

Kapitel 7

Quantenelektrodynamik

In diesem Kapitel stelle ich die Dirac-Gleichung vor, nenne die Feynman-Regeln für die Quantenelektrodynamik, entwickle einige nützliche Rechenwerkzeuge und leite ein paar der klassischen QED-Ergebnisse her. Die Behandlung basiert in großem Maße auf Material der Kapitel 2, 3 und 6 sowie auf dem Spin- $\frac{1}{2}$ -Formalismus aus Kapitel 4. Seinerseits ist Kapitel 7 die unabdingbare Grundlage für alles, was folgt (so Sie wollen, könnten Sie allerdings Beispiel 7.8 und Abschnitt 7.9 mitsamt den dazugehörigen Passagen in den Kapiteln 8 und 9 auslassen).

7.1 Die Dirac-Gleichung

Obwohl das „ABC“-Modell in Kapitel 6 eine völlig legitime Quantenfeldtheorie ist, beschreibt es nicht die Wirklichkeit, weil die Teilchen A , B und C den Spin 0 haben, wohingegen Quarks und Leptonen den Spin $\frac{1}{2}$ und die Austauschteilchen den Spin 1 haben. Die Einbeziehung des Spins kann algebraisch beschwerlich sein; deshalb entschied ich mich, den Feynman-Kalkül im Zuge einer „Spielzeug“-Theorie einzuführen, die nicht unnötig vom Wesentlichen ablenkt. In der *nicht-relativistischen* Quantenmechanik werden Teilchen durch die *Schrödingergleichung* beschrieben; in der *relativistischen* Quantenmechanik werden Teilchen mit Spin 0 durch die *Klein-Gordon-Gleichung*, Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ durch die *Dirac-Gleichung* und Teilchen mit Spin 1 durch die *Proca-Gleichung* beschrieben. Sind die Feynman-Regeln jedoch erst einmal aufgestellt, tritt die zugrundeliegende Feldgleichung in den Hintergrund – auf diese Weise gelangten wir durch Kapitel 6, ohne die Klein-Gordon-Gleichung jemals zu erwähnen. Bei Spin $\frac{1}{2}$ aber setzt gerade die *Notation* der Feynman-Regeln eine gewisse Vertrautheit mit der Dirac-Gleichung voraus. Daher werden wir während der nächsten drei Abschnitte die Dirac-Theorie selbst studieren.

In Kapitel 5 habe ich die Schrödingergleichung „hergeleitet“, indem ich von der *klassischen* Energie-Impuls-Beziehung

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V = E \tag{7.1}$$

ausging, die Quantenvorschrift

$$\mathbf{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla, \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (7.2)$$

vornahm und den resultierenden Operator auf die „Wellenfunktion“ ψ wirken ließ:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (\text{Schrödinger-Gleichung}) \quad (7.3)$$

Die Klein-Gordon-Gleichung kann man in genau derselben Weise erhalten, indem man mit der *relativistischen* Energie-Impuls-Beziehung $E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4$ beginnt oder (besser) mit

$$p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = 0 \quad (7.4)$$

(ich lasse von jetzt an die potentielle Energie fort; wir werden uns an freie Teilchen halten). Erstaunlicherweise bedarf die Vorschrift (7.2) keiner relativistischen Modifikation; in Vierschreibweise lautet sie

$$p_\mu \rightarrow i\hbar \partial_\mu \quad (7.5)$$

Hier ist*

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (7.6)$$

was heißen soll, daß

$$\partial_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z} \quad (7.7)$$

gilt. Indem wir (7.5) in (7.4) einsetzen und die Ableitungen auf eine Wellenfunktion ψ wirken lassen, erhalten wir

$$-\hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu \psi - m^2 c^2 \psi = 0 \quad (7.8)$$

oder

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \nabla^2 \psi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \psi \quad (\text{Klein-Gordon-Gleichung}) \quad (7.9)$$

Schrödinger entdeckte diese Gleichung offensichtlich vor der nicht-relativistischen, die seinen Namen trägt; sie wurde schließlich mit der Begründung verworfen, daß sie (aus Gründen, die wir nicht vertiefen brauchen) inkompatibel mit der statistischen Interpretation von ψ sei [die besagt, daß $|\psi|^2$ die Wahrscheinlichkeit ist, das Teilchen an der Stelle (x, y, z) zu finden]. Es zeigte sich, daß das Grundproblem die Tatsache war, daß die Klein-Gordon-Gleichung von zweiter Ordnung in t ist.[†] So nahm sich denn Dirac vor, eine Gleichung zu finden, die mit der relativistischen Energie-Impuls-Formel konsistent, aber von erster Ordnung in der Zeit ist. Ironischerweise zeigten

*Der Gradient bezüglich eines *kontravarianten* Ort-Zeit-Vierervektors x^μ ist selbst ein *kovarianter* Vierervektor, woraus die Stellung des Index folgt. Voll ausgeschrieben, lautet Gleichung (7.5) $(E/c, -\mathbf{p}) \rightarrow i\hbar \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$. Natürlich gilt analog $\partial^\mu \equiv \partial/\partial x_\mu$ (vgl. Aufgabe 7.1).

[†]Beachten Sie, daß die Schrödinger-Gleichung (7.3) von *erster* Ordnung in t ist.

Pauli und Weisskopf 1934, daß die statistische Interpretation in der relativistischen Quantentheorie fehlerhaft ist,* und setzten die Klein-Gordon-Gleichung wieder an ihren rechtmäßigen Platz, während sie die Dirac-Gleichung den Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ vorbehielten.

Diracs grundsätzliche Strategie war es, die Energie-Impuls-Beziehung (7.4) zu faktorisieren. Das wäre einfach, wenn wir es lediglich mit p^0 zu tun hätten (das heißt, wenn \mathbf{p} Null wäre):

$$(p^0)^2 - m^2 c^2 = (p^0 + mc)(p^0 - mc) = 0 \quad (7.10)$$

Wir erhalten dann zwei Gleichungen erster Ordnung:

$$(p^0 - mc) = 0 \quad \text{oder} \quad (p^0 + mc) = 0 \quad (7.11)$$

von denen eine jede garantiert, daß $p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = 0$ gilt. Aber es ist etwas anderes, wenn die anderen drei Komponenten von p^μ mit einbezogen werden; in diesem Fall suchen wir nach etwas von der Form

$$(p^\mu p_\mu - m^2 c^2) = (\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) \quad (7.12)$$

worin β^κ und γ^λ acht zu bestimmende Koeffizienten sind.[†] Multiplizieren wir die rechte Seite aus, so haben wir

$$\beta^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - mc(\beta^\kappa - \gamma^\kappa) p_\kappa - m^2 c^2$$

Wir wollen keine Terme, die linear in p_κ sind, und so müssen wir $\beta^\kappa = \gamma^\kappa$ wählen; also müssen wir Koeffizienten γ^κ finden, so daß

$$p^\mu p_\mu = \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda$$

gilt, was heißen soll, daß

$$\begin{aligned} (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 &= (\gamma^0)^2 (p^0)^2 + (\gamma^1)^2 (p^1)^2 + (\gamma^2)^2 (p^2)^2 \\ &\quad + (\gamma^3)^2 (p^3)^2 + (\gamma^0 \gamma^1 + \gamma^1 \gamma^0) p_0 p_1 \\ &\quad + (\gamma^0 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^0) p_0 p_2 + (\gamma^0 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^0) p_0 p_3 \\ &\quad + (\gamma^1 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^1) p_1 p_2 + (\gamma^1 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^1) p_1 p_3 \\ &\quad + (\gamma^2 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^2) p_2 p_3 \end{aligned} \quad (7.13)$$

ist. Das Problem ist offenkundig: Wir könnten $\gamma^0 = 1$ und $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma^3 = i$ wählen, aber es scheint keinen Weg zu geben, die „Mischterme“ loszuwerden. An diesem Punkt hatte Dirac eine brillante Eingebung: Was wäre, wenn die γ 's *Matrizen* anstelle von

*Der wesentliche Punkt ist, daß eine relativistische Theorie Paarerzeugung und -vernichtung berücksichtigen muß, und folglich ist die Teilchenzahl keine Erhaltungsgröße.

