

重力的粒子生成をめぐる混乱の解決と 確かな理解に向けて

金田 邦雄 (阪大)

KK, S.M. Lee, K-y. Oda [[JCAP09\(2022\)018](#); [2206.10929](#)]

KK, K-y. Oda [[JCAP10\(2023\)048](#); [2304.12578](#)]

KK, W. Ke, Y. Mambrini, K. Olive, S. Verner [[2309.15146](#)]

阿蘇研究会 2023年11月13日

Outline



- イン트로ダクション
- 重力的粒子生成の理解
 - ボルツマンの方法
 - ボゴリューボフの方法
- まとめ

■ イン트로ダクション

なぜ重力的粒子生成が重要なのか？

重力的粒子生成 = 重力相互作用を媒介にした粒子生成

⇒ つまり原理的にはあらゆる粒子を生成可能 ⇒ どのように重要？

■ 素粒子現象論の立場から

- 非熱的粒子（暗黒物質）の残存量に影響
 - ▶ 残存量に不可避の寄与
 - ▶ 例: FIMP, gravitino, right-handed neutrinos, etc

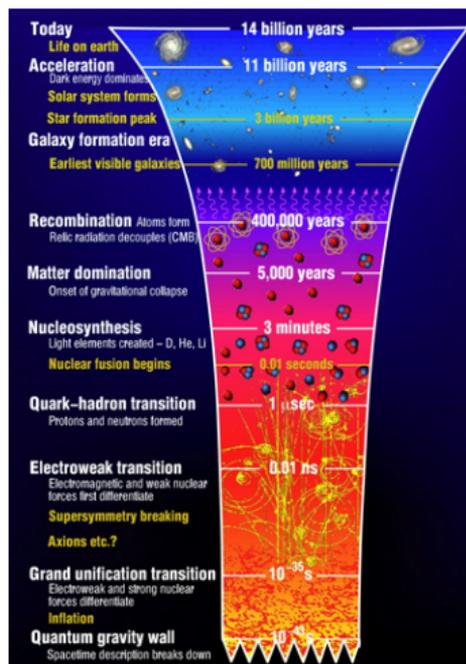
■ 理論物理の立場から

- 量子重力への理解を深める
 - ▶ グラヴィトン散乱のユニタリティから UV を探る
 - ▶ 粒子生成自体が計算不可能？（例: spin-3/2）

■ 宇宙論の立場から

- インフレーションの物理を探る手がかり
 - ▶ CMB の温度揺らぎや原始重力波はインフレーション中の重力的粒子生成
 - ▶ 模型によっては再加熱において中心的役割（例: quintessential inflation）

素粒子論と宇宙論



[Image from CTC]

- 素粒子論と宇宙論は仲良し
- 素粒子論: 物質に働く相互作用を理解したい
- 宇宙論: 宇宙の発展を理解したい
- 宇宙元素合成 (BBN) で大成功 ('48)
- 原子の反応過程と宇宙膨張による温度変化



素粒子論と宇宙論の友情?

- 成功例は BBN だけにとどまらない
- BBN, CMB, インフレーション, ... 今のところ相性は抜群

素粒子論と宇宙論の友情?

- 成功例は BBN だけにとどまらない
- BBN, CMB, インフレーション, ... 今のところ相性は抜群

W



一方で、モノの見方がしばしば違うことも

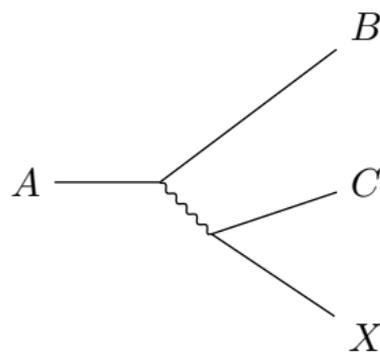
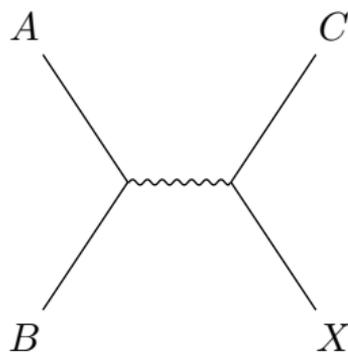
M



M

粒子生成 (素粒子論の場合)

