Kapitel 11

Eichtheorien

Dieses Kapitel führt in die „Eichtheorien" ein, von denen man heute glaubt, daß sie allen Wechselwirkungen von Elementarteilchen zugrundeliegen. Ich beginne mit der Lagrangeschen Formulierung der klassischen Mechanik und gehe anschließend weiter zu der Lagrangeschen Feldtheorie, dem Prinzip der lokalen Eichinvarianz, der Vorstellung der spontanen Symmetriebrechung und dem Higgs-Mechanismus (der die Masse der W's und des Z erklärt). Dieses Material ist ziemlich abstrakt (im Gegensatz zu früheren Kapiteln); es betrifft die fundamentalen Quantenfeldtheorien, aus denen die Feynman-Regeln hergeleitet sind. Es wird Ihnen nicht helfen, irgendwelche Wirkungsquerschnitte oder Lebensdauern zu berechnen. Auf der anderen Seite bilden die hier diskutierten Vorstellungen das Fundament, auf dem praktisch alle modernen Theorien gründen. Um dieses Kapitel zu verstehen, wird es für Sie hilfreich sein, die Lagrangesche Mechanik zu kennen, aber wesentlich wichtiger sind die relativistische Schreibweise in Kapitel 3, die Kostprobe an Gruppentheorie in Kapitel 4, der Feynman-Kalkül aus Kapitel 6 und die Dirac-Gleichung aus Kapitel 7.

11.1 Die Lagrangesche Formulierung der klassischen Teilchenmechanik

Gemäß dem zweiten Bewegungsgesetz Newtons erfährt ein Teilchen der Masse m, auf das eine Kraft $\boldsymbol{F}$ wirkt, eine Beschleunigung $\boldsymbol{a}$, die durch

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{11.1}$$

gegeben ist. Wenn die Kraft *konservativ* ist, so kann sie als der Gradient einer skalaren potentiellen Energiefunktion U ausgedrückt werden:

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U \tag{11.2}$$

und das Newtonsche Gesetz lautet dann

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla U \tag{11.3}$$

worin $\boldsymbol{v}$ die Geschwindigkeit ist.[1]
Eine alternative Formulierung der klassischen Mechanik beginnt mit der „Lagrange-Funktion"

$$L = T - U \tag{11.4}$$

worin T die kinetische Energie des Teilchens ist:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \tag{11.5}$$

Die Lagrange-Funktion ist eine Funktion der Koordinaten q_i (etwa $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$) und ihrer zeitlichen Ableitungen $\dot{q}_i$ ($\dot{q}_1 = v_x, \dot{q}_2 = v_y, \dot{q}_3 = v_z$). In der Lagrangeschen Formulierung ist die Euler-Lagrange-Gleichung das fundamentale Bewegungsgesetz:[2]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{11.6}$$

In kartesischen Koordinaten haben wir somit

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial v_x} = m v_x \tag{11.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{11.8}$$

und die Euler-Lagrange-Gleichung liefert (für $i = 1$) die x-Komponente des Newtonschen Gesetzes in der Form von Gleichung (11.3). Die Lagrangesche Formulierung ist folglich der Newtonschen äquivalent (zumindest für konservative Systeme), aber sie hat gewisse theoretische Vorteile, wie wir in den folgenden Abschnitten sehen werden. (Vgl. auch Aufgabe 11.1.)

11.2 Lagrange-Funktionen in der relativistischen Feldtheorie

Ein *Teilchen* ist seiner Natur nach ein *lokalisiertes* Wesen; in der klassischen Mechanik sind wir typischerweise daran interessiert, seinen *Ort* als eine Funktion der Zeit zu berechnen: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Ein *Feld* nimmt auf der anderen Seite eine *Region* des Raumes ein; in der Feldtheorie beschäftigen wir uns mit der Berechnung einer oder mehrerer Funtionen von *Ort und Zeit*: $\phi_i(x, y, z, t)$. Die Feldvariable ϕ_i kann zum Beispiel die Temperatur an jedem Punkt in einem Raum oder das elektrische Potential V oder die drei Komponenten des magnetischen Feldes $\boldsymbol{B}$ sein. In der Teilchenmechanik haben wir eine Lagrange-Funktion L eingeführt, die eine Funktion der Koordinaten q_i und ihrer zeitlichen Ableitungen $\dot{q}_i$ ist; in der Feldtheorie beginnen wir mit einer Lagrange-Funktion (eigentlich einer Lagrange*dichte*) $\mathcal{L}$, die eine Funktion der Felder ϕ_i und ihrer x-, y-, z- und t-Ableitungen ist:

$$\partial_\mu \phi_i \equiv \frac{\partial \phi_i}{\partial x^\mu} \tag{11.9}$$

Im ersten Fall umfaßt die linke Seite der Euler-Lagrange-Gleichung (11.6) nur *zeitliche* Ableitungen; eine *relativistische* Theorie muß Raum- und Zeitkoordinaten auf gleicher Basis behandeln, und die Euler-Lagrange-Gleichungen verallgemeinern, wie man erwarten konnte:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{11.10}$$

Beispiel 11.1 Die Klein-Gordon-Lagrange-Funktion für ein skalares Feld (Spin 0)

Nehmen wir an, wir haben eine einzige, skalare Feldvariable ϕ, und die Lagrange-Funktion ist

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2 \tag{11.11}$$

Für diesen Fall ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \tag{11.12}$$

(Wenn Sie das irritiert, schreiben Sie die Lagrange-Funktion in „Langschrift“:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\partial_0\phi\partial_0\phi - \partial_1\phi\partial_1\phi - \partial_2\phi\partial_2\phi - \partial_3\phi\partial_3\phi] - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2$$

In dieser Form ist klar, daß

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi = \partial^0\phi, \qquad \frac{\partial}{\partial(\partial_1\phi)} = -\partial_1\phi = \partial^1\phi$$

und so weiter sind.) Weiter gilt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi$$

und somit verlangt die Euler-Lagrange-Formel, daß

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi = 0 \tag{11.13}$$

ist, was mit der Klein-Gordon-Gleichung [Gl. (7.9)] übereinstimmt, die (in der Quantenfeldtheorie) ein Teilchen mit Spin 0 und Masse m beschreibt.

Beispiel 11.2 Die Dirac-Lagrange-Funktion für ein Spinorfeld (Spin $\frac{1}{2}$)

Betrachten wir nun ein Spinorfeld ψ und die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = i(\hbar c)\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (mc^2)\bar{\psi}\psi \tag{11.14}$$

Wir behandeln ψ und den adjungierten Spinor $\bar{\psi}$ als unabhängige Feldvariablen.* Anwenden der Euler-Lagrange-Gleichung auf $\bar{\psi}$ ergibt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\psi$$

*Da ψ ein komplexer Spinor ist, gibt es hier sogar *acht* unabhängige Felder (i läuft von 1 bis 8): die reellen und imaginären Anteile jeder der vier Komponenten von ψ. Aber beim Verwenden der Euler-Lagrange-Gleichungen eignet sich jede lineare Kombination dieser acht ebenso gut, und wir wählen für unseren Gebrauch die vier Komponenten von ψ und die vier Komponenten von $\bar{\psi}$.

so daß

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \left(\frac{mc}{\hbar}\right) \psi = 0 \tag{11.15}$$

gilt. Dies ist die Dirac-Gleichung [Gl. (7.20)], die (in der Quantenfeldtheorie) ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ und Masse m beschreibt. Wenn wir weiter die Euler-Lagrange-Gleichung auf ψ anwenden, so erhalten wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -mc^2\bar{\psi}$$

und folglich ist

$$i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right) \bar{\psi} = 0$$

was die Adjungierte der Dirac-Gleichung ist (vgl. Aufgabe 7.13).

Beispiel 11.3 Die Proca-Lagrange-Funktion für ein Vektorfeld (Spin 1)
Nehmen wir schließlich ein Vektorfeld A^μ mit der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu \tag{11.16}$$

an. Hier ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{-1}{4\pi}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \tag{11.17}$$

(vgl. Aufgabe 11.2), und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu \tag{11.18}$$

so daß die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0 \tag{11.19}$$

liefert. Dies wird die Proca-Gleichung genannt; sie beschreibt ein Teilchen mit Spin 1 und Masse m. Übrigens, da die Kombination $(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$ wiederholt in dieser Theorie auftaucht, ist es nützlich, die Abkürzung

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{11.20}$$

einzuführen. Dann lautet die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu \tag{11.21}$$

und die Feldgleichung wird zu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0 \tag{11.22}$$

Wenn die Schreibweise anfängt, Sie an die Elektrodynamik zu erinnern, so ist das nicht zufällig, denn das elektromagnetische Feld *ist* genau so ein masseloses Vektorfeld; wenn man in Gleichung (11.22) $m = 0$ setzt, erhält man die Maxwell-Gleichungen für das Vakuum.