[†]Für den Fall, daß die Schreibweise Sie verwirrt, schreibe ich Gleichung (7.12) in „Langschrift“:

$$\begin{aligned} (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 - m^2 c^2 \\ = (\beta^0 p^0 - \beta^1 p^1 - \beta^2 p^2 - \beta^3 p^3 + mc)(\gamma^0 p^0 - \gamma^1 p^1 - \gamma^2 p^2 - \gamma^3 p^3 - mc) \end{aligned}$$

Zahlen sein würden? Da Matrizen nicht kommutieren, können wir möglicherweise einen Satz finden, so daß

$$\begin{aligned}(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0, \quad \text{für } \mu \neq \nu\end{aligned}\quad (7.14)$$

gilt. Oder noch kürzer:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (7.15)$$

worin $g^{\mu\nu}$ die Minkowski-Metrik [Gl. (3.13)] ist, und der Ausdruck mit den geschweiften Klammern für den *Antikommutator* steht:

$$\{A, B\} \equiv AB + BA \quad (7.16)$$

Wenn Sie wollen, können Sie versuchen, selbst mit diesem Problem herumzuspielen. Es zeigt sich, *daß* es lösbar ist, obwohl 4×4 -Matrizen die kleinsten sind, mit denen es gelingt. Es gibt viele im wesentlichen äquivalente Sätze von „Gamma-Matrizen“; wir werden die Standard-Darstellung nach „Bjorken und Drell“ benutzen:¹

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

worin σ^i ($i = 1, 2, 3$) die bereits eingeführten Pauli-Matrizen [Gl. (4.26)] sind, während 1 die 2×2 -Einheitsmatrix und 0 die 2×2 -Nullmatrix repräsentieren.*

Als eine 4×4 -Matrizengleichung *kann* die relativistische Energie-Impuls-Beziehung somit faktorisiert werden:

$$(p^\mu p_\mu - m^2 c^2) = (\gamma^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0 \quad (7.18)$$

Wir erhalten nun die Dirac-Gleichung, indem wir einen der beiden Terme ablösen (es ist eigentlich nicht weiter wichtig, *welchen* wir dazu nehmen, aber für gewöhnlich wählt man den folgenden – vgl. Aufgabe 7.10):

$$\gamma^\mu p_\mu - mc = 0 \quad (7.19)$$

Als nächstes ersetzen wir wieder $p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu$ [Gl. (7.5)] und lassen das Ergebnis auf die Wellenfunktion ψ wirken:

$$i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc\psi = 0 \quad (\text{Dirac-Gleichung}) \quad (7.20)$$

Beachten Sie, daß ψ nun eine Spaltenmatrix mit vier Elementen ist:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

*Wenn der Kontext keine Zweideutigkeit zuläßt, werde ich 1 und 0 in dieser Weise für 2×2 - oder 4×4 -Matrizen verwenden; wo erforderlich, ist damit auch eine Einheitsmatrix der entsprechenden Dimension *gemeint*, wie auf der rechten Seite von Gleichung (7.15). Übrigens, da σ nicht der Raumanteil eines Vierervektors ist, unterscheiden wir nicht zwischen oberem und unterem Index: $\sigma^i \equiv \sigma_i$.

Wir nennen das einen „Bi-Spinor“ oder „Dirac-Spinor“. (Obwohl er vier Komponenten enthält, ist dieses Objekt kein Vierervektor. In Abschnitt 7.3 werde ich Ihnen zeigen, wie er sich bei einem Wechsel der Inertialsysteme transformiert; es wird sich *nicht* um eine normale Lorentztransformation handeln.)

7.2 Lösungen der Dirac-Gleichung

Lassen Sie uns nun nach einfachen Lösungen der Dirac-Gleichung suchen. Nehmen wir zunächst an, daß ψ *ortsunabhängig* ist:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{y}} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \quad (7.22)$$

Angesichts von Gleichung (7.5) beschreibt das einen Zustand mit Impuls Null ($\mathbf{p} = 0$). Die Dirac-Gleichung (7.20) vereinfacht sich zu

$$\frac{i\hbar}{c}\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} - mc\psi = 0 \quad (7.23)$$

oder

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\psi_A/\partial t \\ \partial\psi_B/\partial t \end{pmatrix} = -i\frac{mc^2}{\hbar} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

worin

$$\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

für die beiden oberen Komponenten und

$$\psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

für die beiden unteren stehen. Somit gilt

$$\frac{\partial\psi_A}{\partial t} = -i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)\psi_A, \quad -\frac{\partial\psi_B}{\partial t} = -i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)\psi_B \quad (7.27)$$

und die Lösungen sind

$$\psi_A(t) = e^{-i(mc^2/\hbar)t}\psi_A(0), \quad \psi_B(t) = e^{+i(mc^2/\hbar)t}\psi_B(0) \quad (7.28)$$

Unter Bezug auf Gleichung (5.10) erkennen wir den Faktor

$$e^{-iEt/\hbar} \quad (7.29)$$

als die charakteristische Zeitabhängigkeit eines Quantenzustands mit der Energie E . Für ein ruhendes Teilchen ist $E = mc^2$, und somit ist ψ_A genau das, was wir für den Fall $\mathbf{p} = 0$ erwartet hätten. Aber was ist mit ψ_B ? Anscheinend repräsentiert es einen Zustand mit *negativer Energie* ($E = -mc^2$). Dies ist die berühmte Katastrophe, die ich in Kapitel 1 erwähnt habe und die Dirac zunächst zu vermeiden suchte,

indem er einen unsichtbaren unendlichen „See“ von Teilchen negativer Energie postulierte, die alle diese unerwünschten Zustände auffüllen.* Statt dessen interpretieren wir die „negative Energie“ nun als Lösungen, die *Antiteilchen* mit *positiver* Energie repräsentieren. Somit beschreibt ψ_A Elektronen (zum Beispiel), während ψ_B *Positronen* beschreibt. Beide sind zweikomponentige Spinoren – gerade richtig für ein System mit Spin $\frac{1}{2}$. Daraus folgt also, daß die Dirac-Gleichung mit $\mathbf{p} = 0$ vier unabhängige Lösungen zuläßt (für den Augenblick ignorieren wir dabei Normierungsfaktoren):

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= e^{-i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi^{(2)} &= e^{-i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi^{(3)} &= e^{+i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi^{(4)} &= e^{+i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.30)$$

die jeweils ein Elektron mit Spin up, ein Elektron mit Spin down, ein Positron mit Spin up und ein Positron mit Spin down beschreiben.

Als nächstes suchen wir nach Lösungen in Form von *ebenen Wellen*

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a e^{-i/\hbar(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} u(E, \mathbf{p}) \quad (7.31)$$

oder in übersichtlicherer Schreibweise

$$\psi(x) = a e^{-(i/\hbar)x \cdot p} u(p) \quad (7.32)$$

(a ist hier eine Normierungskonstante, die für unsere momentanen Absichten irrelevant ist, aber später notwendig sein wird, um konsistente Einheiten zu erhalten.) Wir hoffen, einen Bi-Spinor $u(p)$ zu finden, so daß $\psi(x)$ die Dirac-Gleichung erfüllt. (Zu diesem Zeitpunkt ist $p \equiv (E/c, \mathbf{p})$ lediglich ein Satz von vier willkürlichen Parametern, aber da sie sich als Repräsentanten von Energie und Impuls herausstellen, scheint es am einfachsten, ihnen von Anfang an die entsprechenden Buchstaben zuzuweisen.) Weil die x -Abhängigkeit auf den Exponenten beschränkt ist, gilt

$$\partial_\mu \psi = -\frac{i}{\hbar} p_\mu a e^{-(i/\hbar)x \cdot p} u \quad (7.33)$$