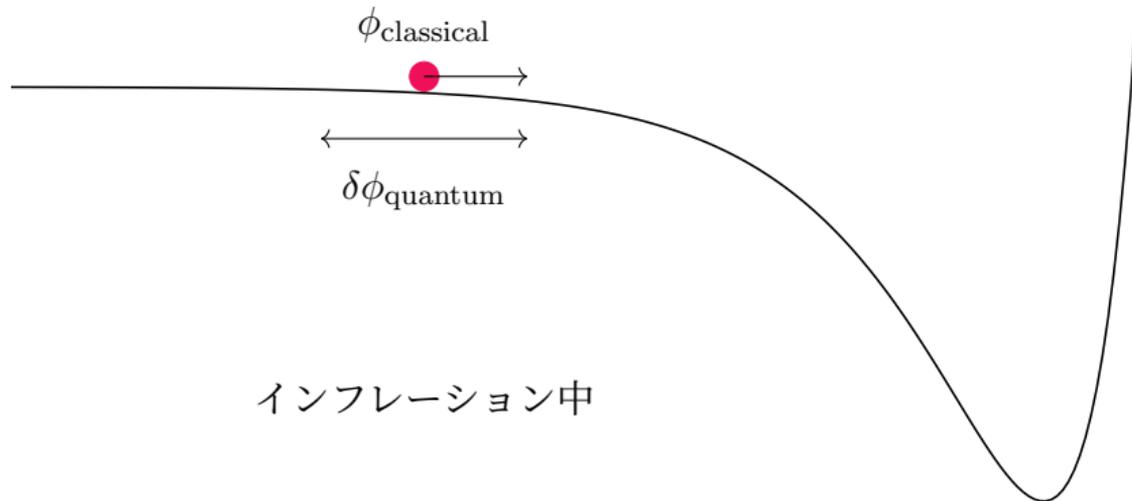
- ミンコフスキー時空上の QFT
- 素過程: 散乱や崩壊



- ファインマンルール \Rightarrow 粒子 X の生成率や消滅率
- **ボルツマン方程式**が有効: $\frac{dN_X}{dt} = (\text{生成率}) - (\text{消滅率})$

粒子生成（宇宙論の場合）

- 曲がった時空上の QFT \Rightarrow 粒子描像がいつでも得られるとは限らない
- 素過程: 量子揺らぎの増幅



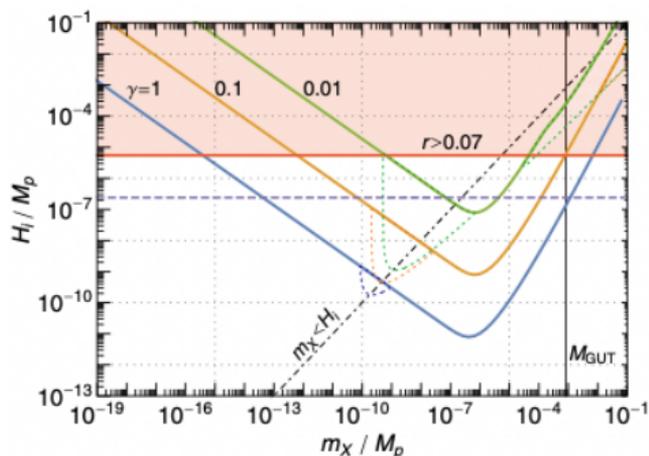
- $\delta\phi_{\text{quantum}}$ の振動数（有効質量）が時間に依存する
- **ボゴリューボフ変換**により取り扱いが可能

例: 重力的な暗黒物質生成

- 重力相互作用は暗黒物質の必要条件:

$$\mathcal{L} = -\frac{M_P^2}{2}R + \mathcal{L}_{\text{SM}} + \mathcal{L}_{\text{DM}} \Rightarrow \frac{h_{\mu\nu}}{M_P}(T_{\text{SM}}^{\mu\nu} + T_{\text{DM}}^{\mu\nu})$$

- SM + SM \rightarrow graviton \rightarrow DM + DM [Garny, Sandora, Sloth '15]



- 質量 m_X のスカラー暗黒物質を仮定

- ボルツマン方程式:

$$\dot{n}_X + 3Hn_X = R_{\text{SM} \rightarrow X} \sim \frac{T^8}{M_P^4}$$

$$\Rightarrow \frac{n_X}{T^3} \sim \frac{R_{\text{SM} \rightarrow X}}{T^3 H} \propto T_{\text{RH}}^3$$

- $T_{\text{RH}} \sim \gamma \sqrt{M_P H_i}$

- $\Omega_X h^2 \propto m_X T_{\text{RH}}^3 \propto m_X H_i^{3/2}$

重力的な暗黒物質生成とインフレーション

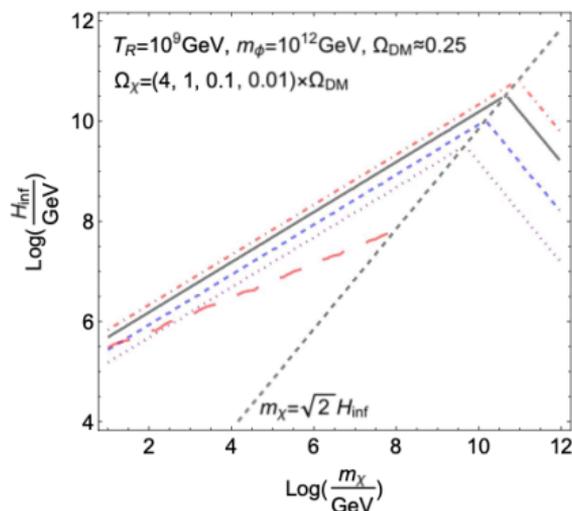
- 宇宙初期では $\phi \rightarrow \text{DM}$ の方が $\text{SM} \rightarrow \text{DM}$ より支配的 ($\rho_\phi \gg \rho_R$)

[Ema, Jinno, Mukaida, Nakayama '15,'16, Ema, Nakayama, Tang '18]

- DM 生成のシナリオ:

- インフラトン振動: $\phi(t) \sim \frac{\phi_e}{m_\phi t} \sin(m_\phi t) \Rightarrow$ 背景重力場 ($g_{\mu\nu}$) の振動
- DM 運動項の振動 ($\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi$) \Rightarrow DM 生成

[Ema, Nakayama, Tang '18]