Die Lagrange-Funktionen in diesen Beispielen kamen aus dem Nichts (oder vielmehr, sie wurden so ausgeheckt, daß sie die gewünschten Feldgleichungen ergaben). In der klassischen Teilchenmechanik wird L *hergeleitet* ($L = T - U$), aber in der relativistischen Feldtheorie wird $\mathcal{L}$ für gewöhnlich als *Axiom* eingeführt – wir müssen schließlich *irgendwo* anfangen. Die Lagrange-Funktion für ein bestimmtes System ist keinesfalls einzigartig; man kann $\mathcal{L}$ immer mit einer Konstante multiplizieren oder eine Divergenz addieren ($\partial_\mu M^\mu$, worin M^μ eine Funktion von ϕ_i und $\partial_\mu \phi_i$ ist) – solche Terme kürzen sich heraus, wenn man die Euler-Lagrange-Gleichungen anwendet, so daß sie sich nicht auf die Feldgleichungen auswirken. In diesem Sinn sind Faktoren wie die $\frac{1}{2}$ in der Klein-Gordon-Lagrange-Funktion reine Konvention.* Abgesehen davon, haben wir hier jedoch *die* Lagrange-Funktionen für Spin 0, Spin $\frac{1}{2}$ und Spin 1. Bisher sprechen wir allerdings nur von *freien* Feldern ohne Quellen oder Wechselwirkungen.

Beispiel 11.4 Die Maxwell-Lagrange-Funktion für ein masseloses Vektorfeld mit der Quelle J^μ

Nehmen wir an, es ist

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} J^\mu A_\mu \tag{11.23}$$

worin $F^{\mu\nu}$ (erneut) für $\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ steht und J^μ eine bestimmte Funktion ist. Die Euler-Lagrange-Gleichungen liefern

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \tag{11.24}$$

was (wie wir in Kapitel 7, Abschnitt 7.4, herausgefunden haben) die Tensorform der Maxwell-Gleichungen ist, die die elektromagnetischen Felder beschreibt, welche durch einen Strom J^μ erzeugt werden. Übrigens folgt aus Gleichung (11.24), daß

$$\partial_\nu J^\nu = 0 \tag{11.25}$$

ist. Das bedeutet, daß die interne Struktur der Maxwell-Lagrange-Funktion (11.23) dazu führt, daß der Strom die Kontinuitätsgleichung (7.74) erfüllt; *welche* alte Funktion Sie auch für J^μ einsetzen – sie muß der Ladungserhaltung gehorchen.

---

*Die Lagrange-Funktion (L) hat die Einheit einer Energie [Gl. (11.4)], und die Lagrange*dichte* ($\mathcal{L}$) hat die Einheit von Energie *pro Einheitsvolumen*. Die *Felder* haben folgende Dimensionen:

ϕ (skalares Feld):	$\sqrt{ML}/T$
ψ (Spinorfeld):	$L^{-3/2}$
A^μ (Vektorfeld):	$\sqrt{ML}/T$

Sie sind so gewählt, daß ψ (im nicht-relativistischen Fall) in die Schrödinger-Wellenfunktion und A^μ (im nicht-quantenmechanischen Fall) in das Maxwellsche Vektorpotential übergehen. Übrigens: In Heaviside-Lorentz-Einheiten würde man die Proca- und Maxwell-Lagrange-Funktionen mit 4π multiplizieren.

11.3 Lokale Eichinvarianz

Beachten Sie, daß die Dirac-Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi \tag{11.14}$$

invariant unter der Transformation

$$\psi \to e^{i\theta}\psi \qquad \text{(globale Eichtransformation)} \tag{11.26}$$

ist (worin θ irgendeine reelle Zahl ist), denn dann geht $\bar{\psi} \to e^{-i\theta}\bar{\psi}$ und in der Kombination $\bar{\psi}\psi$ kürzen sich die exponentiellen Faktoren heraus. Aus historischen Gründen nennen wir (11.26) eine (globale) *Eichtransformation* („Phasentransformation" wäre ein passenderer Ausdruck). Aber was ist, wenn der Phasenfaktor an verschiedenen Raumzeitpunkten unterschiedlich ist; das heißt, *was ist, wenn θ eine Funktion von x^μ ist:*

$$\psi \to e^{i\theta(x)}\psi \qquad \text{(lokale Eichtransformation)} \tag{11.27}$$

Ist die Lagrange-Funktion unter einer solchen *„lokalen"* Eichtransformation invariant? Die Antwort lautet *Nein*, denn jetzt bekommen wir einen zusätzlichen Term aus der Ableitung von θ hinzu:

$$\partial_\mu(e^{i\theta}\psi) = i(\partial_\mu\theta)e^{i\theta}\psi + e^{i\theta}\partial_\mu\psi \tag{11.28}$$

so daß

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} - \hbar c(\partial_\mu\theta)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{11.29}$$

geht. Für das, was folgt, ist es nützlich, einen Faktor $-(q/\hbar c)$ aus θ herauszuziehen, was zu

$$\lambda(x) \equiv -\frac{\hbar c}{q}\theta(x) \tag{11.30}$$

führt, worin q die Ladung des beteiligten Teilchens ist. In Abhängigkeit von λ gilt dann

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + (q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)\partial_\mu\lambda \tag{11.31}$$

unter der lokalen Eichtransformation

$$\psi \to e^{-iq\lambda(x)/\hbar c}\psi \tag{11.32}$$

Bisher ist in all dem nichts besonders Neues oder Tiefsinniges. Der entscheidende Punkt tritt auf, wenn wir *verlangen*, daß die *gesamte* Lagrange-Funktion invariant unter lokalen Eichtransformationen sei.* Da die *freie* Dirac-Lagrange-Funktion (11.14)

*Ich weiß von keinem zwingenden Argument, warum eine globale Invarianz notwendigerweise lokal gelten *sollte*. Wenn Sie glauben, daß Eichtransformationen in einem gewissen Sinn „fundamental" sind, dann, so nehme ich an, sollte es möglich sein, sie an raumartig getrennten Punkten (die schließlich nicht miteinander in Verbindung stehen) unabhängig voneinander auszuführen. Aber ich denke, das geht an der eigentlichen Frage vorbei. Deshalb ist es zumindest für den Augenblick besser, die Forderung nach lokaler Eichinvarianz als ein neues, eigenständiges Prinzip der Physik anzusehen.

lokal *nicht* eichinvariant ist, sind wir gezwungen, etwas zu *addieren*, um den zusätzlichen Term in Gleichung (11.31) zu kompensieren. Nehmen wir an,

$$\mathcal{L} = [i\hbar c\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - mc^2\bar{\psi}\psi] - (q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)A_{\mu} \tag{11.33}$$

worin A_{μ} ein *neues* Feld („Eichfeld" genannt) ist, das sich unter lokalen Eichtransformationen gemäß der Regel

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \partial_{\mu}\lambda \tag{11.34}$$

transformiert. Diese „neue, verbesserte" Lagrange-Funktion *ist* nun invariant unter lokalen Eichtransformationen; den Preis, den wir dafür zahlen mußten, war die Einführung eines neuen Vektorfeldes, das durch den letzten Term in Gleichung (11.33) an ψ koppelt (siehe Aufgabe 11.6). Aber Gleichung (11.33) ist nicht die ganze Wahrheit; die *volle* Lagrange-Funktion muß einen „freien" Term für das Eichfeld enthalten. Da es ein Vektorfeld ist, schauen wir auf die Proca-Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{m_A c}{\hbar}\right)^2 A^{\nu}A_{\nu} \tag{11.21}$$

Aber hier ergibt sich ein Problem, denn während $F^{\mu\nu} \equiv \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}$ invariant unter (11.34) ist, wie Sie selbst nachprüfen sollten, gilt das für $A^{\nu}A_{\nu}$ *nicht*. *Offensichtlich muß das Eichfeld masselos sein* ($m_A = 0$), da sonst die lokale Eichinvarianz verloren geht.