Einsetzen in die Dirac-Gleichung (7.20) liefert

$$\gamma^\mu p_\mu a e^{-(i/\hbar)x \cdot p} u - mca e^{-(i/\hbar)x \cdot p} u = 0$$

*Sie könnten fragen, warum wir nicht einfach annehmen, daß ψ_B immer Null ist; warum wir die Lösungen mit negativer Energie nicht als „physikalisch inakzeptabel“ bezeichnen und schlichtweg ignorieren? Leider können wir das nicht tun. In einem Quantensystem brauchen wir einen *vollständigen* Satz von Zuständen, und die positiven Energiezustände allein sind *nicht* vollständig. In der Schrödingergleichung ist das Vorzeichen von i reine Konvention. Hätten wir die andere Wahl getroffen, dann würde $e^{iEt/\hbar}$ den Faktor (7.29) als die charakteristische Zeitabhängigkeit für einen stationären Zustand der Energie E ersetzen. Die relativistische Quantentheorie zwingt uns *beide* Vorzeichen auf, und das impliziert, wenn richtig interpretiert, die Existenz von Antiteilchen.

oder kurz

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0 \quad (7.34)$$

Dieser Ausdruck ist unter dem Namen „Impulsraum-Dirac-Gleichung“ bekannt. Beachten Sie, daß sie rein algebraischer Natur ohne jegliche Ableitung ist. Wenn u Gleichung (7.34) erfüllt, dann erfüllt ψ (7.32) die Dirac-Gleichung (7.20).

Nun ist

$$\begin{aligned} \gamma^\mu p_\mu &= \gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} = \frac{E}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \mathbf{p} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E/c & -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} & -E/c \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.35)$$

und somit

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu p_\mu - mc)u &= \begin{pmatrix} \left(\frac{E}{c} - mc\right) & -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} & \left(-\frac{E}{c} - mc\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{E}{c} - mc\right) u_A - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} u_B \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} u_A - \left(\frac{E}{c} + mc\right) u_B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

worin der Index A wie zuvor die zwei oberen Komponenten und B die beiden unteren bezeichnen. Um Gleichung (7.34) zu erfüllen, müssen also die Gleichungen

$$u_A = \frac{c}{E - mc^2} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) u_B, \quad u_B = \frac{c}{E + mc^2} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) u_A \quad (7.36)$$

gelten. Einsetzen der zweiten Gleichung in die erste ergibt

$$u_A = \frac{c^2}{E^2 - m^2 c^4} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 u_A \quad (7.37)$$

Aber

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= p_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + p_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_z & (p_x - ip_y) \\ (p_x + ip_y) & -p_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.38)$$

so daß

$$(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \begin{pmatrix} p_z^2 + (p_x - ip_y)(p_x + ip_y) & p_z(p_x - ip_y) - p_z(p_x - ip_y) \\ p_z(p_x + ip_y) - p_z(p_x + ip_y) & (p_x + ip_y)(p_x - ip_y) + p_z^2 \end{pmatrix} = \mathbf{p}^2 \cdot \mathbb{1} \quad (7.39)$$

wird, wobei $\mathbb{1}$ die 2×2 -Einheitsmatrix ist (dieses eine Mal explizit geschrieben). Somit ist

$$u_A = \frac{\mathbf{p}^2 c^2}{E^2 - m^2 c^4} u_A \quad (7.40)$$

und folglich*

$$E^2 - m^2 c^4 = \mathbf{p}^2 c^2 \quad (7.41)$$

Um also die Dirac-Gleichung zu erfüllen, müssen E und \mathbf{p} der gewöhnlichen relativistischen Energie-Impuls-Beziehung gehorchen. Das kann schwerlich *überraschen*, aber es ist interessant zu sehen, wie die Dirac-Gleichung diese Notwendigkeit untermauert. Als Gleichung für E erlaubt (7.41) zwei Lösungen:

$$E = \pm \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2} \quad (7.42)$$

Die positive Wurzel gehört zu Teilchenzuständen und die negative Wurzel zu Antiteilchenzuständen.

Indem wir zu Gleichung (7.36) zurückkehren und (7.38) hinzuziehen, ist es ein leichtes, die vier unabhängigen Lösungen der Dirac-Gleichung (für den Augenblick ohne Normierungsfaktoren) zu konstruieren:

$$\begin{aligned} (1) \text{ Wähle } u_A &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ so ist } u_B = \frac{c}{E + mc^2} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \\ (2) \text{ Wähle } u_A &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ so ist } u_B = \frac{c}{E + mc^2} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \\ (3) \text{ Wähle } u_B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ so ist } u_A = \frac{c}{E - mc^2} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{c}{E - mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \\ (4) \text{ Wähle } u_B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ so ist } u_A = \frac{c}{E - mc^2} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{c}{E - mc^2} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.43)$$

Für (1) und (2) müssen wir das Pluszeichen aus Gleichung (7.42) nehmen, sonst geht u_B für $\mathbf{p} \rightarrow 0$ gegen unendlich; dies sind offensichtlich Lösungen für *Teilchen*. Für (3) und (4) müssen wir hingegen das Minuszeichen verwenden; dies sind Zustände von *Antiteilchen*. Es ist nützlich, die Spinoren derart zu normieren, daß gilt:[†]

$$u^\dagger u = 2|E|/c \quad (7.44)$$

worin das Kreuz die adjungierte (oder „hermitesch-konjugierte“) Matrix bezeichnet:

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \Rightarrow u^\dagger = (\alpha^* \beta^* \gamma^* \delta^*)$$

*Gleichung (7.40) würde auch $u_A = 0$ als Lösung erlauben; dieselbe Herleitung jedoch, beginnend mit den Gleichungen (7.36), aber mit Einsetzen der ersten in die zweite Gleichung, liefert Gleichung (7.40) mit u_B anstelle von u_A . Somit gilt Gleichung (7.41), es sei denn, u_A und u_B sind *beide* Null (und in diesem Fall hätten wir überhaupt keine Lösung).

[†]Eigentlich gibt es in der Literatur drei unterschiedliche Konventionen: $u^\dagger u = 2|E|/c$ (Halzen und Martin), $u^\dagger u = |E|/mc^2$ (Bjorken und Drell) $u^\dagger u = 1$ (Bogoliubov und Shirkov). In diesem einen Fall weiche ich von Bjorken und Drell ab, deren Wahl unechte Schwierigkeiten aufwirft, wenn $m \rightarrow 0$ geht.

so daß

$$u^\dagger u = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 \quad (7.45)$$

ist. Somit sind die vier Lösungen:

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c(p_z)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E+mc^2} \end{pmatrix}$$

(mit $E = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}$),

$$u^{(3)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_z)}{E-mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E-mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(4)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x-ip_y)}{E-mc^2} \\ \frac{c(-p_z)}{E-mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(mit $E = -\sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}$), (7.46)

und die Normierungskonstante ist (vgl. Aufgabe 7.3)

$$N = \sqrt{(|E| + mc^2)/c} \quad (7.47)$$

Sie könnten vermuten, daß $u^{(1)}$ ein Elektron mit Spin up beschreibt, $u^{(2)}$ ein Elektron mit Spin down und so weiter, aber das ist nicht ganz der Fall. Für Dirac-Teilchen sind die Spin-Matrizen [in Verallgemeinerung von (4.21)]

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\Sigma}, \quad \text{mit } \boldsymbol{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \quad (7.48)$$

und es ist einfach zu zeigen, daß $u^{(1)}$ beispielsweise *kein* Eigenzustand von Σ_z ist. Wenn wir jedoch die z -Achse so orientieren, daß sie entlang der Bewegungsrichtung zeigt (das heißt $p_x = p_y = 0$), dann sind $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ und $u^{(4)}$ Eigenspinoren von S_z ; $u^{(1)}$ und $u^{(3)}$ sind Spin up, und $u^{(2)}$ und $u^{(4)}$ sind Spin down* (Aufgabe 7.6).