- DM (χ) の運動方程式:

$$\chi_k'' + \left[k^2 + a^2 m_\chi^2 + \frac{1}{6} a^2 R \right] \chi_k = 0$$

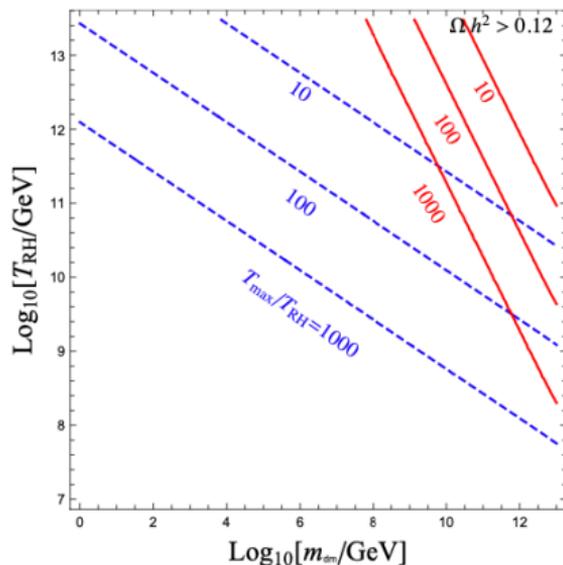
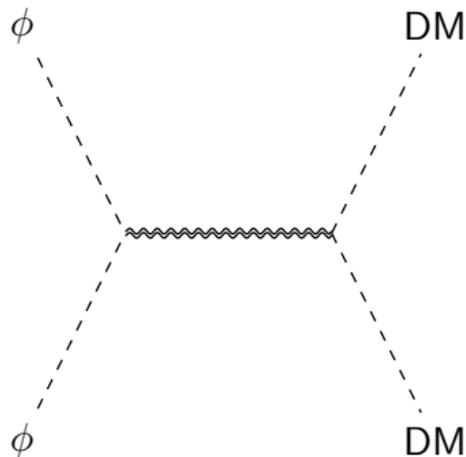
- ボゴリューボフの方法により数値計算:

$$\rho_\chi = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 a^4} \left[|\chi_k'|^2 + (k^2 + a^2 m_\chi^2 + a^2 H^2) |\chi_k|^2 - aH (\chi_k \chi_k^{*'} + \chi_k^* \chi_k') \right]$$

重力的な暗黒物質生成 (ボルツマンの方法)

- 同じ生成過程 ($\phi \rightarrow \text{DM}$) がボルツマンの方法により計算可能?

[Mambrini, Olive '21]



- ボルツマン方程式: $\dot{n}_\chi + 3Hn_\chi = R_{\phi \rightarrow \chi} \sim \frac{\rho_\phi^2}{M_P^4}$ ($\rho_\phi \propto a^{-3}$)
- DM 残存量: $\Omega_\chi h^2 \sim \left(\frac{T_{RH}}{10^{10} \text{ GeV}}\right)^3 \left(\frac{T_{max}/T_{RH}}{100}\right)^4 \left(\frac{m_\chi}{10^{10} \text{ GeV}}\right)$

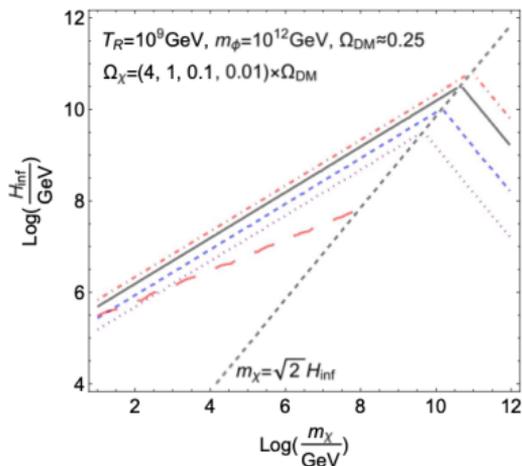
同じ現象の異なる解釈?

- ϕ の振動 $\Rightarrow R$ の振動

$$\begin{cases} \chi_k'' + \omega_k^2 \chi_k = 0 \\ \omega_k^2 = k^2 + a^2 m_\chi^2 + \frac{1}{6} a^2 R \end{cases}$$

- ボゴリューボフの方法

[Ema, Nakayama, Tang '18]

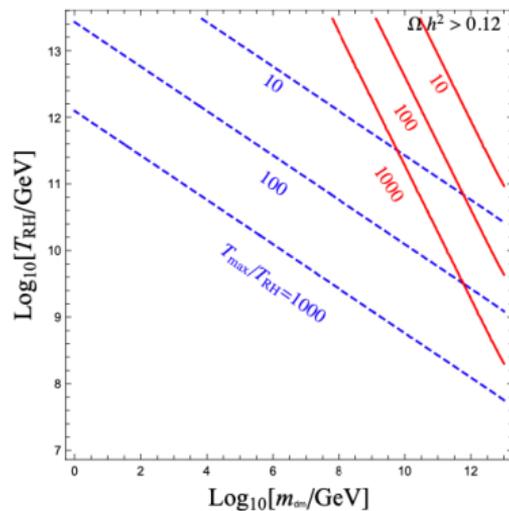


- $\phi\phi \rightarrow \text{graviton} \rightarrow \chi\chi$

- 生成率: $R_{\phi \rightarrow \chi} \sim \frac{\rho_\phi^2}{M_P^4}$

- ボルツマンの方法

[Mambrini, Olive '21]



両者は本当に同じ物理を記述しているのか、あるいは等価な枠組みではないのか?

同じ現象の異なる解釈?