Die Schlußfolgerung: Wenn wir mit der Dirac-Lagrange-Funktion beginnen und eine lokale Eichinvarianz fordern, dann sind wir gezwungen, ein masseloses Vektorfeld (A^{μ}) einzuführen, und die gesamte Lagrange-Funktion wird zu

$$\mathcal{L} = [i\hbar c\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - mc^2\bar{\psi}\psi] + \left[\frac{-1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right] - [(q\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi)A_{\mu}] \tag{11.35}$$

Wie Sie richtig vermutet haben werden, ist A^{μ} gerade das elektromagnetische Potential; die Eichtransformationsregel für A^{μ} hatten wir schon in Kapitel 7 [Gl. (7.81)] gefunden, und die letzten zwei Terme in Gleichung (11.35) geben die Maxwell-Lagrange-Funktion (11.23) mit der Stromdichte

$$J^{\mu} = cq(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) \tag{11.36}$$

wieder. Somit erzeugt die Forderung nach lokaler Eichinvarianz, angewandt auf eine freie Dirac-Lagrange-Funktion, die gesamte Elektrodynamik und spezifiziert den Strom, den die Dirac-Teilchen hervorrufen.

Für den Fall, daß Ihnen die Prozedur der lokalen Eichinvarianz mysteriös erscheint, gehen wir sie noch einmal durch und sehen uns an, was sie eigentlich enthält. Der Unterschied zwischen globalen und lokalen Eichtransformationen tritt auf, wenn wir die *Ableitungen* der Felder berechnen [Gl. (11.28)]:

$$\partial_{\mu}\psi \rightarrow e^{-iq\lambda/\hbar c}\left[\partial_{\mu} - i\frac{q}{\hbar c}(\partial_{\mu}\lambda)\right]\psi \tag{11.37}$$

Anstelle eines einfachen Phasenfaktors erhalten wir einen zusätzlichen Term mit $\partial_{\mu}\lambda$. *Wenn wir in der ursprünglichen (freien) Lagrange-Funktion jede Ableitung (∂_{μ}) durch* *die sogenannte „kovariante Ableitung“*

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu \tag{11.38}$$

ersetzen, so wird die Transformation von A_μ [Gl. (11.34)] den störenden Term in Gleichung (11.37) aufheben:

$$\mathcal{D}_\mu\psi \to e^{-iq\lambda/\hbar c}\mathcal{D}_\mu\psi \tag{11.39}$$

und die Invarianz von $\mathcal{L}$ ist wiederhergestellt. Die Ersetzung von ∂_μ durch $\mathcal{D}_\mu$ ist also ein einfaches Mittel, um eine *global* invariante Lagrange-Funktion in eine *lokal* invariante umzuwandeln; wir nennen das die „*minimale Kopplungsregel*“ [tatsächlich habe ich genau diese benutzt, um den zusätzlichen Term in Gl. (11.33) zu erzeugen].* Aber die kovariante Ableitung führt ein neues Vektorfeld (A_μ) ein, welches seine eigene *freie* Lagrange-Funktion benötigt; wenn letztere die lokale Eichinvarianz nicht verderben soll, müssen wir Eichfelder als masselos annehmen. Dies führt auf den letzten Ausdruck (11.35), den Fachleute sofort als die Lagrange-Funktion für die Quantenelektrodynamik erkennen würden – Dirac-Felder (Elektronen und Positronen), die mit Maxwell-Feldern (Photonen) wechselwirken.
Die Idee der lokalen Eichinvarianz geht zurück auf die Arbeit von Hermann Weyl aus dem Jahr 1919.[3] Ihre Stärke und Allgemeingültigkeit wurde jedoch bis in die frühen siebziger Jahre nicht vollständig erkannt. Unser Ausgangspunkt – die globale Phasentransformation (11.26) – kann man sich als Multiplikation von ψ mit einer unitären 1×1-Matrix vorstellen:

$$\psi \to U\psi, \qquad \text{worin } U^\dagger U = 1 \tag{11.40}$$

(hier ist $U = e^{i\theta}$). Die Gruppe *aller* solcher Matrizen ist $U(1)$ (vgl. Tabelle 4.2), und folglich wird die betroffene Symmetrie „$U(1)$-Eichinvarianz“ genannt. Diese Terminologie ist extravagant, was den vorliegenden Fall angeht (eine 1×1-Matrix ist eine *Zahl*, also warum lassen wir es nicht dabei?), aber im Jahre 1954 wandten Yang und Mills[4] dieselbe Strategie (darauf bestehend, daß eine *globale* Invarianz lokal gelte) auf die Gruppe $SU(2)$ an, und später wurde die Idee auf die Farb-$SU(3)$ ausgedehnt, was zur Chromodynamik führte. Im Standardmodell werden *alle* fundamentalen Wechselwirkungen auf diese Weise hervorgerufen.

11.4 Yang-Mills-Theorie

Nehmen wir nun an, daß wir *zwei* Spin-$\frac{1}{2}$-Felder, ψ_1 und ψ_2, haben. Die Lagrange-Funktion in Abwesenheit jeglicher Wechselwirkung lautet

$$\mathcal{L} = [i\hbar c\bar{\psi}_1\gamma^\mu\partial_\mu\psi_1 - m_1c^2\bar{\psi}_1\psi_1] + [i\hbar c\bar{\psi}_2\gamma^\mu\partial_\mu\psi_2 - m_2c^2\bar{\psi}_2\psi_2] \tag{11.41}$$

*Die minimale Kopplungsregel ist viel älter als das Prinzip der lokalen Eichinvarianz. Für den Impuls [$p_\mu \leftrightarrow i\hbar\partial_\mu$, vgl. Gl. (7.5)] lautet sie $p_\mu \to p_\mu - i(q/c)A_\mu$ und ist ein bekannter Trick in der klassischen Elektrodynamik, um die Bewegungsgleichungen für ein geladenes Teilchen in Anwesenheit eines elektrodynamischen Feldes zu erhalten. Siehe J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2. Aufl. (New York: Wiley, 1975), Gl. (12.29). In diesem Sinn läuft es auf eine elegante Formulierung des Lorentz-Kraftgesetzes hinaus. In der modernen Teilchentheorie ziehen wir es vor, die lokale Eichinvarianz als grundlegend anzusehen, und die minimale Kopplung ist ein Mittel, das zu erreichen.

Sie ist lediglich die *Summe* der beiden Dirac-Lagrange-Funktionen. (Wenden Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen auf dieses $\mathcal{L}$ an, und Sie werden sehen, daß ψ_1 und ψ_2 mit entsprechender Masse beide die Dirac-Gleichung erfüllen.) Aber wir können Gleichung (11.41) kompakter schreiben, indem wir ψ_1 und ψ_2 in einem zweikomponentigen Spaltenvektor kombinieren:

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{11.42}$$

(Natürlich sind ψ_1 und ψ_2 selbst vierkomponentige Dirac-Spinoren, und Sie ziehen vielleicht eine Notation mit Doppelindex vor: $\psi_{\alpha,i}$, worin $\alpha = 1,2$ das Teilchen und $i = 1,2,3,4$ die Spinorkomponenten bezeichnen. Im vorliegenden Zusammenhang sind wir allerdings *allein* am Teilchenindex interessiert, obwohl die Dirac-Matrizen natürlich auf die Spinorindizes wirken.) Der adjungierte Spinor ist

$$\bar{\psi} = (\bar{\psi}_1 \; \bar{\psi}_2) \tag{11.43}$$

und die Lagrange-Funktion wird zu

$$\mathcal{L} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - c^2\bar{\psi}M\psi \tag{11.44}$$

worin

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \tag{11.45}$$

die „Massenmatrix“ ist. Sind insbesondere die beiden Massen *gleich*, so vereinfacht sich Gleichung (11.44) zu

$$\mathcal{L} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi \tag{11.46}$$