Weiter oben sagte ich, daß E und \mathbf{p} [in Gl. (7.31)] mathematische Parameter sind, die physikalisch mit Energie und Impuls übereinstimmen, und das ist für die Elektronenzustände $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ auch völlig richtig. Das E in $u^{(3)}$ und $u^{(4)}$ kann hingegen *nicht* für die Energie eines Positrons stehen; alle freien Teilchen, ob Positron oder Elektron, haben *positive* Energien. Die Lösungen mit „negativer Energie“ müssen neu interpretiert werden als Zustände von *Antiteilchen positiver* Energie. Um diese Lösungen

*In der Tat ist es *unmöglich*, Spinoren zu konstruieren, die Gleichung (7.34) erfüllen und gleichzeitig Eigenzustände von S_z sind (mit Ausnahme des Spezialfalls $\mathbf{p} = p_z \hat{z}$). Der Grund dafür ist, daß \mathbf{S} selbst keine Erhaltungsgröße ist; nur der Gesamtdrehimpuls $\mathbf{L} + \mathbf{S}$ ist erhalten (vgl. Aufgabe 7.8). Es *ist* möglich, Eigenzustände der *Helizität* $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ zu konstruieren (es gibt keinen *Bahndrehimpuls* um die Bewegungsrichtung), aber diese sind eher unhandlich (vgl. Aufgabe 7.7), und in der Praxis ist es leichter, mit den Spinoren (7.46) zu arbeiten, obgleich ihre physikalische Interpretation nicht sauber ist. Alles, was *wirklich* zählt, ist, einen *vollständigen* Satz von Lösungen zu haben.

durch die *physikalische* Energie und den Impuls des Positrons auszudrücken, ändern wir die Vorzeichen von E und \mathbf{p} :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = ae^{i/\hbar(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} u(-E, -\mathbf{p}) \quad [\text{für die Lösungen (3) und (4)}] \quad (7.49)$$

Notabene: Das sind immer noch dieselben alten Lösungen der Dirac-Gleichung; ich habe lediglich eine andere Vorzeichenkonvention für die Parameter angenommen – eine, die besser zu ihrer physikalischen Interpretation paßt.* Es ist üblich, den Buchstaben v für Positronzustände zu benutzen, ausgedrückt in physikalischer Energie und Impuls:†

$$v^{(1)}(E, \mathbf{p}) = u^{(4)}(-E, -\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{E+mc^2}} N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x - ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{c(-p_x)}{E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v^{(2)}(E, \mathbf{p}) = -u^{(3)}(-E, -\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{E+mc^2}} N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x)}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(mit $E = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}$) (7.50)

Von jetzt an werde ich $u^{(3)}$ und $u^{(4)}$ nie wieder erwähnen; die Lösungen, die wir benutzen werden, sind $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ (die die zwei Spinzustände eines Elektrons mit Energie E und Impuls \mathbf{p} darstellen) und $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ (für die beiden Spinzustände eines Positrons mit Energie E und Impuls \mathbf{p}). Beachten Sie: Während die u 's die Impulsraum-Dirac-Gleichung (7.34) in der Form

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0 \quad (7.34)$$

erfüllen, sind die v 's mit umgekehrtem Vorzeichen von p_μ Lösungen der Gleichung

$$(\gamma^\mu p_\mu + mc)v = 0 \quad (7.51)$$

Ebene Wellen sind übrigens ziemlich spezielle Lösungen der Dirac-Gleichung. Sie sind allerdings die, für die wir uns interessieren, weil sie Teilchen mit bestimmten Energien und Impulsen beschreiben, und dies sind in einem typischen Experiment die kontrollier- und meßbaren Parameter.

*Wenn es Sie stört, die Schreibweise „mittendrin“ so einfach zu ändern, gehen Sie zurück zu Gleichung (7.32) und nennen Sie es gar nicht erst p^μ – nennen Sie es k^μ (oder ähnlich). Setzen Sie dann am Ende $k^0 = E/c$, $\mathbf{k} = \mathbf{p}$ für die Lösungen (1) und (2), $k^0 = -E/c$, $\mathbf{k} = -\mathbf{p}$ für die Lösungen (3) und (4).

†Normalerweise wird $v^{(1)}$ mit $u^{(4)}$ und $v^{(2)}$ mit $-u^{(3)}$ assoziiert. Im speziellen Fall $p_x = p_y = 0$ ist dann $v^{(1)}$ Spin *down* und $v^{(2)}$ ist Spin *up*. Das erscheint zunächst albern, aber es gibt einen Grund dafür: Der Operator für die Ladungskonjugation führt ein Elektron mit Spin *up* in ein Positron mit Spin *down* über, so daß auf diese Weise $u^{(1)}$, $v^{(1)}$ „Teilchen-Antiteilchen-Paare“ sind wie auch $u^{(2)}$, $v^{(2)}$ (vgl. Aufgabe 7.9).

7.3 Bilineare Kovarianten

In Abschnitt 7.1 habe ich erwähnt, daß sich die Komponenten eines Dirac-Spinors nicht wie ein Vierervektor transformieren, wenn man von einem Inertialsystem zu einem anderen übergeht. Wie aber transformieren sie sich *dann*? Ich werde das hier nicht ausarbeiten, sondern lediglich das Ergebnis angeben:² Wenn wir zu einem System übergehen, das sich mit der Geschwindigkeit v in x -Richtung bewegt, so lautet die Transformationsregel

$$\psi \rightarrow \psi' = S\psi \quad (7.52)$$

worin S die folgende 4×4 -Matrix ist:

$$S = a_+ + a_- \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} a_+ & a_- \sigma_1 \\ a_- \sigma_1 & a_+ \end{pmatrix} \quad (7.53)$$

mit

$$a_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma \pm 1)} \quad (7.54)$$

und, wie gewohnt, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Nehmen wir an, wir wollen eine skalare Größe aus einem Spinor ψ konstruieren. Es wäre nur natürlich, den Ausdruck

$$\psi^\dagger \psi = (\psi_1^* \psi_2^* \psi_3^* \psi_4^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \quad (7.55)$$

zu versuchen. Leider ist das *kein* Skalar, wie sich durch Anwenden der vorstehenden Transformationsregel leicht prüfen läßt:*

$$(\psi^\dagger \psi)' = (\psi')^\dagger \psi' = \psi^\dagger S^\dagger S \psi \neq (\psi^\dagger \psi) \quad (7.56)$$

Tatsächlich ist (vgl. Aufgabe 7.11):

$$S^\dagger S = S^2 = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \sigma_1 \\ -\frac{v}{c} \sigma_1 & 1 \end{pmatrix} \neq 1 \quad (7.57)$$

Natürlich ist auch die Summe der Quadrate der Elemente eines Vierervektors nicht invariant; für die räumlichen Komponenten brauchen wir Minuszeichen [Gl. (3.12)]. Mit etwas Ausprobieren werden Sie entdecken, daß wir im Fall der Spinoren Minuszeichen

*Beachten Sie, daß die Transponierte eines Produkts das Produkt der Transponierten in *umgekehrter Reihenfolge* ist:

$$(AB)_{ij}^T = (AB)_{ji} = A_{jk} B_{ki} = B_{ik}^T A_{kj}^T = (B^T A^T)_{ij}$$

Dasselbe gilt für die hermitesche Konjugierte:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

für die dritte und vierte Komponente brauchen. Gerade so, wie wir *kovariante* Vierervektoren einföhrten, um in Kapitel 3 die Vorzeichen im Auge zu behalten, föhren wir nun den *adjungierten* Spinor ein:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^* \ \psi_2^* \ -\psi_3^* \ -\psi_4^*) \quad (7.58)$$

Ich behaupte, daß die GröÙe

$$\bar{\psi} \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2 \quad (7.59)$$

eine relativistische Invariante *ist*. Denn $S^\dagger \gamma^0 S = \gamma^0$ (Aufgabe 7.11) und folglich ist

$$(\bar{\psi} \psi)' = (\psi')^\dagger \gamma^0 \psi' = \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 S \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = \bar{\psi} \psi \quad (7.60)$$