**On a Relativistically Invariant Formulation of
the Quantum Theory of Wave Fields.***

By S. TOMONAGA

(Received May 17, 1946)

Quantum Electrodynamics. I. A Covariant Formulation

JULIAN SCHWINGER
Harvard University, Cambridge, Massachusetts
(Received July 29, 1948)



VOLUME 20, NUMBER 2

APRIL, 1948

**Space-Time Approach to Non-Relativistic
Quantum Mechanics**

R. P. FEYNMAN

Cornell University, Ithaca, New York



The Radiation Theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman

F. J. DYSON

Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey

(Received October 6, 1948)

両者は本当に同じ物理を記述しているのか、あるいは等価な枠組みではないのか?

どう疑問に答えるのか？

- ▶ 位相分布 $f_X(t, \vec{p})$ をボルツマンの方法とボゴリューボフの方法で計算し比較
- ▶ 問題の所在：

ボルツマンの方法

- ▶ ミンコフスキー時空における QFT
- ▶ 粒子生成はボルツマン方程式における衝突項により記述される

ボゴリューボフの方法

- ▶ 曲がった時空上の QFT
- ▶ 粒子生成は粒子の振動数の時間変化により記述される

- ▶ 一見すると両者が同じ結果を与える保証はない (特に $\phi\phi \rightarrow \chi\chi$ において)

■ 重力的粒子生成の理解

- ボルツマンの方法
- ボゴリューボフの方法

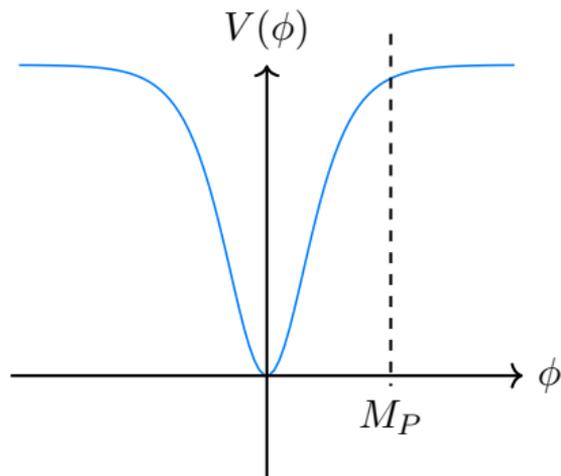


セットアップ

GR + インフラトン (ϕ) + 実スカラー場 (χ):

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x [\mathcal{L}_{\text{EH}} + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_\chi], \quad \begin{cases} \mathcal{L}_{\text{EH}} &= -\frac{M_P^2}{2} R \\ \mathcal{L}_\phi &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \\ \mathcal{L}_\chi &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 \end{cases}$$

インフラトンセクター (例):



▶ T-model: $V(\phi) = 6\lambda M_P^4 \tanh^2\left(\frac{\phi}{\sqrt{6}M_P}\right)$

▶ CMB データ:

$$\ln(10^{10} A_S) = 3.044 \quad (k = 0.05 \text{ Mpc}^{-1})$$

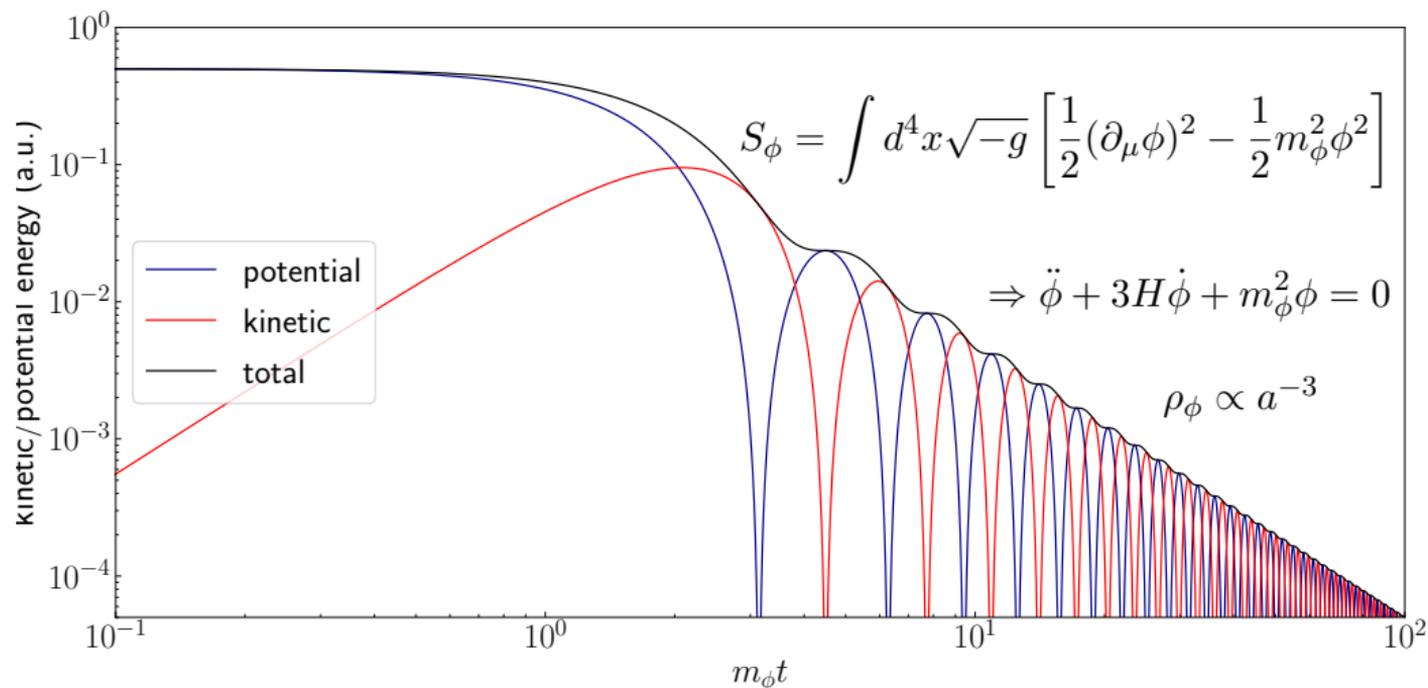
$$\lambda \simeq \frac{18\pi^2 A_S}{6N^2} \simeq 2.1 \times 10^{-11} \quad (N = 55)$$

