Three-generation solutions of equations of motion in heterotic supergravity

神戸大学　D3 竹内万記
共同研究者　露木孝尚(工学院大学)　内田光(北海道大学)
Phys.Rev.D 107 (2023) 9, 9

目次

1. Introduction



1. Introduction

なぜ３つ？

たまたま偶然?

意味がある?

1. Introduction

標準模型

	I	II	III	$SU(3)$ color	$SU(2)$	Isospin I_3	$U(1)_Y$ Charge	$U(1)_{em}$ Charge	Spin
Quark	$\begin{pmatrix} u_\mathrm{L} \\ d_\mathrm{L} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_\mathrm{L} \\ s_\mathrm{L} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_\mathrm{L} \\ b_\mathrm{L} \end{pmatrix}$	triplet	doublet	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$	
	u_R	c_R	t_R	triplet	singlet	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	
	d_R	s_R	b_R	triplet	singlet	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
Lepton	$\begin{pmatrix} \nu_{e\mathrm{L}} \\ e_\mathrm{L} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu\mathrm{L}} \\ \mu_\mathrm{L} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau\mathrm{L}} \\ \tau_\mathrm{L} \end{pmatrix}$	singlet	doublet	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	-1	0 -1	
	e_R	μ_R	τ_R	singlet	singlet	0	-2	-1	

1. Introduction

世代数問題

	I	II	III	$SU(3)$ color	$SU(2)$	Isospin I_3	$U(1)_Y$ Charge	$U(1)_{em}$ Charge	Spin
Quark	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	triplet	doublet	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
	u_R	c_R	t_R	triplet	singlet	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	
	d_R	s_R	b_R	triplet	singlet	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
Lepton	$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	singlet	doublet	$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	-1	0 -1	
	e_R	μ_R	τ_R	singlet	singlet	0	-2	-1	

1. Introduction

なぜ３つのコピーが存在?

たまたま偶然?

何か意味がある?

1. Introduction

標準模型

なぜ３つのコピーが存在?

たまたま偶然?

何か意味がある?

余剰次元模型

1. Introduction

余剰次元模型において

世代数

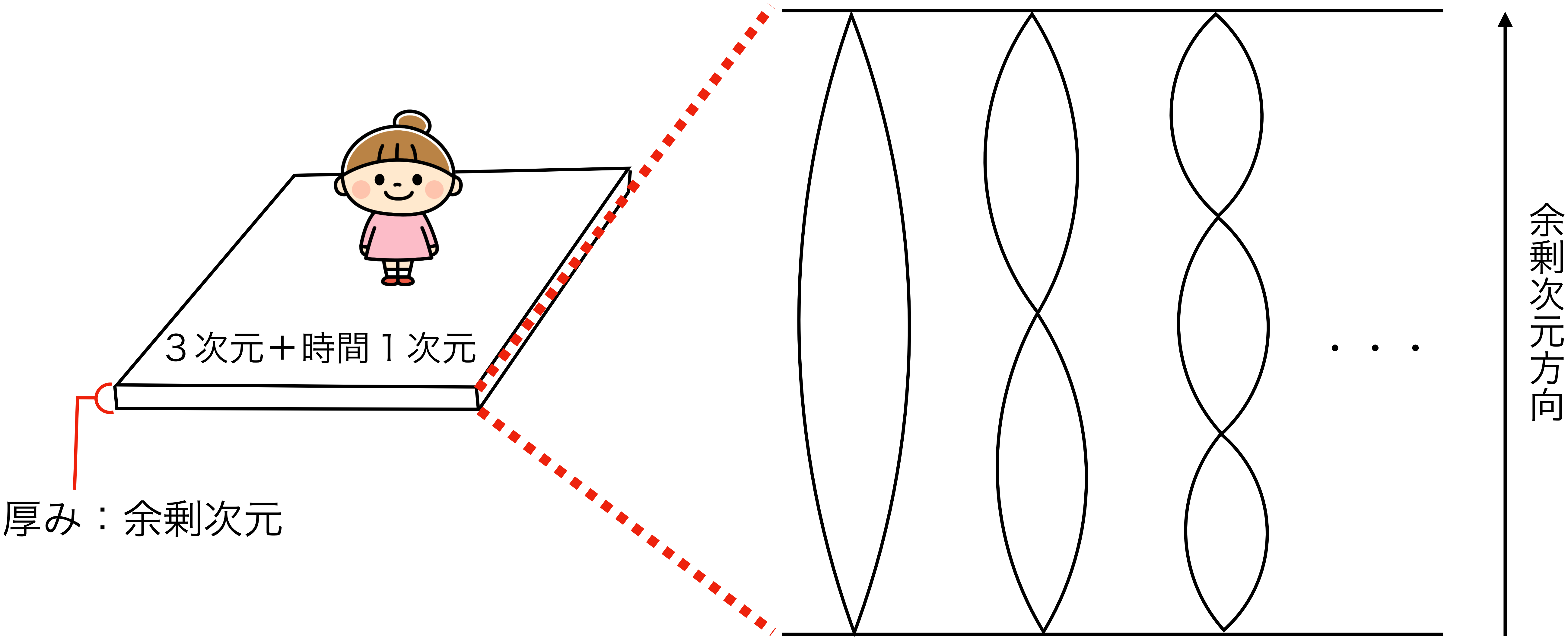
⇕

余剰次元のトポロジカル不変量(幾何)