In Kapitel 4 haben wir Skalare von *Pseudoskalaren* gemäß ihres Verhaltens unter der Paritätstransformation zu unterscheiden gelernt: $P : (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$. Pseudoskalare ändern ihr Vorzeichen; Skalare tun das nicht. Es ist nur natürlich, sich zu fragen, ob $\bar{\psi} \psi$ von der ersten oder zweiten Art ist. Zuerst müssen wir wissen, wie sich Dirac-Spinoren unter P transformieren. Wieder werde ich keine Herleitung liefern, sondern einfach das Ergebnis hinschreiben:³

$$\psi \rightarrow \psi' = \gamma^0 \psi \quad (7.61)$$

Daraus folgt, daß

$$(\bar{\psi} \psi)' = (\psi')^\dagger \gamma^0 \psi' = \psi^\dagger (\gamma^0)^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = \bar{\psi} \psi \quad (7.62)$$

und somit ist $(\bar{\psi} \psi)$ *invariant* unter P ; es ist ein „echter“ Skalar. Aber wir können aus ψ *auch* einen *Pseudoskalar* machen:

$$\bar{\psi} \gamma^5 \psi \quad (7.63)$$

mit

$$\gamma^5 \equiv i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.64)$$

Ich werde Sie prüfen lassen, ob er Lorentz-invariant ist (Aufgabe 7.12). Was sein Verhalten unter der Paritätsoperation angeht, so gilt

$$(\bar{\psi} \gamma^5 \psi)' = (\psi')^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \psi' = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \gamma^5 \gamma^0 \psi \quad (7.65)$$

(Ich habe den Umstand ausgenutzt, daß $(\gamma^0)^2 = 1$ ist.) Nun ist das γ^0 auf der „falschen Seite“ von γ^5 , aber wir können es „nach vorn ziehen“, wenn wir beachten, daß es mit γ^1 , γ^2 und γ^3 *antikommutiert* [Gl. (7.15)] und mit sich selbst (natürlich) *kommutiert* ($\gamma^3 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^3$, $\gamma^2 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^2$, $\gamma^1 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^1$, $\gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0$), so daß gilt

$$\gamma^5 \gamma^0 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^0 = (-1)^3 \gamma^0 (i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) = -\gamma^0 \gamma^5$$

Auf dieselbe Weise antikommutiert γ^5 mit allen anderen γ -Matrizen:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \quad (7.66)$$

Wie auch immer, es gilt

$$(\bar{\psi}\gamma^5\psi)' = -\psi^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi = -(\bar{\psi}\gamma^5\psi) \quad (7.67)$$

also ist es ein *Pseudoskalar*.

Alles zusammengenommen, gibt es 16 Produkte von der Art $\psi_i^*\psi_j$ (jeweils eine Komponente von ψ^* und eine von ψ), da i und j von 1 bis 4 laufen. Diese 16 Komponenten können in verschiedenen Linearkombinationen zusammenaddiert werden, um Größen mit bestimmten, und zwar den folgenden Arten des Transformationsverhaltens zu erhalten:

$$\left. \begin{array}{ll} (1) \quad \bar{\psi}\psi = \text{Skalar} & \text{(eine Komponente)} \\ (2) \quad \bar{\psi}\gamma^5\psi = \text{Pseudoskalar} & \text{(eine Komponente)} \\ (3) \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \text{Vektor} & \text{(vier Komponenten)} \\ (4) \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi = \text{axialer Vektor} & \text{(vier Komponenten)} \\ (5) \quad \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi = \text{antisymmetrischer Tensor} & \text{(sechs Komponenten)} \end{array} \right\} \quad (7.68)$$

mit

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \quad (7.69)$$

Das liefert uns 16 Terme, so daß wir auf diese Weise alle möglichen Kombinationen gefunden haben. Man kann zum Beispiel keinen *symmetrischen* Tensor konstruieren, der bezüglich ψ^* und ψ bilinear wäre, und sucht man nach einem Vektor, so ist $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ der einzige Kandidat.* (Eine weitere Betrachtungsweise ist diese: 1, γ^5 , γ^μ , $\gamma^\mu\gamma^5$ und $\sigma^{\mu\nu}$ bilden eine „Basis“ für den Raum aller 4×4 -Matrizen; jede 4×4 -Matrix kann als Linearkombination dieser 16 Terme geschrieben werden. Sollten Sie insbesondere jemals auf ein Produkt von vielleicht fünf γ -Matrizen stoßen, so können Sie sicher sein, daß es auf das Produkt von lediglich zwei reduziert werden kann.) Verweilen Sie ein wenig, um die Schreibweise in (7.68) zu bewundern. Der tensorielle Charakter der *bilinearen Kovarianten* und sogar ihr Verhalten unter der Paritätsoperation werden auf einen Blick deutlich: $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ sieht wie ein Vierervektor aus und ist auch einer. Aber γ^μ für sich ist sicherlich kein Vierervektor; es ist ein Satz von vier festen Matrizen (7.17); sie verändern sich nicht, wenn man zwischen unterschiedlichen Inertialsystemen wechselt – es ist ψ , das sich ändert.

7.4 Das Photon

In der klassischen Elektrodynamik werden das elektrische und magnetische Feld (\mathbf{E} und \mathbf{B}) durch eine Ladungsdichte ρ und eine Stromdichte \mathbf{J} hervorgerufen, die durch

Beachten Sie, daß $\bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi$ ist, so daß $\psi^\dagger\psi$ eigentlich die nullte Komponente eines Vierervektors darstellt. Das ist der Grund, warum die Normierungskonvention (7.44), die zweifellos seinerzeit merkwürdig anmutete, tatsächlich sehr vernünftig ist. Indem wir $u^\dagger u$ auf die nullte Komponente des Vierervektors p^μ normieren, erhalten wir eine relativistisch „neutrale“ Konvention (vgl. Aufgabe 7.14). Übrigens hat ψ^ψ wie auch in der nicht-relativistischen Quantenmechanik die Einheit (Volumen) $^{-1}$, so daß die Konstante a in Gleichung (7.31) die Einheit $mc(\hbar^{-3/2})$ hat.

die Maxwell-Gleichungen bestimmt sind:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho & (iii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ (ii) \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 & (iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \end{array} \right\} \quad (7.70)$$

In relativistischer Schreibweise bilden \mathbf{E} und \mathbf{B} zusammen einen antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe, den „Feldstärketensor“ $F^{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7.71)$$

(das heißt, $F^{01} = -E_x$, $F^{12} = -B_z$ usw.), während ρ und \mathbf{J} einen Vierervektor bilden:

$$J^\mu = (c\rho, \mathbf{J}) \quad (7.72)$$

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen [(i) und (iv)] können nun noch eleganter geschrieben werden (Aufgabe 7.18):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (7.73)$$

Aus der Asymmetrie von $F^{\mu\nu}$ (das heißt: $F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}$) folgt (Aufgabe 7.18), daß J^μ divergenzlos ist:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (7.74)$$

Oder, in der Dreiervektor-Schreibweise: $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial\rho/\partial t$; dies ist die „Kontinuitätsgleichung“, die die lokale Ladungserhaltung ausdrückt (Aufgabe 7.19).