▶ インフラトン振動期 ($\phi \ll M_P$):

$$V(\phi) \simeq \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2, \quad m_\phi^2 = 2\lambda M_P^2 \simeq (10^{13} \text{ GeV})^2$$

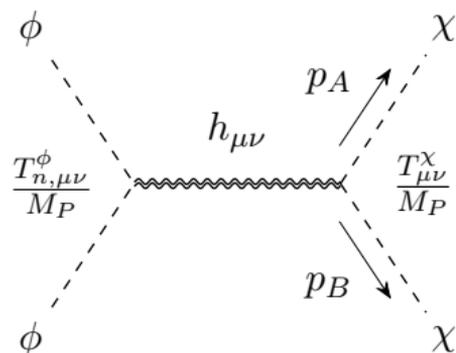
インフラトンダイナミクス

インフラトン = コヒーレント状態 \Rightarrow 空間的に一様に分布



運動・ポテンシャルエネルギーの激しい振動が重力的粒子生成では本質

グラヴィトンを媒介とした粒子生成



- 関係する重力相互作用:

$$S \simeq \int d^4x \left[\mathcal{L}_{h, \text{kin}} + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_\chi - \frac{1}{M_P} h^{\mu\nu} (T_{\mu\nu}^\phi + T_{\mu\nu}^\chi) \right]$$

- 分布関数 $f_\chi(t, \vec{p}_A)$ のボルツマン方程式:

$$\frac{\partial f_\chi}{\partial t} - H |\vec{p}_A| \frac{\partial f_\chi}{\partial |\vec{p}_A|} = C[f_\chi]$$

- 衝突項 ($\chi\chi \rightarrow \phi\phi$ は無視できるほど小さい時):

$$C[f_A] = \frac{\pi \rho_\phi^2}{16 \beta m_\phi^2 M_P^4} \left(1 + \frac{m_\chi^2}{2m_\phi^2} \right)^2 \delta(|\vec{p}_A| - \beta m_\phi), \quad \beta \equiv \sqrt{1 - \frac{m_\chi^2}{m_\phi^2}}$$

- χ の位相分布関数 (comoving momentum $k = |\vec{p}_A| a(t)$):

$$f_\chi(t, |\vec{p}_A|) = \frac{9\pi}{64} \left(\frac{H_e}{m_\phi} \right)^3 \left(\frac{m_\phi}{k} \right)^{9/2} \left(1 - \frac{m_\chi^2}{m_\phi^2} \right)^{5/4} \left(1 + \frac{m_\chi^2}{2m_\phi^2} \right)^2 \propto k^{-9/2}$$

■ 重力的粒子生成の理解

- ボルツマンの方法
- ボゴリューボフの方法



曲がった時空上の QFT のポイント

- 以降では $ad\eta = dt$ と $\tilde{\chi} \equiv a^{-1}\chi$ を使う:

$$S_\chi = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_\chi = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\tilde{\chi}')^2 - \frac{1}{2} \tilde{\chi} \omega^2 \tilde{\chi} \right], \quad \begin{cases} \omega^2 \equiv \nabla^2 + a^2 m_\chi^2 + \Delta \\ \Delta \equiv \frac{1}{6} a^2 R \end{cases}$$

- 共役運動量 $\tilde{\pi} \equiv \tilde{\chi}'$ を定義すると:

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \tilde{\pi}^2 + \frac{1}{2} \tilde{\chi} \omega^2 \tilde{\chi} \right]$$

- $\omega = \omega(t) \Rightarrow H$ は時間の関数:

$$\tilde{\chi}^{(\text{past})} \neq \tilde{\chi}^{(\text{future})} \iff |0^{(\text{past})}\rangle \neq |0^{(\text{future})}\rangle$$

ボゴリューボフ変換

- $\tilde{\chi}_k^{(1)} = \tilde{\chi}_k(t_1)$ と $\tilde{\chi}_k^{(2)} = \tilde{\chi}_k(t_2)$ はそれぞれ生成消滅演算子で展開できる:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\chi}_k^{(1)} \\ \tilde{\pi}_k^{(1)} \end{pmatrix} = a_{\vec{k}} \begin{pmatrix} u_k^{(1)} \\ v_k^{(1)} \end{pmatrix} + a_{-\vec{k}}^\dagger \begin{pmatrix} u_k^{(1)*} \\ v_k^{(1)*} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_k^{(2)} \\ \tilde{\pi}_k^{(2)} \end{pmatrix} = b_{\vec{k}} \begin{pmatrix} u_k^{(2)} \\ v_k^{(2)} \end{pmatrix} + b_{-\vec{k}}^\dagger \begin{pmatrix} u_k^{(2)*} \\ v_k^{(2)*} \end{pmatrix}$$