世代数は物理的意味を持つ！

1. Introduction

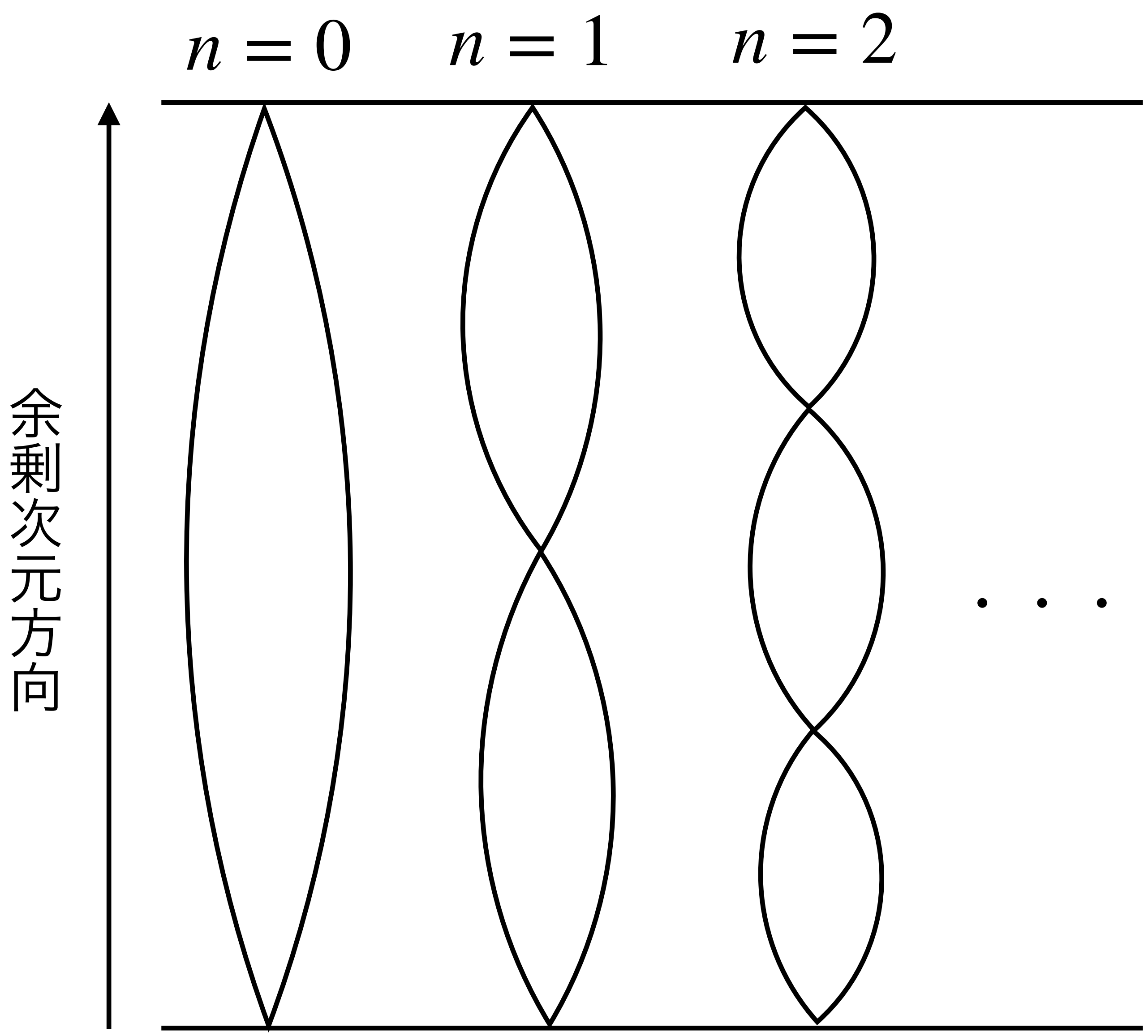
余剰次元模型と世代数

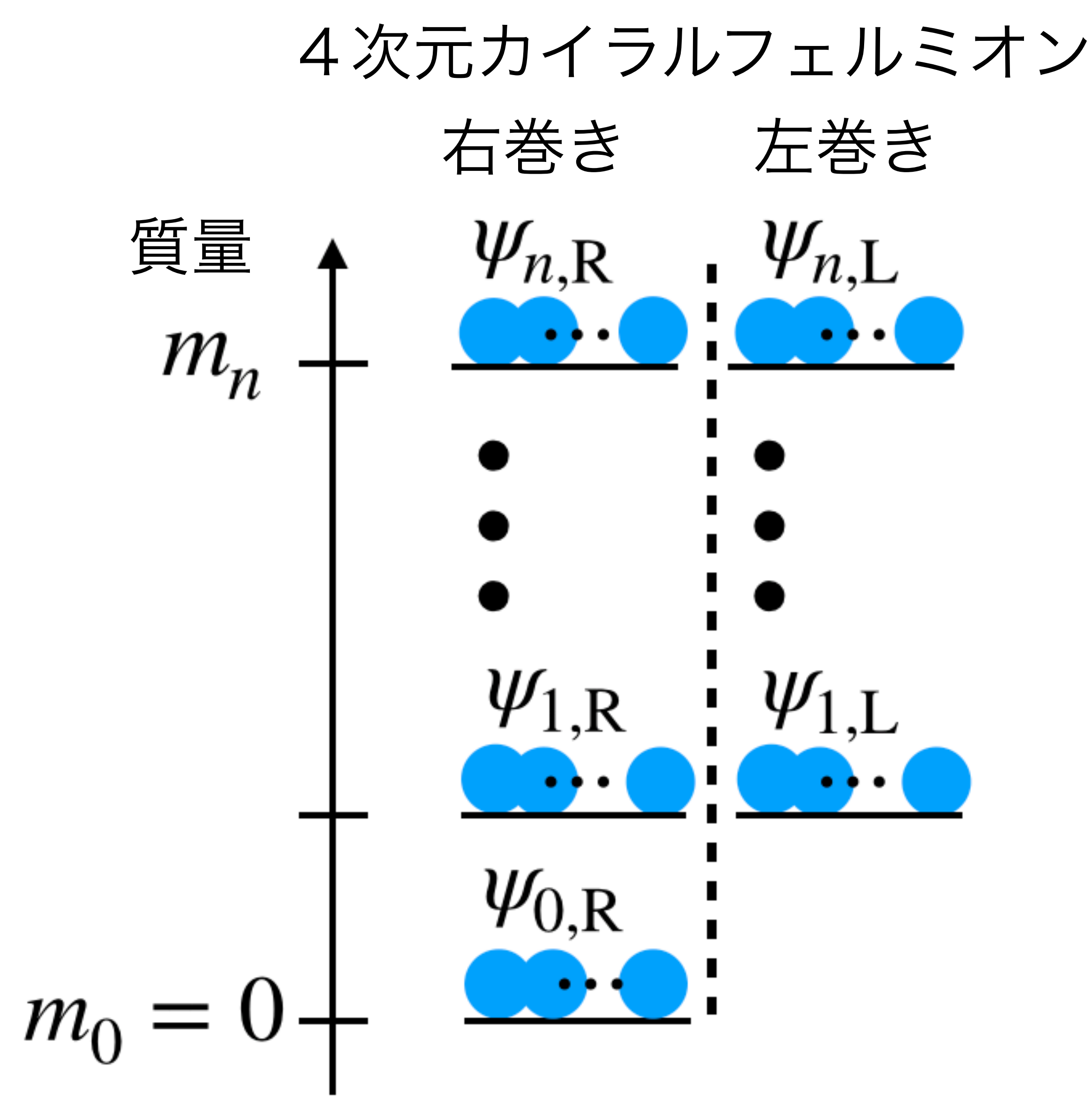


余剰次元方向を振動する様々なモードがある

1. Introduction

余剰次元模型と世代数



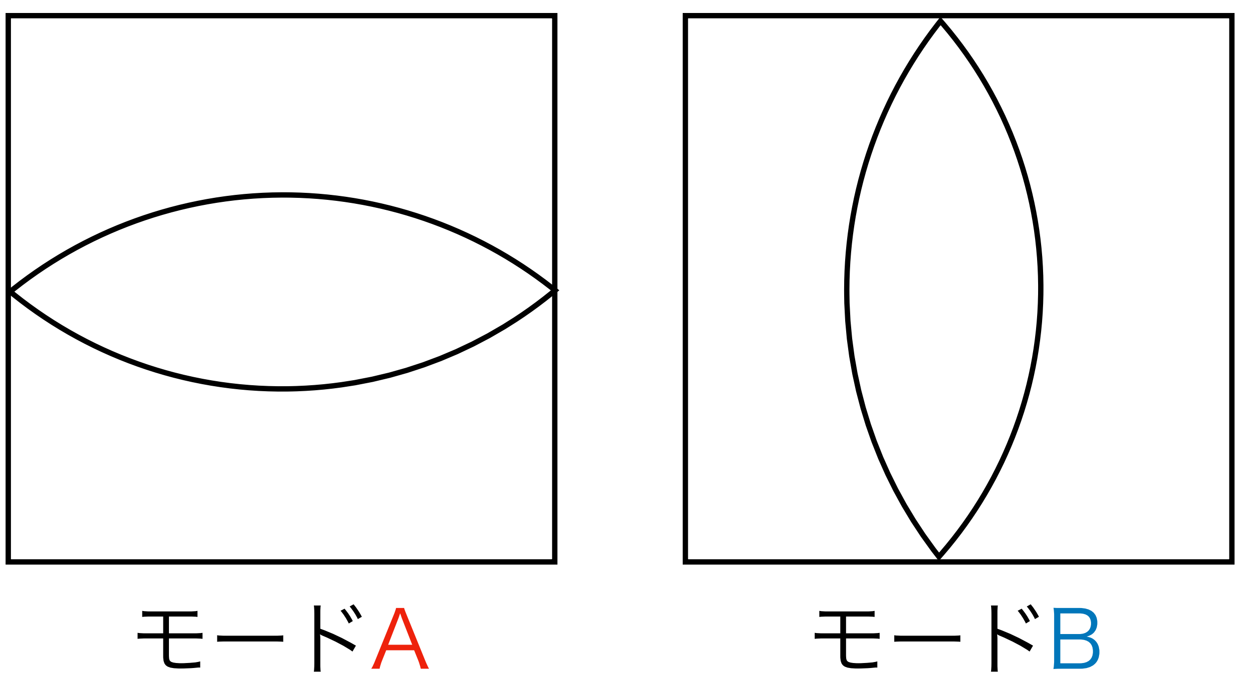


余剰次元方向を振動する様々なモードがある
→4次元では様々な質量を持つ粒子に対応している

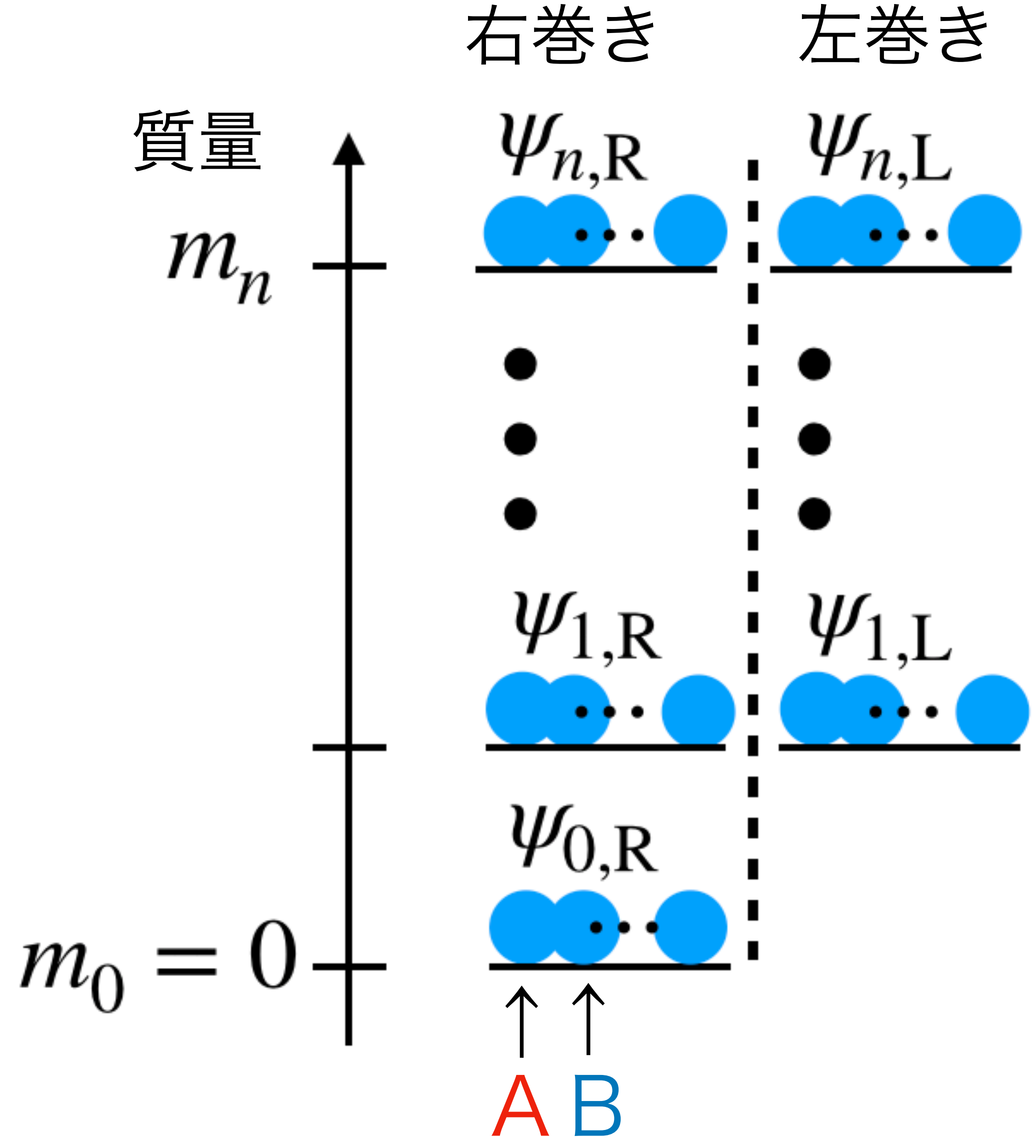
1. Introduction

余剰次元模型と世代数

$m_0 = 0$ のモード



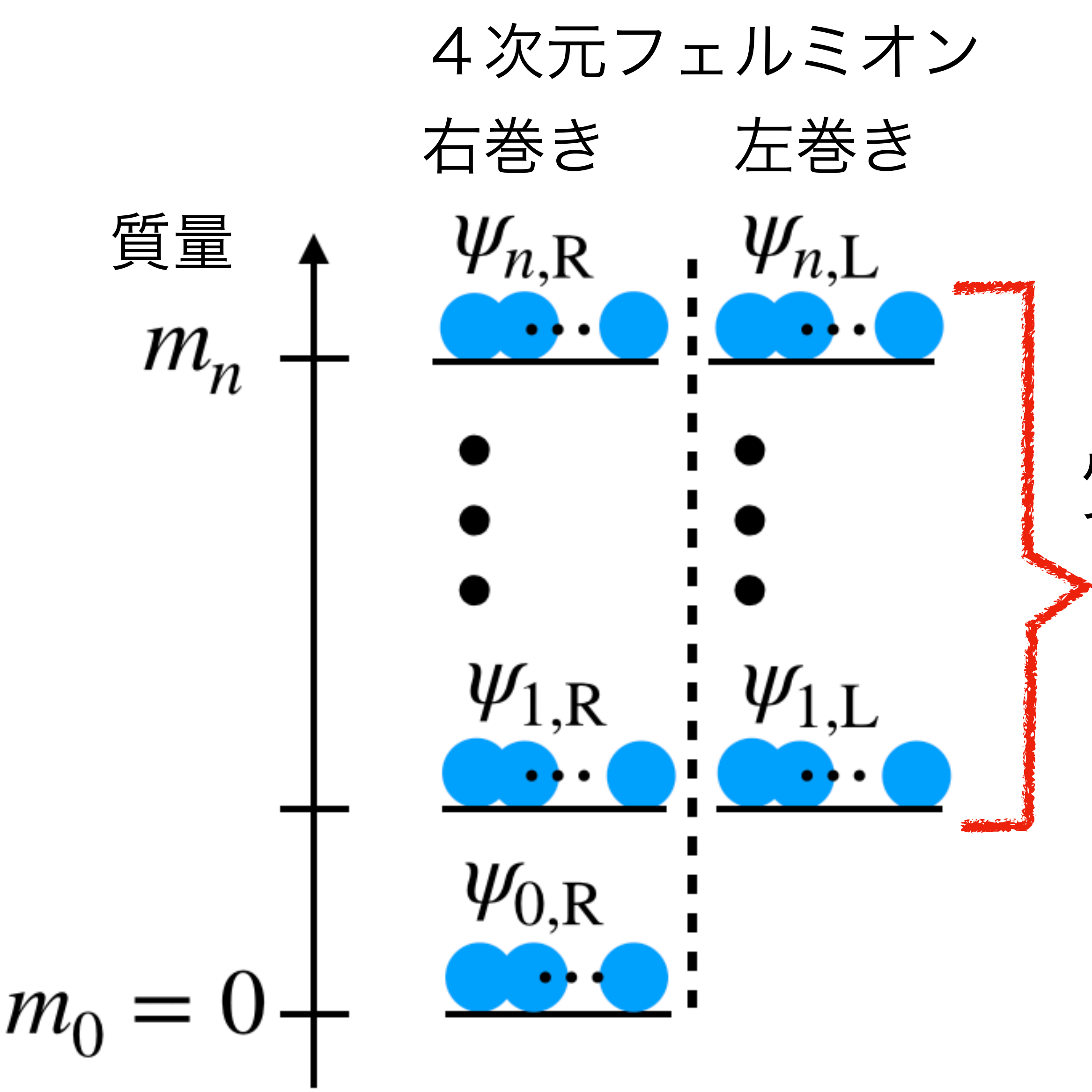
４次元カイラルフェルミオン



同じ質量を持つ独立なモードがあるとき＝縮退している

1. Introduction

余剰次元模型と世代数

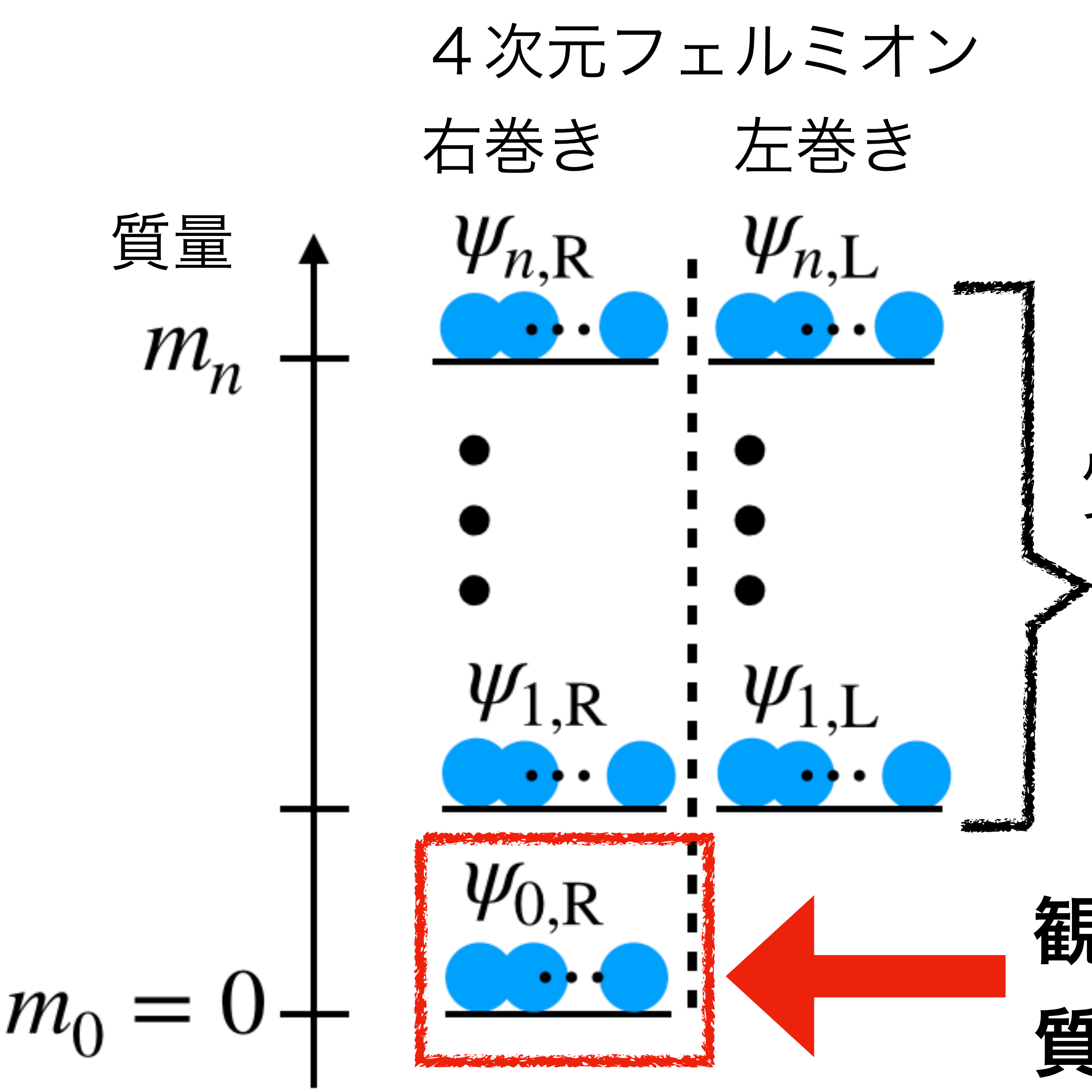


質量は大体、余剰次元の大きさに反比例

質量が０でないモードは
重たすぎて観測できない