Das *sieht* gerade so aus wie die Einteilchen-Dirac-Lagrange-Funktion. ψ ist jetzt jedoch ein zweielementiger Spaltenvektor, und $\mathcal{L}$ erlaubt eine allgemeinere globale Invarianz als zuvor:

$$\psi \to U\psi \tag{11.47}$$

worin U irgendeine unitäre 2×2-Matrix

$$U^\dagger U = 1 \tag{11.48}$$

ist. Denn unter der Transformation (11.47) geht

$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}U^\dagger \tag{11.49}$$

und folglich ist die Kombination $\bar{\psi}\psi$ invariant. Nun, ebenso wie jede komplexe Zahl mit Absolutbetrag 1 in der Form $e^{i\theta}$ mit reellem θ geschrieben werden kann, kann jede unitäre Matrix in der Form

$$U = e^{iH} \tag{11.50}$$

mit H als hermitescher Matrix ($H^\dagger = H$) geschrieben werden.* Darüber hinaus kann die allgemeinste hermitesche 2×2-Matrix durch vier reelle Zahlen a_1, a_2, a_3 und θ

*In der Matrixtheorie ist die natürliche Verallgemeinerung der komplexen Konjugation ($*$) die hermitesche Konjugation ($\dagger$) – *transponierte* Konjugation. Natürlich gibt es im Fall von 1×1-Matrizen (komplexen Zahlen) keinen Unterschied, aber für höhere Dimensionen ist es die hermitesch Konjugierte, die die nützlichsten Eigenschaften der gewöhnlichen komplexen Konjugation teilt. In diesem Sinne kommt eine *hermitesche* Matrix ($A = A^\dagger$) einer *reellen* Zahl ($a = a^*$) am nächsten, und das Analogon zu einer Zahl mit Absolutbetrag 1 ($a^*a = 1$) ist eine unitäre Matrix ($A^\dagger A = 1$).

ausgedrückt werden (Aufgabe 11.10):

$$H = \theta 1 + \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{a} \tag{11.51}$$

worin 1 die 2×2-Einheitsmatrix, τ_1, τ_2, τ_3 die Pauli-Matrizen (4.26) und das Skalarprodukt eine nützliche Abkürzung für $\tau_1 a_1 + \tau_2 a_2 + \tau_3 a_3$ sind. Somit kann jede unitäre 2×2-Matrix als ein Produkt geschrieben werden:

$$U = e^{i\theta} e^{i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{a}} \tag{11.52}$$

Wir haben bereits die Konsequenzen der *Phasen*transformationen ($e^{i\theta}$) untersucht; in diesem Abschnitt werden wir uns auf Transformationen der Form

$$\psi \to e^{i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{a}} \psi \qquad \text{[globale } SU(2)\text{-Transformation]} \tag{11.53}$$

konzentrieren. Die Matrix $e^{i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{a}}$ hat die Determinante 1 [vgl. Aufgabe 4.22], und gehört daher zu der Gruppe $SU(2)$. Indem wir die Terminologie aus Abschnitt 11.3 verallgemeinern, sagen wir, daß die Lagrange-Funktion (11.46) invariant unter globalen $SU(2)$-Eichtransformationen ist.† Was Yang und Mills taten, war, diese *globale* Invarianz in den Status einer *lokalen* Invarianz zu befördern.
Inspiration und Strategie waren denen von Weyl ähnlich, aber die Implementierung ist raffinierter, ja, es ist sogar äußerst bemerkenswert, daß es überhaupt funktioniert. Der erste Schritt ist, die Parameter ($\boldsymbol{a}$) Funktionen von x^μ sein zu lassen [wie zuvor bei Gleichung (11.30), werde ich $\boldsymbol{\lambda}(x) \equiv -(\hbar c/q)\boldsymbol{a}(x)$ sein lassen, worin q die Kopplungskonstante analog zur elektrischen Ladung ist]:

$$\psi \to S\psi, \quad \text{mit } S \equiv e^{-iq\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\lambda}(x)/\hbar c} \quad \text{[lokale } SU(2)\text{-Transformation]} \tag{11.54}$$

So, wie es aussieht, ist $\mathcal{L}$ unter solchen Transformationen *nicht* invariant, denn die Ableitung enthält einen zusätzlichen Term:

$$\partial_\mu \psi \to S \partial_\mu \psi + (\partial_\mu S)\psi \tag{11.55}$$

Die Lösung ist wieder, die Ableitung in $\mathcal{L}$ durch eine „kovariante Ableitung" nach Art der Gleichung (11.38) zu ersetzen, dabei aber die Struktur von Gleichung (11.55) zu berücksichtigen:

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{A}_\mu \tag{11.56}$$

und den Eichfeldern $\boldsymbol{A}_\mu$ (dieses Mal braucht man *drei* von ihnen) eine Transformationsregel zuzuweisen, so daß

$$\mathcal{D}_\mu \psi \to S(\mathcal{D}_\mu \psi) \tag{11.57}$$

übergeht. Denn dann wird die Lagrange-Funktion (11.46) eindeutig invariant sein.

† Sie ist *ebenfalls* invariant unter der *größeren* Gruppe $U(2)$. Aber (11.52) zeigt, daß jedes Element von $U(2)$ als ein Element von $SU(2)$ mal einem angemessenen Phasenfaktor ausgedrückt werden kann (in der Sprache der Gruppentheorie heißt das: $U(2) = U(1) \otimes SU(2)$), und da wir bereits die $U(1)$-Invarianz untersucht haben, ist das einzig *Neue* hier die $SU(2)$-Symmetrie.

Es ist keine einfache Angelegenheit, die Transformationsregel für $\boldsymbol{A}_\mu$ aus (11.57) herzuleiten.[6] Ich überlasse es Ihnen, zu zeigen (Aufgabe 11.11), daß $\boldsymbol{A}_\mu \to \boldsymbol{A}'_\mu$ übergeht, wobei $\boldsymbol{A}'_\mu$ durch

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{A}'_\mu = S(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{A}_\mu)S^{-1} + i\left(\frac{\hbar c}{q}\right)(\partial_\mu S)S^{-1} \tag{11.58}$$

gegeben ist. Soweit ist es relativ einfach. Aber S und S^{-1} im ersten Term können nicht zueinandergebracht werden, da sie nicht mit $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{A}_\mu$ kommutieren. Auch ist der Gradient von S nicht einfach $-i(q\boldsymbol{\tau}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\lambda}/\hbar c)S$, weil S nicht mit $\boldsymbol{\tau}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\lambda}$ kommutiert. Sie können das genaue Ergebnis herausfinden (unter Verwendung der Aufgaben 4.20 und 4.21), wenn Sie die Energie dazu haben, aber die Antwort ist nicht besonders erleuchtend. Für unsere Absichten genügt es, die Transformationsregel *näherungsweise* im Grenzfall sehr kleiner $\boldsymbol{\lambda}$ zu kennen, für die wir S entwickeln können und lediglich die Terme erster Ordnung beibehalten:

$$S \cong 1 - \frac{iq}{\hbar c}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\lambda}, \quad S^{-1} \cong 1 + \frac{iq}{\hbar c}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\lambda}, \quad \partial_\mu S \cong -\frac{iq}{\hbar c}\boldsymbol{\tau}\cdot(\partial_\mu \boldsymbol{\lambda}) \tag{11.59}$$

In dieser Näherung liefert Gleichung (11.58)

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{A}'_\mu \cong \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{A}_\mu + \frac{iq}{\hbar c}[\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{A}_\mu, \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\lambda}] + \boldsymbol{\tau}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\lambda} \tag{11.60}$$

und somit (unter Ausnutzung von Aufgabe 4.20, um den Kommutator auszuwerten)

$$\boldsymbol{A}'_\mu \cong \boldsymbol{A}_\mu + \partial_\mu\boldsymbol{\lambda} + \frac{2q}{\hbar c}(\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{A}_\mu) \tag{11.61}$$

Die resultierende Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - mc^2\bar{\psi}\psi = [i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi] - (q\bar{\psi}\gamma^\mu\boldsymbol{\tau}\psi)\cdot\boldsymbol{A}_\mu \tag{11.62}$$

ist invariant unter lokalen Eichtransformationen (11.54) und (11.58), aber wir sind gezwungen, drei neue Vektorfelder $\boldsymbol{A}^\mu = (A_1^\mu, A_2^\mu, A_3^\mu)$ einzuführen, die nach ihrer eigenen *freien* Lagrange-Funktion verlangen:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{16\pi}F_1^{\mu\nu}F_{\mu\nu 1} - \frac{1}{16\pi}F_2^{\mu\nu}F_{\mu\nu 2} - \frac{1}{16\pi}F_3^{\mu\nu}F_{\mu\nu 3} = -\frac{1}{16\pi}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\boldsymbol{F}_{\mu\nu} \tag{11.63}$$