Was die homogenen Maxwell-Gleichungen angeht, so ist (iii) äquivalent zu der Aussage, daß \mathbf{B} als die Rotation eines Vektorpotentials \mathbf{A} geschrieben werden kann:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (7.75)$$

Damit wird (ii) zu

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (7.76)$$

was gleichbedeutend damit ist, daß $\mathbf{E} + (1/c)(\partial\mathbf{A}/\partial t)$ als Gradient eines skalaren Potentials V geschrieben werden kann:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (7.77)$$

In relativistischer Schreibweise werden die Gleichungen (7.75) und (7.77) zu

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (7.78)$$

*Dieser Abschnitt setzt einige Vertrautheit mit der klassischen Elektrodynamik voraus; die Absicht ist, die Beschreibung von Photonen in der Quantenelektrodynamik plausibler zu machen, aber wenn Sie das nicht verstehen, sollten Sie direkt zu Abschnitt 7.5 weitergehen. Wie immer benutze ich (CGS-) Gauß-Einheiten.

mit

$$A^\mu = (V, \mathbf{A}) \quad (7.79)$$

In Abhängigkeit dieses Viererpotentials lauten die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (7.73):

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (7.80)$$

In der klassischen Elektrodynamik sind die *Felder* die physikalischen Größen; die Potentiale sind lediglich nützliche mathematische Konstruktionen. Der *Vorteil* der Formulierung über Potentiale liegt darin, daß sie *automatisch* die homogenen Maxwell-Gleichungen berücksichtigen: Sind Gleichungen (7.75) und (7.77) erfüllt, folgen (ii) und (iii) augenblicklich, egal, wie V und \mathbf{A} aussehen mögen. Damit bleibt uns lediglich die inhomogene Gleichung (7.80), um die wir uns Sorgen machen müssen. Der *Nachteil* der Formulierung über Potentiale ist, daß V und \mathbf{A} nicht eindeutig bestimmt sind. In der Tat macht Gleichung (7.78) deutlich, daß neue Potentiale der Form

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda \quad (7.81)$$

(worin λ irgendeine Funktion von Ort und Zeit ist) das gleiche leisten würden, da $\partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ ist. Eine solche Potentialänderung, die keine Auswirkung auf die Felder hat, wird *Eichtransformation* genannt. Wir können diese Eichfreiheit ausnutzen, um eine weitere Forderung an das Potential zu stellen:⁴

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (7.82)$$

Dies ist die *Lorentz-Konvention*; mit ihr werden die Maxwell-Gleichungen (7.80) noch einfacher:

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu \quad (7.83)$$

Hierin ist $\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$; das ist der sogenannte *d'Alembert-Operator*.

Selbst die Lorentz-Konvention spezifiziert A^μ jedoch nicht vollständig. Weitere Eichtransformationen sind möglich, ohne daß Gleichung (7.82) verändert wird, vorausgesetzt, daß die Eichfunktion λ die Wellengleichung erfüllt:

$$\square \lambda = 0 \quad (7.84)$$

Leider gibt es keinen sauberen Weg, die verbleibende Mehrdeutigkeit von A^μ zu eliminieren, und man kann entweder (1) mit der Unbestimmtheit leben, was bedeutet, daß man unechte Freiheitsgrade mitschleppt, oder (2) eine weitere Einschränkung einführen, die die offenkundige Lorentz-Kovarianz der Theorie verdirbt. Beide Ansätze sind bei der Formulierung der Quantenelektrodynamik verwendet worden; wir werden der zweiten Variante folgen. Im Vakuum, wo $J^\mu = 0$ ist, wählen wir (vgl. Aufgabe 7.20)

$$A^0 = 0 \quad (7.85)$$

Die Lorentz-Konvention lautet dann

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (7.86)$$

Diese Wahl (die *Coulomb-Eichung*) ist sympathisch einfach, aber indem wir eine Komponente (A^0) explizit festlegen, beschränkt sie uns auf ein bestimmtes Inertialsystem (oder zwingt uns, mit jeder Lorentz-Transformation eine Eichtransformation vorzunehmen, um die Coulomb-Eichbedingung wiederherzustellen). In der Praxis ist das sehr selten problematisch, aber von einem ästhetischen Standpunkt aus ist es unbefriedigend.

In der Quantenelektrodynamik wird A^μ die Wellenfunktion des Photons. Das freie Photon erfüllt Gleichung (7.83) mit $J^\mu = 0$

$$\square A^\mu = 0 \quad (7.87)$$

die wir in diesem Zusammenhang als Klein-Gordon-Gleichung (7.9) für ein masseloses Teilchen erkennen. Wie im Fall der Dirac-Gleichung suchen wir nach Lösungen ebener Wellen mit dem Impuls $p = (E/c, \mathbf{p})$:

$$A^\mu(x) = a e^{-(i/\hbar)p \cdot x} \epsilon^\mu(p) \quad (7.88)$$

Hier ist ϵ^μ der *Polarisationsvektor* – er charakterisiert den Spin des Photons – und a ist ein Normierungsfaktor. Einsetzen von Gleichung (7.88) in Gleichung (7.87) liefert eine Einschränkung von p^μ :

$$p^\mu p_\mu = 0, \quad \text{so daß } E = |\mathbf{p}|c \quad (7.89)$$

die, wie es sein sollte, für ein masseloses Teilchen gilt.

ϵ^μ seinerseits hat vier Komponenten, die aber nicht alle unabhängig sind. Die Lorentz-Konvention (7.82) verlangt, daß

$$p^\mu \epsilon_\mu = 0 \quad (7.90)$$

ist. Darüber hinaus haben wir in der Coulomb-Eichung

$$\epsilon^0 = 0, \quad \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p} = 0 \quad (7.91)$$

das heißt, daß der Polarisations-Dreiervektor ($\boldsymbol{\epsilon}$) senkrecht auf der Bewegungsrichtung steht; wir sagen, daß ein freies Photon *transversal polarisiert* ist. Aus diesem Grund ist die Coulomb-Eichung auch unter dem Namen *transversale Eichung* bekannt. Nun gibt es zwei linear unabhängige Dreiervektoren, die senkrecht auf \mathbf{p} stehen; wenn \mathbf{p} beispielsweise in die z -Richtung zeigt, könnten wir

$$\boldsymbol{\epsilon}_{(1)} = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{\epsilon}_{(2)} = (0, 1, 0) \quad (7.92)$$

wählen. Folglich bleiben uns anstelle von *vier* unabhängigen Lösungen für einen gegebenen Impuls (zu viele für ein Teilchen mit Spin 1) lediglich *zwei*. Das scheint zu *wenige* zu sein: sollte das Photon nicht *drei* Spinzustände haben? Die Antwort ist *Nein*: ein *massives* Teilchen mit Spin s erlaubt $2s+1$ verschiedene Spinorientierungen, aber ein *masseloses* Teilchen hat, unabhängig von seinem Spin (mit Ausnahme von $s = 0$, mit lediglich *einer*) nur zwei Orientierungen. Entlang seiner Bewegungsrichtung kann es nur $m_s = +s$ oder $m_s = -s$ haben; seine Helizität kann, mit anderen Worten, nur $+1$ oder -1 betragen.*

*Photonzustände mit $m_s = \pm 1$ entsprechen rechts- und links-zirkularer Polarisation; die entspre-

7.5 Die Feynman-Regeln für die Quantenelektrodynamik

In Abschnitt 7.2 fanden wir, daß freie Elektronen und Positronen mit Impuls $p = (E/c, \mathbf{p})$, $E = \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}$, durch folgende Wellenfunktionen dargestellt werden:*

$$\begin{array}{cc} \text{Elektronen} & \text{Positronen} \\ \psi(x) = a e^{-(i/\hbar)p \cdot x} u^{(s)}(p) & \psi(x) = a e^{(i/\hbar)p \cdot x} v^{(s)}(p) \end{array} \quad (7.93)$$

worin $s = 1, 2$ für die beiden Spinzustände steht. Die Spinoren $u^{(s)}$ und $v^{(s)}$ erfüllen die *Impulsraum-Dirac-Gleichungen*:

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0 \quad (\gamma^\mu p_\mu + mc)v = 0 \quad (7.94)$$

und ihre *Adjungierten*, $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$, $\bar{v} = v^\dagger \gamma^0$, erfüllen

$$\bar{u}(\gamma^\mu p_\mu - mc) = 0 \quad \bar{v}(\gamma^\mu p_\mu + mc) = 0$$

Sie sind *orthogonal*

$$\bar{u}^{(1)}u^{(2)} = 0 \quad \bar{v}^{(1)}v^{(2)} = 0 \quad (7.95)$$

normiert

$$\bar{u}u = 2mc \quad \bar{v}v = -2mc \quad (7.96)$$

und *vollständig* insofern, als

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}\bar{u}^{(s)} = (\gamma^\mu p_\mu + mc) \quad \sum_{s=1,2} v^{(s)}\bar{v}^{(s)} = (\gamma^\mu p_\mu - mc) \quad (7.97)$$

gilt (vgl. Aufgabe 7.22). Die Gleichungen (7.46) und (7.50) geben einen bequemen expliziten Satz ($u^{(1)}, u^{(2)}, v^{(1)}, v^{(2)}$) an. Für gewöhnlich werden wir über Elektron- und Positronspin mitteln, und so ist es nicht weiter wichtig, daß es sich dabei um keine reinen Spin-up- und Spin-down-Zustände handelt; alles, was wir wirklich brauchen, ist Vollständigkeit. Für das bisweilen vorkommende Problem, daß die Spins festgelegt sind, müssen wir natürlich die entsprechenden Spinoren für den jeweiligen Fall benutzen.