1. Introduction

余剰次元模型と世代数



質量は大体、余剰次元の大きさに反比例

質量が０でないモードは
重たすぎて観測できない

観測されるのは質量ゼロの粒子！
質量ゼロ粒子のことをゼロモードと呼ぶ

世代数＝ゼロモード数

1. Introduction

余剰次元模型と世代数

ゼロモードが縮退する模型を探す

標準模型	余剰次元模型
手で３つの場を用意	１つの場の縮退によって複数の世代が得られる

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \\
\begin{pmatrix} u_{\mathrm{L}} \\ d_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{\mathrm{L}} \\ s_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} t_{\mathrm{L}} \\ b_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} \\
u_{\mathrm{R}} & c_{\mathrm{R}} & t_{\mathrm{R}} \\
d_{\mathrm{R}} & s_{\mathrm{R}} & b_{\mathrm{R}} \\
\begin{pmatrix} \nu_{e\mathrm{L}} \\ e_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \nu_{\mu\mathrm{L}} \\ \mu_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \nu_{\tau\mathrm{L}} \\ \tau_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} \\
e_{\mathrm{R}} & \mu_{\mathrm{R}} & \tau_{\mathrm{R}}
\end{array}
$$

Xd chiral fermion

$$
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} U(x,y) \\ D(x,y) \end{pmatrix} \\
U'(x,y) \\
D'(x,y) \\
\begin{pmatrix} N(x,y) \\ E(x,y) \end{pmatrix} \\