(Wieder bezieht sich die Schreibweise der Dreiervektoren auf die *Teilchen*indizes.) Der Proca-Massenterm

$$\frac{1}{8\pi}\left(\frac{m_A c}{\hbar}\right)^2 \boldsymbol{A}^\nu\cdot\boldsymbol{A}_\nu \tag{11.64}$$

wird durch lokale Eichinvarianz ausgeschlossen; wie zuvor müssen die Eichfelder masselos sein. Aber dieses Mal muß der alte Zusammenhang $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ selbst modifiziert werden, denn mit dieser Definition ist die Lagrange-Funktion der Eichfelder (11.63) *ebenfalls* nicht invariant (vgl. Aufgabe 11.12). Es ist besser, daß wir

$$\boldsymbol{F}^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu\boldsymbol{A}^\nu - \partial^\nu\boldsymbol{A}^\mu - \frac{2q}{\hbar c}(\boldsymbol{A}^\mu \times \boldsymbol{A}^\nu) \tag{11.65}$$

wählen.* Unter infinitesimalen lokalen Eichtransformationen (11.61) geht

$$\boldsymbol{F}^{\mu\nu} \to \boldsymbol{F}^{\mu\nu} + \frac{2q}{\hbar c}(\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{F}^{\mu\nu}) \tag{11.66}$$

(Aufgabe 11.13), und somit ist $\mathcal{L}_A$ invariant. (Vgl. Aufgabe 11.14 als Beweis dafür, daß die Invarianz sich auf *endliche* Eichtransformationen erstreckt.)
Die Schlußfolgerung: Die vollständige Yang-Mills-Lagrange-Funktion lautet

$$\mathcal{L} = [i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2\bar{\psi}\psi] - \frac{1}{16\pi}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu} - (q\bar{\psi}\gamma^\mu \boldsymbol{\tau}\psi)\cdot\boldsymbol{A}_\mu \tag{11.67}$$

mit $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$ wie durch Gleichung (11.65) definiert; sie ist invariant unter lokalen $SU(2)$-Eichtransformationen, (11.54) und (11.58), und beschreibt zwei Dirac-Felder gleicher Masse in Wechselwirkung mit drei masselosen Vektoreichfeldern. Das alles folgt, weil wir darauf bestanden, daß die *globale* $SU(2)$-Invarianz der ursprünglichen freien Lagrange-Funktion (11.46) auch *lokal* gelten soll. Indem wir Anleihen bei der Sprache der Elektrodynamik machen, sagen wir, daß die Dirac-Felder drei *Ströme*

$$\boldsymbol{J}^\mu \equiv cq(\bar{\psi}\gamma^\mu \boldsymbol{\tau}\psi) \tag{11.68}$$

hervorrufen, welche als *Quellen* der Eichfelder agieren; die Lagrange-Funktion für die Eichfelder allein

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{c}\boldsymbol{J}^\mu \boldsymbol{A}_\mu \tag{11.69}$$

erinnert an die Maxwell-Lagrange-Funktion (11.23) und gibt Anlaß zu einer reichhaltigen und interessanten *klassischen* Feldtheorie.[7] (Vgl. Aufgabe 11.15.)
Obwohl die Yang-Mills-Theorie durch dieselbe *Idee* wie die von Weyl inspiriert ist (nämlich, daß eine globale Invarianz auch lokal gelten sollte), war die Implementierung an zwei Stellen subtiler: bezüglich (1) der lokalen Transformationsregel für Eichfelder und (2) des Ausdrucks für $F^{\mu\nu}$ in Abhängigkeit von A^μ. Beide Komplikationen leiten sich aus der Tatsache her, daß die fragliche Symmetriegruppe nicht-abelsch ist (2×2-Matrizen kommutieren nicht, wohingegen 1×1-Matrizen das – offensichtlich – tun). Um den Unterschied zu betonen, beziehen wir uns auf den Weyl-Fall als den einer *abelschen* Eichtheorie und auf Yang-Mills als den einer *nicht-abelschen* Eichtheorie. In der zeitgenössischen Elementarteilchenphysik sind viele Symmetriegruppen untersucht worden; in den verbleibenden Abschnitten dieses Buches werden wir auf ein paar davon stoßen. Die *schwere* Arbeit ist jedoch vorbei: Das Ausweiten der nicht-abelschen Eichtheorie auf höhere Symmetriegruppen ist eine einfache Prozedur, wenn das Yang-Mills-Modell erst einmal vorliegt.
Merkwürdigerweise stellte sich allerdings die Yang-Mills-Theorie in ihrer ursprünglichen Form als von geringem Wert heraus. Immerhin geht sie von der Voraussetzung aus, daß es zwei elementare Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen gleicher Masse gibt, und soweit wir wissen,

*Definition (11.65) ist nicht so willkürlich, wie es scheinen mag; der Punkt ist, daß bei *drei* Vektorfeldern eine zweite antisymmetrische Tensorform, $(\boldsymbol{A}^\mu \times \boldsymbol{A}^\nu)$, verfügbar ist, und der Koeffizient $-2q/\hbar c$ ist so gewählt, daß $\mathcal{L}_A$ invariant *wird*. Beachten Sie, daß, wenn die Kopplungskonstante q gegen Null geht, für jedes Spinorfeld die freie Dirac-Lagrange-Funktion und die freie (masselose) Proca-Lagrange-Funktion für jedes der drei Eichfelder übrigbleiben.

kommen solche Paare in der Natur nicht vor. Yang und Mills selbst hatten an das Nukleonsystem (Proton und Neutron) gedacht, und sahen ihr Modell als eine Möglichkeit, die Heisenbergsche Isospininvarianz in die starke Wechselwirkung zu implementieren. Die kleine Massendifferenz von 1,29 MeV/c^2 zwischen Proton und Neutron wäre auf die elektromagnetische Symmetriebrechung zurückzuführen. Damit die Theorie erfolgreich sein konnte, mußte ein masseloses Isotriplett von Vektorteilchen (mit Spin 1) existieren. Die einzigen Kandidaten weit und breit sind die ρ-Mesonen; aber sie sind schwerlich *masselos* ($M_\rho = 770$ MeV/c^2), und dies ist keine unbedeutende Abweichung, die man plausibel auf die elektromagnetische Verschmutzung abschieben könnte. Eine Anzahl von Versuchen wurde unternommen, um die Yang-Mills-Theorie so zu verarzten, daß sie auf massive Eichbosonen paßte, aber zu der Zeit, wo dieses Vorgehen (durch den Higgs-Mechanismus) erste Erfolge aufwies, war ziemlich klar, daß p, n und ρ ohnehin zusammengesetzte Teilchen sind und daß der Isospin lediglich eine Komponente einer größeren Flavorsymmetrie ist, die zu drastisch gebrochen ist, um irgendeine grundlegende Rolle in der starken Wechselwirkung zu spielen. Als die nicht-abelsche Eichtheorie schließlich ihren Platz fand, war das im Kontext der ($SU(3)$-) *Farb*symmetrie in der starken Wechselwirkung und der *schwachen* Isospin-Hyperladungssymmetrie ($SU(2) \otimes U(1)$) in der schwachen Wechselwirkung. In der Zeit dazwischen welkte das Yang-Mills-Modell nach 1954 für über ein Jahrzehnt vor sich hin – eine hübsche Idee, deren Umsetzung die Natur offensichtlich nicht gewählt hatte.