chenden Polarisationsvektoren sind $\epsilon_\pm = \mp(\epsilon_1 \pm i\epsilon_2)/\sqrt{2}$. Beachten Sie, daß wir die unphysikalische Lösung ($m_s = 0$) durch die Festlegung einer bestimmten Eichung eliminieren. Würden wir einen „kovarianten“ Ansatz erlauben, in dem wir es vermeiden, die Coulomb-Eichbedingungen anzuwenden, gäbe es in der Theorie longitudinal freie Photonen. Aber diese „Geister“ koppeln an gar nichts und beeinträchtigen die Endergebnisse in keinsten Weise.

*Um diesen Abschnitt für späteres Nachschlagen so abgeschlossen wie möglich zu halten und um gleichsam die Ähnlichkeiten und Unterschiede in den Theorien von Elektronen, Positronen und Photonen zu betonen, beginne ich mit einer Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse früherer Abschnitte. Der Prägnanz halber spreche ich von „Elektronen“ und „Positronen“, aber es könnten genauso gut μ^- und μ^+ oder τ^- und τ^+ oder (mit den entsprechenden elektrischen Ladungen) Quarks und Antiquarks sein – kurz, jegliche Punktladung mit Spin $\frac{1}{2}$.

Ein freies *Photon* mit Impuls $p = (E/c, \mathbf{p})$, $E = |\mathbf{p}|c$, wird seinerseits durch die Wellenfunktion

Photonen

$$A^\mu(x) = ae^{-(i/\hbar)\mathbf{p}\cdot x} \epsilon_{(s)}^\mu \quad (7.98)$$

dargestellt, worin $s = 1, 2$ für die Spinzustände (oder „Polarisierungen“) des Photons steht. Die Polarisationsvektoren $\epsilon_{(s)}^\mu$ genügen der *Impulsraum-Lorentz-Konvention*:

$$\epsilon^\mu p_\mu = 0 \quad (7.99)$$

Sie sind *orthogonal* insofern, als daß

$$\epsilon_{(1)}^{\mu*} \epsilon_{\mu(2)} = 0 \quad (7.100)$$

gilt und *normiert*

$$\epsilon^{\mu*} \epsilon_\mu = 1 \quad (7.101)$$

In der Coulomb-Eichung gilt

$$\epsilon^0 = 0, \quad \epsilon \cdot \mathbf{p} = 0 \quad (7.102)$$

und die Polarisations-Dreiervektoren gehorchen der Vollständigkeitsrelation (Aufgabe 7.23)

$$\sum_{s=1,2} (\epsilon_{(s)})_i (\epsilon_{(s)}^*)_j = \delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j \quad (7.103)$$

Ein nützliches explizites Paar $(\epsilon_{(1)}, \epsilon_{(2)})$ ist in Gleichung (7.92) angegeben.

Um die Amplitude \mathcal{M} , die zu einem bestimmten Feynman-Diagramm gehört, zu berechnen, gehe man wie folgt vor:

1. *Schreibweise.* Numerieren Sie die ein- und auslaufenden Viererimpulse p_1, p_2, \dots, p_n und die zugehörigen Spins s_1, s_2, \dots, s_n durch; numerieren Sie die internen Viererimpulse q_1, q_2, \dots . Weisen Sie den Linien wie folgt Pfeile zu: die Pfeile an *externen* Linien zeigen an, ob es sich um ein Elektron oder ein Positron handelt; Pfeile an *internen* Linien werden so zugeordnet, daß die „Flußrichtung“ durch das Diagramm erhalten bleibt (d.h., jeder Vertex muß einen einlaufenden und einen auslaufenden Pfeil besitzen). Die Pfeile an externen Linien von Photonen zeigen „vorwärts“; für interne Linien von Photonen ist die Wahl freigestellt. (Vgl. Abb. 7.1.)

2. *Externe Linien.* Externe Linien tragen folgende Faktoren bei:

$$\begin{array}{l} \text{Elektronen:} \\ \text{Positronen:} \\ \text{Photonen:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Einlaufend (} \nearrow \text{) : } u \\ \text{Auslaufend (} \searrow \text{) : } \bar{u} \\ \text{Einlaufend (} \nearrow \text{) : } \bar{v} \\ \text{Auslaufend (} \searrow \text{) : } v \\ \text{Einlaufend (} \nearrow \text{) : } \epsilon^\mu \\ \text{Auslaufend (} \searrow \text{) : } \epsilon^{\mu*} \end{array} \right.$$

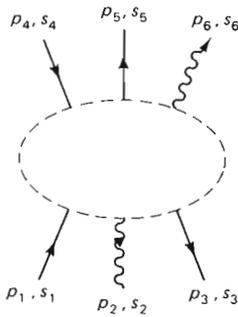


Abbildung 7.1: Ein typisches QED-Diagramm mit durchnummerierten externen Linien. (Interne Linien sind nicht abgebildet.)

3. *Vertexfaktoren.* Jeder Vertex trägt einen Faktor

$$ig_e \gamma^\mu$$

bei. Die dimensionslose Kopplungskonstante g_e hängt mit der Ladung eines Positrons zusammen: $g_e = e\sqrt{4\pi/\hbar c} = \sqrt{4\pi\alpha}$.*

4. *Propagatoren.* Jede interne Linie trägt einen Faktor bei wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Elektronen und Positronen:} & \quad \frac{i(\gamma^\mu q_\mu + mc)}{q^2 - m^2 c^2} \\ \text{Photonen:} & \quad \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \end{aligned}$$

5. *Energie- und Impulserhaltung.* Schreiben Sie für jeden Vertex eine Deltafunktion der Form

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3)$$

worin die k 's die in den Vertex einlaufenden Viererimpulse sind (sofern ein Pfeil *auswärts* zeigt, ist k der negative Viererimpuls der Linie, es sei denn, es handelt sich um *auslaufende* Positronen[†]). Dieser Faktor sorgt für die Erhaltung der Energie und des Impulses am Vertex.

*In Heaviside-Lorentz-Einheiten, wo \hbar und c gleich 1 gesetzt sind, ist g_e die Ladung des Positrons und wird daher in den meisten Texten mit „ e “ bezeichnet. Ich verwende in diesem Buch Gauß-Einheiten und behalte alle Faktoren \hbar und c bei. Der einfachste Weg, Schwierigkeiten mit den richtigen Einheiten zu vermeiden, ist, alle Ergebnisse in Abhängigkeit der universellen, dimensionslosen Größe α auszudrücken. Indem ich die Feynman-Regeln für die QED hinschreibe, setze ich voraus, daß wir es mit Elektronen und Positronen zu tun haben. Im *allgemeinen* ist die Kopplungskonstante der QED $-q\sqrt{4\pi/\hbar c}$, worin q die Ladung des *Teilchens* (im Gegensatz zum *Antiteilchen*) ist. Für Elektronen wäre $q = -e$, aber für „up“-Quarks, zum Beispiel, wäre $q = \frac{2}{3}e$.

[†]Das Problem an dieser Stelle ist, daß von den Pfeilen verlangt wird, zwei Pflichten zu erfüllen: Sie bedingen die Konvention für das Vorzeichen des Impulses, und im Fall von externen Fermionlinien sagen sie einem, ob es sich um ein Teilchen oder ein Antiteilchen handelt (bei internen Linien brauchen wir diese Unterscheidung nicht). Letztere Rolle hat den Vorrang, so daß die „positive“ Richtung für den Impuls externer Positronen der Richtung des Pfeils *entgegengesetzt* ist.