- $(u_k^{(1)}, v_k^{(1)})$ と $(u_k^{(2)}, v_k^{(2)})$ はそれぞれ完全系を成す:

$$\begin{pmatrix} u_k^{(2)} \\ v_k^{(2)} \end{pmatrix} = \alpha_k \begin{pmatrix} u_k^{(1)} \\ v_k^{(1)} \end{pmatrix} + \beta_k \begin{pmatrix} u_k^{(1)*} \\ v_k^{(1)*} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} b_{\vec{k}} \\ b_{-\vec{k}}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_k^* & -\beta_k^* \\ -\beta_k & \alpha_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\vec{k}} \\ a_{-\vec{k}}^\dagger \end{pmatrix}$$

- α_k と β_k はボゴリューボフ係数と呼ばれる
- 真空を $a_{\vec{k}}|0^{(1)}\rangle = 0$ で定義すると

$$n_k^{(2)} = \langle 0^{(1)} | b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}} | 0^{(1)} \rangle = |\beta_k|^2 \neq 0$$

ボゴリューボフ係数の摂動計算

- $\tilde{\pi} = \tilde{\chi}'$ と EoM \Rightarrow
$$\begin{cases} \alpha'_k = -i\omega_k \alpha_k + \frac{\omega'_k}{2\omega_k} \beta_k \\ \beta'_k = i\omega_k \beta_k + \frac{\omega'_k}{2\omega_k} \alpha_k \end{cases} \quad \text{に従う}$$
- $|\omega'_k/\omega_k^2| \ll 1$ の場合には $\beta_k(\eta) \simeq \int_{\eta_i}^{\eta} d\eta' \left[\frac{\omega'_k}{2\omega_k} \right] e^{-2i \int_{\eta_i}^{\eta'} d\eta'' \omega_k(\eta'')}$

ボゴリューボフ係数の摂動計算

- $\tilde{\pi} = \tilde{\chi}'$ と EoM \Rightarrow
$$\begin{cases} \alpha'_k = -i\omega_k \alpha_k + \frac{\omega'_k}{2\omega_k} \beta_k \\ \beta'_k = i\omega_k \beta_k + \frac{\omega'_k}{2\omega_k} \alpha_k \end{cases} \quad \text{に従う}$$
- $|\omega'_k/\omega_k^2| \ll 1$ の場合には $\beta_k(\eta) \simeq \int_{\eta_i}^{\eta} d\eta' \left[\frac{a^3 H m_\chi + (a^2 R)'/6}{k^2 + a^2 m_\chi^2 + a^2 R/6} \right] e^{-2i \int_{\eta_i}^{\eta'} d\eta'' \omega_k(\eta'')}$

ボゴリューボフ係数の摂動計算

■ $\tilde{\pi} = \tilde{\chi}'$ と EoM \Rightarrow
$$\begin{cases} \alpha'_k = -i\omega_k \alpha_k + \frac{\omega'_k}{2\omega_k} \beta_k \\ \beta'_k = i\omega_k \beta_k + \frac{\omega'_k}{2\omega_k} \alpha_k \end{cases} \quad \text{に従う}$$

■ $|\omega'_k/\omega_k^2| \ll 1$ の場合には $\beta_k(\eta) \simeq \int_{\eta_i}^{\eta} d\eta' \left[\frac{a^3 H m_\chi + (a^2 R)'/6}{k^2 + a^2 m_\chi^2 + a^2 R/6} \right] e^{-2i \int_{\eta_i}^{\eta'} d\eta'' \omega_k(\eta'')}$

■ $k \gg a\bar{H}$ (さもなければ adiabaticity が破れる) に対して、主要な寄与は

$$\beta_k \simeq \frac{1}{2} \int_{\eta} \left[\frac{3 (a\bar{H})^3 (m_\phi/\bar{H})}{2 (k^2 + a^2 m_\chi^2)} \left(1 + \frac{m_\chi^2}{2m_\phi^2} \right) \underbrace{\sin(2m_\phi t)}_{\text{インフラトンの高速振動}} + \dots \right] \underbrace{e^{-2i \int_{\eta} \omega_k}}_{\chi \text{ の振動数変化}}$$

ボゴリューボフ係数の摂動計算

■ $\tilde{\pi} = \tilde{\chi}'$ と EoM \Rightarrow
$$\begin{cases} \alpha'_k = -i\omega_k \alpha_k + \frac{\omega'_k}{2\omega_k} \beta_k \\ \beta'_k = i\omega_k \beta_k + \frac{\omega'_k}{2\omega_k} \alpha_k \end{cases} \quad \text{に従う}$$

■ $|\omega'_k/\omega_k^2| \ll 1$ の場合には $\beta_k(\eta) \simeq \int_{\eta_i}^{\eta} d\eta' \left[\frac{a^3 H m_\chi + (a^2 R)'/6}{k^2 + a^2 m_\chi^2 + a^2 R/6} \right] e^{-2i \int_{\eta_i}^{\eta'} d\eta'' \omega_k(\eta'')}$