E'(x,y)
\end{array}
\quad \xrightarrow{\text{縮退}} \quad
\begin{array}{ccc}
\mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \\
\begin{pmatrix} u_{\mathrm{L}} \\ d_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{\mathrm{L}} \\ s_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} t_{\mathrm{L}} \\ b_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} \\
u_{\mathrm{R}} & c_{\mathrm{R}} & t_{\mathrm{R}} \\
d_{\mathrm{R}} & s_{\mathrm{R}} & b_{\mathrm{R}} \\
\begin{pmatrix} \nu_{e\mathrm{L}} \\ e_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \nu_{\mu\mathrm{L}} \\ \mu_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \nu_{\tau\mathrm{L}} \\ \tau_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} \\
e_{\mathrm{R}} & \mu_{\mathrm{R}} & \tau_{\mathrm{R}}
\end{array}
$$

1. Introduction

余剰次元模型と世代数

Atiyah-Singer index theorem

ゼロモード数＝トポロジカル不変量

余剰次元のトポロジカル不変量が世代数を与える

1. Introduction

余剰次元模型と世代数

D次元のAtiyah-Singer index theorem

Atiyah-Singer index theorem

$$n_+ - n_- \propto \int_{\mathscr{M}} F^{D/2} + \int_{\mathscr{M}} (R \wedge R)^{D/4} + (F, R \text{ mixing term})$$

