	unitär mit Determinante 1
$O(n)$	$n \times n$	orthogonal ($O^T O = 1$)
$SO(n)$	$n \times n$	orthogonal mit Determinante 1

Inverses gleich der adjungierten Matrix ist: $U^{-1} = U^\dagger$.) Wenn wir uns weiter auf unitäre Matrizen mit Determinante 1 beschränken, wird die Gruppe $SU(n)$ genannt. (Das S steht für „speziell", was lediglich bedeutet: „Determinante 1".) Wenn wir uns auf *reelle* unitäre Matrizen beschränken, dann heißt die Gruppe $O(n)$. (O steht für „orthogonal"; eine orthogonale Matrix ist eine, deren Inverses gleich ihrer Transponierten ist: $O^{-1} = O^T$.) Und schließlich lautet die Gruppe der reellen, orthogonalen $n \times n$-Matrizen mit Determinante 1: $SO(n)$. $SO(n)$ kann man sich als die Gruppe aller *Rotationen* in einem n-dimensionalen Raum vorstellen. Somit beschreibt $SO(3)$ die Rotationssymmetrie unserer Welt, eine Symmetrie, die durch das Noether-Theorem mit der Drehimpulserhaltung verknüpft ist. Tatsächlich ist die gesamte Quantentheorie über den Drehimpuls tiefste Gruppentheorie. Wie es der Zufall will, ist $SO(3)$ in ihrer mathematischen Struktur fast mit $SU(2)$ identisch, die die wichtigste *innere* Symmetrie in der Elementarteilchenphysik ist. Somit wird uns die Theorie des Drehimpulses, der wir uns als nächstes zuwenden werden, gleich zweifach dienen.

Eine letzte Sache noch. Jede Gruppe G kann durch eine Gruppe von *Matrizen dargestellt* werden: Für jedes Gruppenelement a gibt es eine zugehörige Matrix M_a, und die Zugehörigkeit berücksichtigt die Gruppenmultiplikation derart, daß, wenn $ab = c$ gilt, dann ist auch $M_a M_b = M_c$. Eine solche Darstellung muß nicht „treu" sein: viele verschiedene Gruppenelemente können durch dieselbe Matrix dargestellt werden. (Mathematisch ist die Matrizengruppe *homo*morph, aber nicht notwendig *iso*morph zu G.) Tatsächlich gibt es einen trivialen Fall, in dem jedes Element durch die 1×1 Einheitsmatrix dargestellt wird (was nichts anderes bedeutet, als die Zahl 1). Wenn G eine Gruppe von Matrizen ist wie $SU(6)$ oder $O(18)$, dann ist es eine (treue) Darstellung seiner *selbst* – wir nennen das die *fundamentale* Darstellung. Aber im allgemeinen wird es viele andere Darstellungen durch Matrizen der verschiedensten Dimensionen geben. Zum Beispiel hat $SU(2)$ Darstellungen der Dimension 1 (die triviale), 2 (die fundamentale), 3, 4, 5 und sogar *jeder* positiven ganzen Zahl. In der Gruppentheorie ist die Aufzählung aller Darstellungen einer vorliegenden Gruppe ein großes Problem. Man kann natürlich immer eine neue Darstellung konstruieren, indem man zwei alte kombiniert, so daß

$$M_a = \begin{pmatrix} \boxed{M_a^{(1)}} & \text{(Nullen)} \\ \text{(Nullen)} & \boxed{M_a^{(2)}} \end{pmatrix}$$

ist. Aber wir zählen das nicht extra; wenn wir die Darstellungen einer Gruppe auflisten, dann sprechen wir von den sogenannten irreduziblen Darstellungen, die nicht mehr in block-diagonale Form zerlegt werden *können*. Eigentlich haben Sie schon mehrere Beispiele von Gruppendarstellungen kennengelernt, wahrscheinlich, ohne es zu bemerken: Ein gewöhnlicher Skalar gehört zu der eindimensionalen Darstellung der Rotationsgruppe $SO(3)$, und ein Vektor gehört zu der dreidimensionalen Darstellung; Vierervektoren gehören zu der vierdimensionalen Darstellung der Lorentzgruppe; und die merkwürdigen geometrischen Arrangements aus Gell-Manns Achtfachem Weg entsprechen irreduziblen Darstellungen der Gruppe $SU(3)$.

4.2 Spin und Bahndrehimpuls

Die Erde bewegt sich mit zwei Arten von Drehimpuls: dem *Bahn*drehimpuls rmv, der zu dem jährlichen Umlauf um die Sonne gehört, und dem *Spin*drehimpuls I_ω, der zu der täglichen Drehung um die Nord-Süd-Achse gehört. Dasselbe gilt für das Elektron im Wasserstoffatom: Es trägt ebenfalls beide Drehimpulsarten. Im makroskopischen Fall ist die Unterscheidung nicht gerade sehr tiefgreifend; schließlich ist der Spindrehimpuls der Erde nichts anderes als die Summe aller „Bahn"drehimpulse sämtlicher Steine und Dreckklumpen, aus denen sie besteht, in ihrer täglichen „Bahn" um die Achse. Im Falle des Elektrons steht uns eine solche Interpretation nicht zur Verfügung: Soweit wir wissen, ist das Elektron ein echtes punktförmiges Teilchen; sein Spinbahndrehimpuls kann keinen um die Achse zirkulierenden Bestandteilen zugerechnet werden, sondern ist einfach eine intrinsische Eigenschaft des Teilchens selbst (s. Aufgabe 4.8).