11.5 Die Chromodynamik

Gemäß dem Farbmodell der Quarks kommt jedes Quarkflavor in drei Farben vor – rot, blau und grün. Obwohl die verschiedenen *Flavors* unterschiedliche Masse haben (Tabelle 4.4), nimmt man von den drei *Farben* eines gegebenen Flavors an, daß sie alle dasselbe wiegen. Somit lautet die freie Lagrange-Funktion für ein bestimmtes Flavor

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= [i\hbar c\bar{\psi}_r\gamma^\mu\partial_\mu\psi_r - mc^2\bar{\psi}_r\psi_r] + [i\hbar c\bar{\psi}_b\gamma^\mu\partial_\mu\psi_b - mc^2\bar{\psi}_b\psi_b] \\ &\quad + [i\hbar c\bar{\psi}_g\gamma^\mu\partial_\mu\psi_g - mc^2\bar{\psi}_g\psi_g] \end{aligned} \tag{11.70}$$

Wie zuvor können wir die Schreibweise vereinfachen, indem wir

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_b \\ \psi_g \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_r\bar{\psi}_b\bar{\psi}_g) \tag{11.71}$$

einführen, so daß

$$\mathcal{L} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi \tag{11.72}$$

ist. Wieder ähnelt dies der ursprünglichen Dirac-Lagrange-Funktion, allerdings steht ψ jetzt für einen dreikomponentigen Spaltenvektor (dessen Elemente ihrerseits wieder vierkomponentige Dirac-Spinoren sind). Gerade so wie die Einteilchen-Dirac-Lagrange-Funktion (11.14) (globale) $U(1)$-Phaseninvarianz aufweist und die (bei gleichen Massen) Zweiteilchen-Lagrange-Funktion (11.41) $U(2)$-Invarianz zuläßt, so zeigt die (bei gleichen Massen) Dreiteilchen-Lagrange-Funktion eine $U(3)$-Symmetrie. Das heißt, sie ist invariant unter Transformationen der Form

$$\psi \to U\psi \qquad (\bar{\psi} \to \bar{\psi}U^\dagger) \tag{11.73}$$

worin U eine unitäre 3×3-Matrix ist:

$$U^\dagger U = 1 \tag{11.74}$$

Aber erinnern Sie sich [Gl. (11.50)], daß jede unitäre Matrix als eine hermitesche Matrix im Exponenten einer e-Funktion geschrieben werden kann:

$$U = e^{iH}, \quad \text{mit } H^\dagger = H \tag{11.75}$$

Des weiteren kann jede hermitesche 3×3-Matrix über neun reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_8$ und θ ausgedrückt werden (Aufgabe 11.16):

$$H = \theta 1 + \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{a} \tag{11.76}$$

worin 1 die 3×3-Einheitsmatrix ist, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_8$ die Gell-Mann-Matrizen sind [Gl. (9.9)] und das Skalarprodukt nun eine Summe von 1 bis 8 bezeichnet:

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{a} \equiv \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_8 a_8 \tag{11.77}$$

Somit ist

$$U = e^{i\theta} e^{i\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{a}} \tag{11.78}$$

Wir haben bereits *Phasen*transformationen ($e^{i\theta}$) untersucht; *neu* ist allerdings der zweite Term. Die Matrix $e^{i\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{a}}$ hat die Determinante 1 (vgl. Aufgabe 11.17); sie gehört zu der Gruppe $SU(3)$.* Was uns also interessiert, ist die Invarianz der Lagrange-Funktion (11.72) unter $SU(3)$-Eichtransformationen, eine globale Symmetrie, die wir nun lokal machen wollen.

Das heißt: Wir modifizieren $\mathcal{L}$ derart, daß sie unter *lokalen* $SU(3)$-Eichtransformationen invariant wird:

$$\psi \to S\psi, \quad \text{mit } S \equiv e^{-iq\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\phi}(x)/\hbar c} \tag{11.79}$$

(wieder setze ich $\boldsymbol{\phi} \equiv -(\hbar c/q)\boldsymbol{a}$, mit der Kopplungskonstante q in einer Rolle analog der, welche die elektrische Ladung in der QED spielt). Wie immer liegt der Trick darin, die gewöhnliche Ableitung ∂_μ durch die „kovariante Ableitung" $\mathcal{D}_\mu$ zu ersetzen

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{A}_\mu \tag{11.80}$$

und den Eichfeldern $\boldsymbol{A}_\mu$ (beachten Sie, es sind *acht* davon) eine Transformationsregel zuzuschreiben, so daß

$$\mathcal{D}_\mu \psi \to S(\mathcal{D}_\mu \psi) \tag{11.81}$$

*In der Sprache der Gruppentheorie haben wir gezeigt, daß $U(3) = U(1) \otimes SU(3)$ ist.

geht. Wieder [vgl. Gl. (11.58)] zieht das

$$\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{A}'_\mu = S(\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{A}_\mu)S^{-1} + i\left(\frac{\hbar c}{q}\right)(\partial_\mu S)S^{-1} \tag{11.82}$$

nach sich, was im infinitesimalen Fall eine Formel liefert, die mit Ausdruck (11.61) identisch ist:

$$\boldsymbol{A}'_\mu \cong \boldsymbol{A}_\mu + \partial_\mu \boldsymbol{\phi} + \frac{2q}{\hbar c}(\boldsymbol{\phi} \times \boldsymbol{A}_\mu) \tag{11.83}$$

Dieses Mal steht jedoch das Kreuzprodukt kurz für

$$(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})_i = \sum_{j,k=1}^{8} f_{ijk} B_j C_k \tag{11.84}$$

worin f_{ijk} die Strukturkonstanten der $SU(3)$ sind [Gl. (9.10)], analog den ϵ_{ijk} für die $SU(2)$. (Vgl. Aufgabe 11.18.)
Die modifizierte Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - mc^2\bar{\psi}\psi = [i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2\bar{\psi}\psi] - (q\bar{\psi}\gamma^\mu \boldsymbol{\lambda}\psi)\cdot \boldsymbol{A}_\mu \tag{11.85}$$

ist invariant unter lokalen $SU(3)$-Eichtransformationen [(11.79) und (11.82)], aber wie gewöhnlich ist der Preis die Einführung von Eichfeldern $\boldsymbol{A}_\mu$ (dieses Mal acht Stück). In der Teilchensprache korrespondieren diese zu den acht Gluonen, genauso, wie das $U(1)$-Eichfeld in Weyls Theorie das Photon repräsentiert.* Um die Sache zu beenden, müssen wir die freie Gluon-Lagrange-Funktion adjungieren:

$$\mathcal{L}_{Gluonen} = -\frac{1}{16\pi}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\cdot \boldsymbol{F}_{\mu\nu} \tag{11.86}$$

worin, wie im Yang-Mills-Fall,

$$\boldsymbol{F}^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu \boldsymbol{A}^\nu - \partial^\nu \boldsymbol{A}^\mu - \frac{2q}{\hbar c}(\boldsymbol{A}^\mu \times \boldsymbol{A}^\nu) \tag{11.87}$$

ist [mit dem $SU(3)$-Kreuzprodukt wie in Gleichung (11.84) definiert].
Schlußfolgerung: Die vollständige Lagrange-Funktion für die Chromodynamik lautet

$$\mathcal{L} = [i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc^2\bar{\psi}\psi] - \frac{1}{16\pi}\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\cdot \boldsymbol{F}_{\mu\nu} - (q\bar{\psi}\gamma^\mu \boldsymbol{\lambda}\psi)\cdot \boldsymbol{A}_\mu \tag{11.88}$$

Natürlich brauchen wir von Gleichung (11.88) sechs Kopien, jede mit der entsprechenden Masse für die sechs Quarkflavors. $\mathcal{L}$ ist invariant unter lokalen $SU(3)$-Eichtransformationen und beschreibt drei Dirac-Felder gleicher Masse (die drei Farben eines gegebenen Quarkflavors) in Wechselwirkung mit acht masselosen Vektorfeldern (den Gluonen). Dies alles folgt aus der Forderung, daß die *globale* $SU(3)$-Symmetrie der ursprünglichen Lagrange-Funktion (11.70) auch *lokal* gelten sollte. Die Dirac-Felder bilden acht Farb*ströme*

$$\boldsymbol{J}^\mu \equiv cq(\bar{\psi}\gamma^\mu \boldsymbol{\lambda}\psi) \tag{11.89}$$

*Denken Sie daran, daß ein „neuntes Gluon“, das universell an alle Quarks koppelt, allem Anschein nach durch die Experimente ausgeschlossen ist (vgl. Aufgabe 9.1).

die als *Quellen* für die Farbfelder ($\boldsymbol{A}_\mu$) in derselben Weise fungieren, wie die *elektrischen* Ströme als Quellen für das *elektromagnetische* Feld wirken. Die hier beschriebene Theorie ist in ihrer Struktur der von Yang und Mills sehr ähnlich. In diesem Fall glauben wir jedoch, daß sie die richtige Beschreibung eines Phänomens ist, das in der Natur auftritt: der starken Wechselwirkung.