$n_\pm$: カイラルゼロモード数 #　D: 次元　$\mathscr{M}$: 滑らかな多様体

1. Introduction

超弦理論・・・量子重力理論として有力な理論

６次元の余剰次元を持つ

超弦理論には５つのタイプが存在

タイプ I

$E_8 \times E_8$ ヘテロティック

タイプ II A

$SO(32)$ヘテロティック

タイプ II B

1. Introduction

超弦理論・・・量子重力理論として有力な理論

６次元の余剰次元を持つ

超弦理論には５つのタイプが存在

タイプＩ

$E_8 \times E_8$ ヘテロティック

タイプⅡA

$SO(32)$ヘテロティック

タイプⅡB

2. 目的と結果

世代数問題解決への道のり

2. 目的と結果

世代数問題解決への道のり

世代数とトポロジー

余剰次元のトポロジカルな量で世代数は決定される
(AS指数定理)

2. 目的と結果

世代数問題解決への道のり

世代数とトポロジー　　３世代は必然か？

余剰次元のトポロジカルな量で世代数は決定される
(AS指数定理)

余剰次元のトポロジカルな量は何によって決定される？

2. 目的と結果

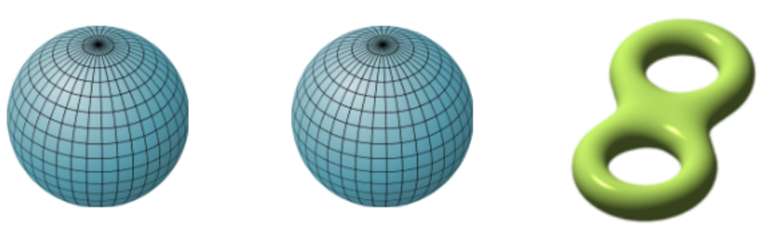
$E_8 \times E_8$ ヘテロティック

運動方程式とビアンキ恒等式
によるfluxへの制限

コンパクト化①・・・$S^2 \times H^2/\Gamma \times H^2/\Gamma$

世代数 ≤ 3

コンパクト化②・・・$S^2 \times S^2 \times H^2/\Gamma$



世代数 ≤ 9

3. 運動方程式

ヘテロティック超重力理論(超弦理論のゼロモードに対する理論)

$$L = \sqrt{-g}e^{-2\phi}\left[R + 4(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{12}H_{MNP}H^{MNP} + \frac{\alpha'}{8}R_{MNPQ}R^{MNPQ} - \frac{\alpha'}{8}\mathrm{tr}(F_{MN}F^{MN})\right]$$

g: 計量, R_{MNPQ}: リーマンテンソル, F_{MN}: ゲージ場の強さ

場　ϕ：ディラトン,　g：計量,　B：B場, A：ゲージ場

$$H_3 = dB_2 - \frac{\alpha'}{4}(\omega_3 - \omega_3^{grav})$$

$$d\omega_3 = \mathrm{tr}F \wedge F$$

$$d\omega_3^{grav} = \mathrm{tr}R \wedge R$$

ゲージ群　$E_8 \times E_8$

3. 運動方程式

ヘテロティック超重力理論(超弦理論のゼロモードに対する理論)

$$L = \sqrt{-g}e^{-2\phi}\left[R + 4(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{12}H_{MNP}H^{MNP} + \frac{\alpha'}{8}R_{MNPQ}R^{MNPQ} - \frac{\alpha'}{8}\mathrm{tr}(F_{MN}F^{MN})\right]$$

g: 計量, R_{MNPQ}: リーマンテンソル, F_{MN}: ゲージ場の強さ

運動方程式　　Bについて　　$\partial^M(e^{-2\phi}H_{MNP}) = 0$

仮定　$\partial_M\phi = 0$ (ディラトンは定数), $H_{MNP} = 0$

3. 運動方程式

ヘテロティック超重力理論(超弦理論のゼロモードに対する理論)

$$L = \sqrt{-g}e^{-2\phi}\left[R + 4(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{12}H_{MNP}H^{MNP} + \frac{\alpha'}{8}R_{MNPQ}R^{MNPQ} - \frac{\alpha'}{8}\mathrm{tr}(F_{MN}F^{MN})\right]$$

g: 計量, R_{MNPQ}: リーマンテンソル, F_{MN}: ゲージ場の強さ

運動方程式

$$\boxed{\text{仮定}\quad \partial_M\phi = 0\ (\text{ディラトンは定数}),\ H_{MNP} = 0}$$

ϕについて
$$R + \frac{\alpha'}{8}R_{MNPQ}R^{MNPQ} - \frac{\alpha'}{8}\mathrm{tr}(F_{MN}F^{MN}) = 0$$

gについて
$$R_{MN} + \frac{\alpha'}{4}R_{MPQR}{R_N}^{PQR} - \frac{\alpha'}{4}\mathrm{tr}(F_{MP}{F_N}^P) = 0$$

$$R = 0$$

Aについて
$$\nabla_M F^{MN} + [A_M, F^{MN}] = 0$$

ビアンキ恒等式
$$0 = dH = \frac{\alpha'}{4}(\mathrm{tr}R\wedge R - \mathrm{tr}F\wedge F)$$