Klassisch können wir alle drei Komponenten des Bahndrehimpulsvektors $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$ mit jeder gewünschten Präzision messen, und diese Komponenten können jeden beliebigen Wert annehmen. In der Quantenmechanik ist es *prinzipiell unmöglich*, alle drei Komponenten gleichzeitig zu messen; eine Messung von L_x ändert unausweichlich den Wert von L_y um einen unvorhersagbaren Betrag. Das beste, was wir tun können, ist den *Betrag* von $\boldsymbol{L}$ (oder besser sein Quadrat: $L^2 = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L}$) zusammen mit einer Komponente zu messen (es hat sich eingebürgert, die z-Komponente zu nehmen). Darüber hinaus können diese Messungen nur gewisse „erlaubte" Werte liefern.* Insbesondere liefert eine Messung von L^2 immer eine Zahl der Form

$$l(l+1)\hbar^2 \tag{4.2}$$

worin l eine nicht-negative ganze Zahl ist:

$$l = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{4.3}$$

Für einen bestimmten Wert von l ergibt eine Messung von L_z immer ein Ergebnis der Form

$$m_l \hbar \tag{4.4}$$

*Ich werde die Quantisierungsregeln für den Drehimpuls nicht *beweisen*, und wenn dieses Material Ihnen neu sein sollte, dann schlage ich vor, daß Sie ein Lehrbuch zur Quantenmechanik hinzuziehen. Ich habe hier lediglich vor, die wichtigsten Ergebnisse zusammenzufassen, die wir im folgenden brauchen werden.

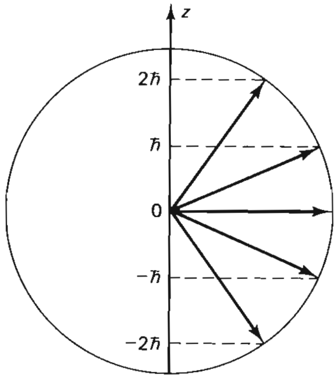

Abbildung 4.3: Mögliche Ausrichtungen des Drehimpulsvektors für $l = 2$.

worin m_l eine ganze Zahl im Intervall $[-l, +l]$ ist:

$$m_l = -l, -l+1, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, l-1, l \tag{4.5}$$

[alles in allem $(2l+1)$ Möglichkeiten]. Abbildung 4.3 mag Ihnen helfen, sich die Sache zu veranschaulichen. Hier ist $l = 2$, so daß der Betrag von $\boldsymbol{L}\ \sqrt{6}\hbar = 2,45\,\hbar$ ist; L_z kann die Werte $2\hbar$, $\hbar$, 0, $-\hbar$ oder $-2\hbar$ annehmen. Beachten Sie, daß der Drehimpulsvektor nicht gänzlich in die z-Richtung zeigen kann.
Dasselbe gilt für den Spindrehimpuls: Eine Messung von $S^2 = \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S}$ liefert nur Werte der Form

$$s(s+1)\hbar^2 \tag{4.6}$$

Im Falle des Spins kann die Quantenzahl s jedoch *halb-* und ganzzahlig sein:

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots \tag{4.7}$$

Für einen bestimmten Wert von s muß eine Messung von S_z eine Antwort der Form

$$m_s \hbar \tag{4.8}$$

hervorrufen, worin m_s (je nach s) eine ganze oder halbe Zahl in dem Intervall $[-s, s]$ ist:

$$m_s = -s, -s+1, \ldots, s-1, s \tag{4.9}$$

[$(2s+1)$ Möglichkeiten].
Nun kann man ein Teilchen in einen beliebigen *Bahn*drehimpulszustand versetzen, aber für jede Teilchenart ist der Wert von s fest. Für jedes Pion oder Kaon, zum Beispiel, ist $s = 0$; für jedes Elektron, Proton, Neutron und Quark ist $s = \frac{1}{2}$; für das ρ, das ψ, das Photon und das Gluon gilt $s = 1$; für die Δ's und das Ω^- ist $s = \frac{5}{2}$; und so weiter. Wir nennen s den „Spin" des Teilchens. Teilchen mit halbzahligem Spin nennt man *Fermionen* – alle Baryonen, Leptonen und Quarks sind Fermionen; Teilchen mit ganzzahligem Spin werden *Bosonen* genannt – alle Mesonen und Austauschteilchen sind Bosonen (s. Tabelle 4.3).