11.6 Die Feynman-Regeln

Bis zu diesem Zeitpunkt könnten die Lagrange-Funktionen, die wir betrachtet haben, genausogut *klassische* wie *quantenmechanische* Felder beschreiben; in der Tat wird man die Maxwell-Lagrange-Funktion in jedem Textbuch über die klassische Elektrodynamik finden. Der Übergang von einer klassischen Feldtheorie zu der entsprechenden Quantenfeldtheorie bedingt keine Modifikation der Lagrange-Funktion oder der Feldgleichungen, sondern vielmehr eine *Neuinterpretation* der Feldvariablen; die Felder sind „quantisiert", und *Teilchen* erweisen sich als die Quanten der zugehörigen Felder. Somit ist das Photon das Quant des elektrodynamischen Feldes A^μ; Leptonen und Quarks sind die Quanten der Dirac-Felder; Gluonen sind die Quanten der acht $SU(3)$-Eichfelder; und $W^\pm$ und Z^0 sind die Quanten der entsprechenden Proca-Felder. Die Quantisierungsprozedur selbst ist abstrus, und hier ist nicht der Ort, um darauf einzugehen;[8] für unsere Absichten ist der wesentliche Punkt, daß *jede Lagrange-Funktion einen bestimmten Satz von Feynman-Regeln bestimmt.* Was wir daher brauchen, ist eine Vorschrift für die Ausarbeitung der Feynman-Regeln, wie sie durch eine gegebene Lagrange-Funktion diktiert werden.

Beachten Sie zunächst, daß $\mathcal{L}$ aus zwei Arten von Termen besteht: die *freie* Lagrange-Funktion für jedes teilnehmende Feld plus verschiedener *Wechselwirkungs*terme ($\mathcal{L}_{int}$). Ersterer – Klein-Gordon für Spin 0; Dirac für Spin $\frac{1}{2}$; Proca für Spin 1; oder etwas Exotischeres für eine Theorie mit höherem Spin – bestimmt den *Propagator*; letztere – man erhält sie durch die Forderung nach lokaler Eichinvarianz oder auf andere Art und Weise – bestimmen die *Vertexfaktoren*:

$$\begin{aligned} \text{Freie Lagrange-Funktion} &\Rightarrow \text{Propagator} \\ \text{Wechselwirkungsterme} &\Rightarrow \text{Vertexfaktoren} \end{aligned}$$

Lassen Sie uns zunächst die Propagatoren betrachten.

Die Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung auf die freie Lagrange-Funktion liefert die freien Feldgleichungen:

$$\left[\partial^\mu\partial_\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\phi = 0 \qquad \text{(Klein-Gordon, für Spin 0)} \tag{11.13}$$

$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)\right]\psi = 0 \qquad \text{(Dirac, für Spin } \tfrac{1}{2}\text{)} \tag{11.15}$$

$$\left[\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu\right] = 0 \qquad \text{(Proca, für Spin 1)} \tag{11.22}$$

Die entsprechenden „Impulsraum"-Gleichungen erhält man durch die Standardvorschrift [Gl. (7.5)] $p_\mu \leftrightarrow i\hbar\partial_\mu$:

$$
\begin{aligned}
[p^2 - (mc)^2]\phi &= 0 && (11.90)\\
[\not{p} - (mc)]\psi &= 0 && (11.91)\\
[(-p^2 + (mc)^2)g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu]A^\nu &= 0 && (11.92)
\end{aligned}
$$

Der Propagator ist nun einfach (i-mal) das *Inverse* des Faktors in den eckigen Klammern:

$$\text{Spin-0-Propagator:} \quad \frac{i}{p^2 - (mc)^2} \tag{11.93}$$

$$\text{Spin-}\tfrac{1}{2}\text{-Propagator:} \quad \frac{i}{\not{p} - mc} = i\frac{(\not{p} + mc)}{p^2 - (mc)^2} \tag{11.94}$$

$$\text{Spin-1-Propagator:} \quad \frac{-i}{p^2 - (mc)^2}\left[g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{(mc)^2}\right] \tag{11.95}$$

Beachten Sie, daß im zweiten Fall dieser Faktor eine 4×4-*Matrix* ist, und wir benötigen die invertierte *Matrix*; im dritten Fall ist der Faktor ein Tensor zweiten Ranges ($T_{\mu\nu}$), und wir wollen den invertierten *Tensor* $(T^{-1})_{\mu\nu}$, so daß $T_{\mu\lambda}(T^{-1})^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu$ ist. (Vgl. Aufgabe 11.19.) Dieses sind genau dieselben Propagatoren, die wir in den Kapiteln 6, 7 und 10 benutzt haben.* Da wir im Proca-Propagator (11.95) offensichtlich nicht $m \to 0$ gehen lassen können, müssen wir zu den freien Feldgleichungen (11.22) zurückgehen, um den Photonpropagator bestimmen zu können:

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0 \qquad \text{(Maxwell, für masselosen Spin 1)} \tag{11.96}$$

Wie ich zuvor schon bemerkt habe, bestimmt diese Gleichung A^μ nicht eindeutig; wenn wir allerdings die Lorentz-Konvention

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{7.82}$$

fordern, dann reduziert sich (11.96) zu

$$\partial^2 A^\nu = 0 \tag{11.97}$$

was im Impulsraum als

$$(-p^2 g_{\mu\nu})A^\nu = 0 \tag{11.98}$$

geschrieben werden kann. Somit ist der Photonpropagator

$$\text{Masseloser Spin-1-Propagator:} \quad -i\frac{g_{\mu\nu}}{p^2} \tag{11.99}$$

---

*Eigentlich bestimmt diese Prozedur lediglich den Propagator bis auf eine multiplikative Konstante, da die Feldgleichungen (11.90), (11.91) und (11.92) immer mit einem solchen Faktor multipliziert werden können. In der „kanonischen" Form dieser Gleichungen wird der Koeffizient von mc oder $(mc)^2$ als ± 1 angenommen, wobei das Vorzeichen mit dem des Massenterms in $\mathcal{L}$ übereinstimmt. Andere Konventionen führen zu einem leicht unterschiedlichen Satz von Feynman-Regeln, aber ändern natürlich nicht die berechneten Reaktionsamplituden.

Um die Vertexfaktoren zu erhalten, schreiben wir zunächst $i\mathcal{L}_{int}$ im Impulsraum auf ($i\hbar\partial_\mu \to p_\mu$) und untersuchen die beteiligten *Felder*; diese bestimmen die qualitative Struktur der Wechselwirkung. Im Fall der QED-Lagrange-Funktion (11.35)

$$i\mathcal{L}_{int} = -i(q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)A_\mu \tag{11.100}$$

gibt es beispielsweise *drei* beteiligte Felder ($\bar{\psi}$, ψ und A_μ), und das definiert einen Vertex, in dem drei Linien zusammenkommen – ein einlaufendes Fermion, ein auslaufendes Fermion und ein Photon. Um den Vertexfaktor selbst zu erhalten, *radieren Sie einfach die Feldvariablen aus:*

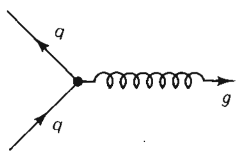
$$-i\sqrt{\frac{4\pi}{\hbar c}}q\gamma^\mu = ig_e\gamma^\mu$$

(QED-Vertexfaktor für negativ geladene Teilchen) (11.101)