■ $k \gg a\bar{H}$ (さもなければ adiabaticity が破れる) に対して、主要な寄与は

$$\beta_k \simeq \frac{1}{2} \int_{\eta} \left[\frac{3 (a\bar{H})^3 (m_\phi/\bar{H})}{2 (k^2 + a^2 m_\chi^2)} \left(1 + \frac{m_\chi^2}{2m_\phi^2} \right) \underbrace{\sin(2m_\phi t)}_{\text{インフラトンの高速振動}} + \dots \right] \underbrace{e^{-2i \int_{\eta} \omega_k}}_{\chi \text{ の振動数変化}}$$

ボゴリューボフ係数の摂動計算

■ $\tilde{\pi} = \tilde{\chi}'$ と EoM \Rightarrow
$$\begin{cases} \alpha'_k = -i\omega_k \alpha_k + \frac{\omega'_k}{2\omega_k} \beta_k \\ \beta'_k = i\omega_k \beta_k + \frac{\omega'_k}{2\omega_k} \alpha_k \end{cases} \quad \text{に従う}$$

■ $|\omega'_k/\omega_k^2| \ll 1$ の場合には $\beta_k(\eta) \simeq \int_{\eta_i}^{\eta} d\eta' \left[\frac{a^3 H m_\chi + (a^2 R)'/6}{k^2 + a^2 m_\chi^2 + a^2 R/6} \right] e^{-2i \int_{\eta_i}^{\eta'} d\eta'' \omega_k(\eta'')}$

■ $k \gg a\bar{H}$ (さもなければ adiabaticity が破れる) に対して、主要な寄与は

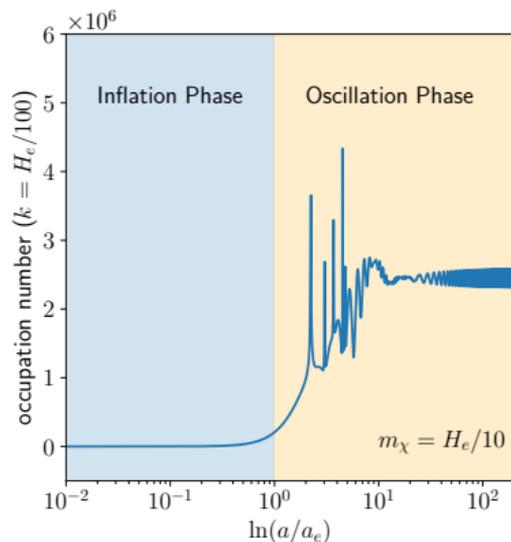
$$\beta_k \simeq \frac{1}{2} \int_{\eta} \left[\frac{3 (a\bar{H})^3 (m_\phi/\bar{H})}{2 k^2 + a^2 m_\chi^2} \left(1 + \frac{m_\chi^2}{2m_\phi^2} \right) \underbrace{\sin(2m_\phi t)}_{\text{インフラトンの高速振動}} + \dots \right] \underbrace{e^{-2i \int_{\eta} \omega_k}}_{\chi \text{ の振動数変化}}$$

■ 定常位相近似を使うと:

$$|\beta_{k \gg a\bar{H}}|^2 \simeq \frac{9\pi}{64} \left(\frac{H_e}{m_\phi} \right)^3 \left(\frac{m_\phi}{k} \right)^{9/2} \left(1 - \frac{m_\chi^2}{m_\phi^2} \right)^{5/4} \left(1 + \frac{m_\chi^2}{2m_\phi^2} \right)^2 \propto k^{-9/2}$$