6. *Integration über interne Impulse.* Schreiben Sie für jeden internen Impuls q einen Faktor

$$\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$$

und integrieren Sie.

7. *Streichen der Deltafunktion.* Das Ergebnis wird einen Faktor enthalten von der Art

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p_n)$$

der der allgemeinen Energie-Impulserhaltung entspricht. Streichen Sie diesen Faktor, und übrig bleibt $-i\mathcal{M}$.

Wie zuvor ist das Procedere, alle Diagramme aufzuschreiben, die zu dem fraglichen Prozeß beitragen (bis zu der gewünschten Ordnung), die Amplitude (\mathcal{M}) für jedes zu berechnen und sie danach zur *Gesamtamplitude* aufzuaddieren, die anschließend in die entsprechende Formel für den Wirkungsquerschnitt oder die Lebensdauer eingesetzt wird. Es gibt lediglich eine Neuerung: Die Antisymmetrisierung der Fermion-Wellenfunktion bedingt, daß wir bei der Kombination von Amplituden, die sich allein durch den Austausch zweier identischer externer Fermionen unterscheiden, ein Minuszeichen einsetzen. Es ist völlig egal, *welchem* Diagramm Sie das Minuszeichen zurechnen, da der Gesamtwert schließlich ohnehin quadriert wird; aber zwischen den beiden muß es ein *relatives* Minuszeichen geben.

8. *Antisymmetrisierung.* Führen Sie ein Minuszeichen zwischen zwei Diagrammen ein, die sich lediglich durch den Austausch zweier einlaufender (oder auslaufender) Elektronen (oder Positronen) oder eines einlaufenden Elektrons mit einem auslaufenden Positron (oder umgekehrt) unterscheiden.

Wie Fermion-Schleifen zu behandeln sind, wird in den letzten Abschnitten dieses Kapitels besprochen werden.

7.6 Beispiele

Wir sind nun in der Lage, viele der klassischen Rechnungen der Quantenelektrodynamik zu reproduzieren. Damit Sie sich nicht zu sehr im Detail verlieren, lassen Sie mich damit beginnen, Ihnen einen Katalog der wichtigsten Prozesse zu nennen (siehe Tabelle 7.1). Der einfachste Fall ist die Elektron-Myon-Streuung, denn hier trägt nur ein Diagramm zweiter Ordnung bei.*

*Es müssen natürlich kein e und μ sein. Jede Spin- $\frac{1}{2}$ -Punktladung ist möglich (e und τ zum Beispiel oder μ und τ oder Elektron und Quark etc.), solange man die richtigen Massen und Ladungen einsetzt. Tatsächlich wird in den meisten Büchern Elektron-Proton-Streuung als kanonisches Beispiel benutzt, aber das ist eigentlich eine eher *unpassende* Wahl, da das Proton eine Substruktur besitzt und also kein Punktteilchen ist. Soweit die interne Struktur des Protons allerdings ignoriert werden kann, ist es keine schlechte *Näherung* (es ist etwa so, als würde man die Sonne als Punktmasse in der Theorie des Sonnensystems behandeln). In dem Bereich, in dem das „Myon“ sehr viel schwerer als das „Elektron“ ist, liegt *Mott-Streuung* vor; wenn das „Elektron“ darüber hinaus nicht-relativistisch ist, reduziert sie sich auf die *Rutherford-Streuung* und ergibt sogar genau dieselbe Formel für den Wirkungsquerschnitt, wie sie Rutherford unter Verwendung der klassischen Mechanik fand.



Anhang C

Pauli- und Dirac-Matrizen

C.1 Pauli-Matrizen

Es sind drei hermitesche, unitäre, spurlose 2×2 -Matrizen:

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

(Häufig benutzen wir *numerische* Indizes: $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$, $\sigma_3 = \sigma_z$; σ gehört nicht zu einem 4-Vektor, und wir unterscheiden nicht zwischen oberen und unteren Indizes: $\sigma_1 = \sigma^1$, $\sigma_2 = \sigma^2$, $\sigma_3 = \sigma^3$.)

(a) Produktregeln.

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (\text{C.2})$$

(Eine 2×2 -Einheitsmatrix ist mit dem ersten Term und die Summation über k ist im zweiten gemeint). Somit gilt insbesondere:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1 \quad (\text{C.3})$$

$$\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z, \quad \sigma_y \sigma_z = i\sigma_x, \quad \sigma_z \sigma_x = i\sigma_y \quad (\text{C.4})$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k \quad (\text{Kommutator}) \quad (\text{C.5})$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \quad (\text{Antikommutator}) \quad (\text{C.6})$$

und für zwei beliebige Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b}

$$(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (\text{C.7})$$

(b) Exponentialgrößen.

$$e^{i\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \cos \theta + i\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin \theta \quad (\text{C.8})$$

C.2 Dirac-Matrizen

Es sind vier unitäre, spurlose 4×4 -Matrizen:

$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma^i \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.9})$$

(1 ist hier die 2×2 -Einheitsmatrix, und 0 ist die 2×2 -Nullmatrix; die σ^i sind die Pauli-Matrizen. Das Senken der Indizes ändert das Vorzeichen der „räumlichen“ Komponenten: $\gamma_0 = \gamma^0$, $\gamma_i = -\gamma^i$.) Wir führen noch die Hilfsmatrizen ein:

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (\text{C.10})$$

$$\Sigma \equiv \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \quad (\text{C.12})$$

Für jeden 4-Vektor a^μ definieren wir die 4×4 -Matrix \not{a} wie folgt:

$$\not{a} \equiv a_\mu\gamma^\mu \quad (\text{C.13})$$

(a) *Produktregeln.* In Abhängigkeit der Metrik

$$g^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$

(beachten Sie, daß $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$ ist) haben wir:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2a \cdot b \quad (\text{C.15})$$

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4 \quad (\text{C.16})$$

$$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu = -2\gamma^\nu, \quad \gamma_\mu\not{a}\gamma^\mu = -2\not{a} \quad (\text{C.17})$$

$$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu = 4g^{\nu\lambda}, \quad \gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma^\mu = 4a \cdot b \quad (\text{C.18})$$

$$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\nu, \quad \gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a} \quad (\text{C.19})$$

(b) *Spurtheoreme.* Die Spur eines Produkts einer ungeraden Anzahl von γ -Matrizen ist Null.

$$\text{Tr}(1) = 4 \quad (\text{C.20})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \quad \text{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4a \cdot b \quad (\text{C.21})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}) \\ \text{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) &= 4(a \cdot b \cdot c \cdot d - a \cdot c \cdot b \cdot d + a \cdot d \cdot b \cdot c) \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Da γ^5 das Produkt einer geraden Anzahl von γ -Matrizen ist, folgt, daß $\text{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu) = 0$ und $\text{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda) = 0$ sind. Wenn γ^5 mit einer geraden Zahl von γ 's multipliziert wird, erhalten wir

$$\text{Tr}(\gamma^5) = 0 \quad (\text{C.23})$$

$$\text{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) = 0, \quad \text{Tr}(\gamma^5\not{a}\not{b}) = 0 \quad (\text{C.24})$$

$$\text{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) = 4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}, \quad \text{Tr}(\gamma^5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}a_\mu b_\nu c_\lambda d_\sigma \quad (\text{C.25})$$

worin $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = -1$ ist, wenn $\mu\nu\lambda\sigma$ eine gerade Permutation von 0123 ist, +1 für eine ungerade Permutation und 0, wenn zwei beliebige Indizes gleich sind. Beachten Sie, daß

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\epsilon_{\mu\nu\kappa\tau} = -2(\delta_\kappa^\lambda\delta_\tau^\sigma - \delta_\tau^\lambda\delta_\kappa^\sigma) \quad (\text{C.26})$$

ist.