(Im Fall des Photons radieren wir eigentlich $\sqrt{\hbar c/4\pi}A^\mu$ aus; der zusätzliche Faktor geht auf unseren Gebrauch von CGS-Einheiten zurück, die für diese Aufgabe ein wenig unhandlich sind.) Dasselbe gilt für die Chromodynamik (11.88): Die Quark-Gluon-Kopplung

$$\mathcal{L}_{int} = -(q\bar{\psi}\gamma^\mu\boldsymbol{\lambda}\psi)\cdot\boldsymbol{A}_\mu \tag{11.102}$$

ergibt einen Vertex der Form



mit dem Vertexfaktor

$$-i\frac{g_s}{2}\gamma^\mu\boldsymbol{\lambda} \tag{11.103}$$

(Die starke Kopplungskonstante wird traditionell mit einem Faktor 2 definiert: $g_s \equiv 2\sqrt{4\pi/\hbar c}q$, worin q die „starke Ladung" ist, die in der Lagrange-Funktion auftritt.) Es gibt jedoch auch direkte Gluon-Gluon-Kopplungen, die dem Term $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ in $\mathcal{L}$ entstammen, da $\boldsymbol{F}^{\mu\nu}$ nicht nur den „freien" Anteil $(\partial^\mu\boldsymbol{A}^\nu - \partial^\nu\boldsymbol{A}^\mu)$ enthält, sondern auch einen Wechselwirkungsterm $-2q/\hbar c(\boldsymbol{A}^\mu \times \boldsymbol{A}^\nu)$ [Gl. (11.87)]. Nach dem Quadrieren finden wir:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} &= \left(\frac{q}{8\pi\hbar c}\right)[(\partial^\mu\boldsymbol{A}^\nu - \partial^\nu\boldsymbol{A}^\mu)\cdot(\boldsymbol{A}_\mu\times\boldsymbol{A}_\nu) + (\boldsymbol{A}^\mu\times\boldsymbol{A}^\nu)\cdot(\partial_\mu\boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu\boldsymbol{A}_\mu)] \\ &\quad - \frac{q^2}{4\pi(\hbar c)^2}(\boldsymbol{A}^\mu\times\boldsymbol{A}^\nu)\cdot(\boldsymbol{A}_\mu\times\boldsymbol{A}_\nu)\end{aligned} \tag{11.104}$$

Der erste Term enthält drei Faktoren von $\boldsymbol{A}^\mu$ und führt zum Drei-Gluonvertex (9.18); der zweite Term enthält *vier* Faktoren von $\boldsymbol{A}^\mu$ und ergibt den Vier-Gluonvertex (9.19). (Um ein wenig Übung für die Ableitung von Feynman-Regeln aus Lagrange-Funktionen zu bekommen, siehe Aufgaben 11.20 und 11.21.)

Anhang D

Die Feynman-Regeln (Baum-Niveau)

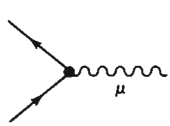
D.1 Externe Linien

$$
\begin{array}{ll}
\text{Spin } 0: & \text{(nichts)} \\[1ex]
\text{Spin } \frac{1}{2}: & \left\{ \begin{array}{l} \text{einlaufendes Teilchen: } u \\ \text{einlaufendes Antiteilchen: } \bar{v} \\ \text{auslaufendes Teilchen: } \bar{u} \\ \text{auslaufendes Antiteilchen: } v \end{array} \right. \\[1ex]
\text{Spin } 1: & \left\{ \begin{array}{l} \text{einlaufend: } \epsilon^{\mu} \\ \text{auslaufend: } \epsilon^{\mu^*} \end{array} \right.
\end{array}
$$

D.2 Propagatoren

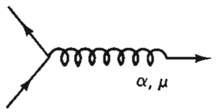
$$
\begin{array}{ll}
\text{Spin } 0: & \dfrac{i}{q^2 - (mc)^2} \\[2ex]
\text{Spin } \frac{1}{2}: & \dfrac{i(\not{q} + mc)}{q^2 - (mc)^2} \\[2ex]
\text{Spin } 1: & \left\{ \begin{array}{ll} \text{masselos:} & \dfrac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \\[2ex] \text{m. Masse:} & \dfrac{-i[g_{\mu\nu} - q_{\mu}q_{\nu}/(mc)^2]}{q^2 - (mc)^2} \end{array} \right.
\end{array}
$$

D.3 Vertexfaktoren

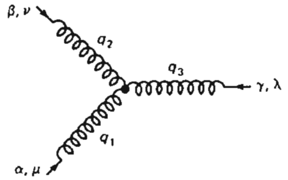
QED: 

$ig_e\gamma^{\mu} \quad (g_e = \sqrt{4\pi\alpha})$

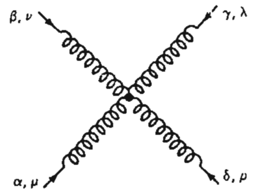
QCD:



$$\frac{-ig_s}{2}\lambda^{\alpha}\gamma^{\mu}$$

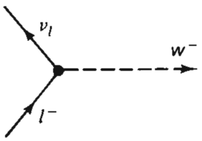


$$-g_s f^{\alpha\beta\gamma}[g_{\mu\nu}(q_1 - q_2)_\lambda + g_{\nu\lambda}(q_2 - q_3)_\mu + g_{\lambda\mu}(q_3 - q_1)_\nu]$$



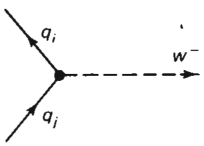
$$\begin{aligned}-ig_s^2[&f^{\alpha\beta\eta}f^{\gamma\delta\eta}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda})\\ &+f^{\alpha\delta\eta}f^{\beta\gamma\eta}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho})\\ &+f^{\alpha\gamma\eta}f^{\delta\beta\eta}(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho})\end{aligned}$$

GWS:



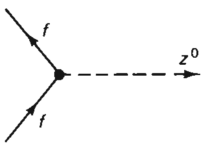
$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu}(1 - \gamma^5)$$

(Hier ist l ein beliebiges Lepton und ν_l das zugehörige Neutrino.)



$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}}\gamma^{\mu}(1 - \gamma^5)U_{ij}$$

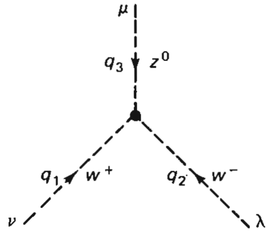
(Hier sind $i = u$, c oder t und $j = d$, s oder b; U ist die Kobayashi-Maskawa-Matrix.)



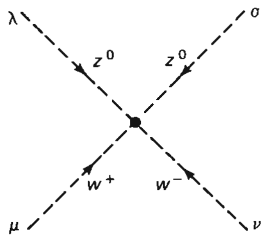
$$\frac{-ig_z}{2}\gamma^{\mu}(c_V^f - c_A^f\gamma^5)$$

(Hier ist f ein beliebiges Quark oder Lepton.)

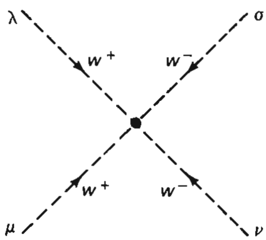
f	c_V	c_A
$\nu_e,\ \nu_\mu,\ \nu_\tau$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$e^-,\ \mu^-,\ \tau^-$	$-\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_w$	$-\frac{1}{2}$
$u,\ c,\ t$	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_w$	$\frac{1}{2}$
$d,\ s,\ b$	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2\theta_w$	$-\frac{1}{2}$



$$ig_w \cos\theta_w[g_{\nu\lambda}(q_1 - q_2)_\mu + g_{\lambda\mu}(q_2 - q_3)_\nu + g_{\mu\nu}(q_3 - q_1)_\lambda]$$



$$-ig_w^2 \cos^2\theta_w(2g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})$$

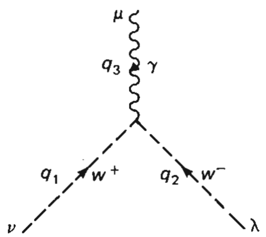


$$-ig_w^2(2g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})$$

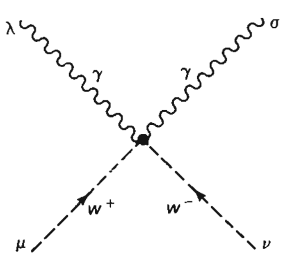
Die schwachen Kopplungskonstanten sind mit den elektromagnetischen Kopplungskonstanten wie folgt verbunden:

$$g_w = \frac{g_e}{\sin\theta_w}; \quad g_z = \frac{g_e}{\sin\theta_w \cos\theta_w}.$$

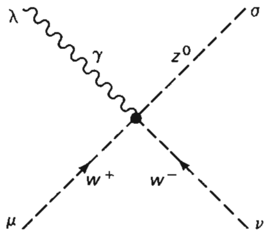
Es gibt ebenfalls „gemischte“ Kopplungen des Photons an das W und das Z:



$$ig_e[g_{\nu\lambda}(q_1 - q_2)_\mu + g_{\lambda\mu}(q_2 - q_3)_\nu + g_{\mu\nu}(q_3 - q_1)_\lambda]$$



$$-ig_e^2(2g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})$$



$$-ig_e g_w \cos\theta_w (2g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})$$