ボルツマンの方法で得られた f_χ と厳密に一致

相転移による重力的粒子生成

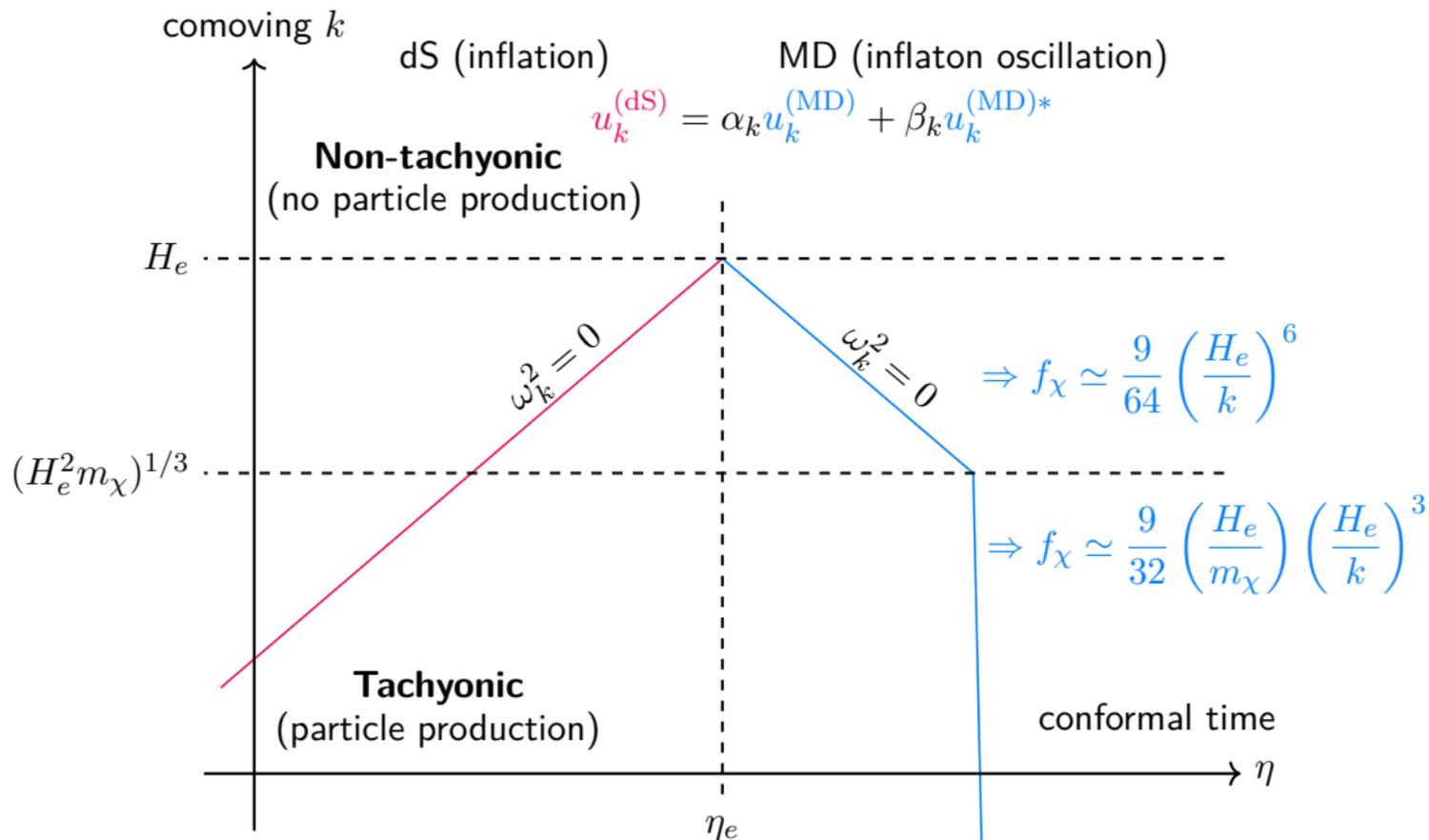


- 時空幾何の急激な変化による粒子生成
- 初期条件: Bunch-Davies 真空 (no particle)
- 振動数の時間変化:

$$\omega_k^2 \simeq \begin{cases} k^2 - \left[2 - \frac{m_\chi^2}{H_e^2} \right] \frac{1}{\eta^2} & \text{(dS)} \\ k^2 + \frac{(a_e H_e)^6 m_\chi^2}{16 H_e^2} \eta^4 - \frac{2}{\eta^2} & \text{(MD)} \end{cases}$$

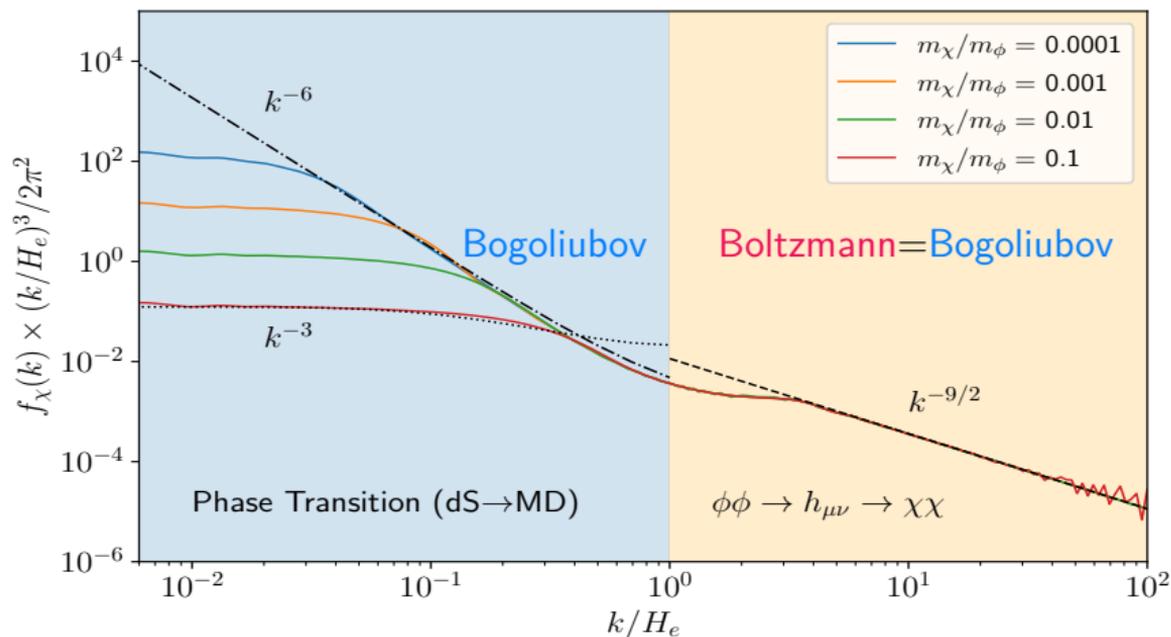
- $\omega_\chi^{(\text{dS})} \neq \omega_\chi^{(\text{MD})} \Rightarrow$ 粒子生成

粒子生成のメカニズム



■ まとめ

まとめ



- $k \gtrsim H_e$ (時空曲率を無視できる) \Rightarrow **ボルツマンの方法** = **ボゴリューボフの方法**
- $k \lesssim H_e$ (時空のダイナミクスが本質) \Rightarrow **ボゴリューボフの方法**のみ記述可能
- 注意点:
 - スペクトルはスピンやインフラトンダイナミクスに依存
 - 軟スペクトルは粒子の相互作用に依存 (自己相互作用や non-minimal coupling など)