3. 運動方程式

ヘテロティック超重力理論(超弦理論のゼロモードに対する理論)

$$L = \sqrt{-g}e^{-2\phi}\left[R + 4(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{12}H_{MNP}H^{MNP} + \frac{\alpha'}{8}R_{MNPQ}R^{MNPQ} - \frac{\alpha'}{8}\mathrm{tr}(F_{MN}F^{MN})\right]$$

g: 計量, R_{MNPQ}: リーマンテンソル, F_{MN}: ゲージ場の強さ

運動方程式

仮定　$\partial_M\phi = 0$ (ディラトンは定数), $H_{MNP} = 0$

ϕについて　$$R + \frac{\alpha'}{8}R_{MNPQ}R^{MNPQ} - \frac{\alpha'}{8}\mathrm{tr}(F_{MN}F^{MN}) = 0$$

gにつ

Aにつ

R, F の関係式 => コンパクト化をして解を見つける

ビアンキ恒等式　$$0 = dH = \frac{\alpha'}{4}(\mathrm{tr}R\wedge R - \mathrm{tr}F\wedge F)$$

3. 運動方程式

コンパクト化

$$M^{10} = M_0 \times M_1 \times M_2 \times M_3$$

M_0 : 4次元 Minkowski時空

$M_i \, (i = 1,2,3)$: 2次元定曲率多様体

Riemann tensor

$$R^{(i)}_{mnpq} = \lambda_i (g^{(i)}_{mp} g^{(i)}_{nq} - g^{(i)}_{mq} g^{(i)}_{np})$$

λ_i : 定数断面曲率

$$g^{(i)}_{mn} = g^{(i)}_{mn}(x^{(i)})$$

$$\left(m, n, p, q \in \{4,5\} \; (i = 1), \{6,7\} \; (i = 2), \{8,9\} \; (i = 3)\right)$$

3. 運動方程式

コンパクト化

$$M^{10} = M_0 \times M_1 \times M_2 \times M_3$$

M_0 : Minkowski時空

$M_i\,(i = 1,2,3)$: 2次元多様体

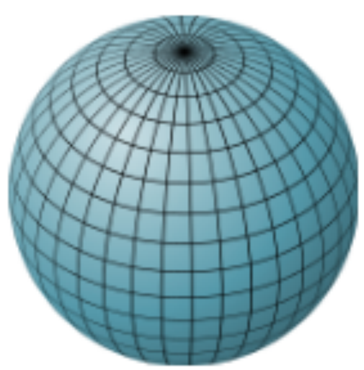
Curvature

$$R^{(i)}_{mnpq} = \lambda_i (g^{(i)}_{mp} g^{(i)}_{nq} - g^{(i)}_{mq} g^{(i)}_{np})$$

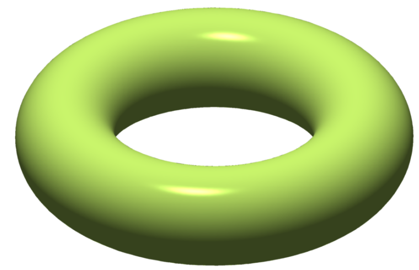
λ_i : 定数断面曲率

$$g^{(i)}_{mn} = g^{(i)}_{mn}(x^{(i)})$$

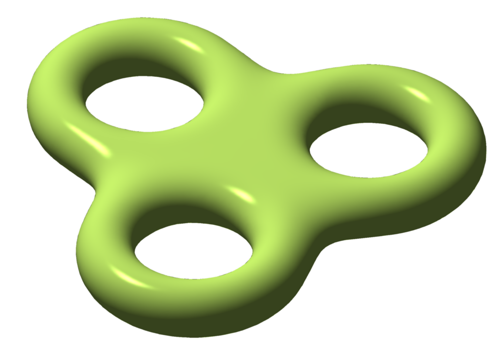
球 S^2



トーラス T^2



コンパクト双曲平面 H^2/Γ



	球 S^2	トーラス T^2	コンパクト双曲平面 H^2/Γ	
	$\lambda_i > 0$	$\lambda_i = 0$	$\lambda_i < 0$	$\lambda_i < 0$
オイラー数 χ	$\chi = 2$	$\chi = 0$	$\chi = -2$	$\chi = -4$
種数 g	$g = 0$	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$

$\chi = 2 - 2g$

3. 運動方程式

コンパクト化

$$M^{10} = M_0 \times M_1 \times M_2 \times M_3$$

M_0 : Minkowski時空

$M_i\,(i = 1,2,3)$: 2次元多様体

Curvature

$$R^{(i)}_{mnpq} = \lambda_i (g^{(i)}_{mp} g^{(i)}_{nq} - g^{(i)}_{mq} g^{(i)}_{np})$$

λ_i : 定数断面曲率

$$g^{(i)}_{mn} = g^{(i)}_{mn}(x^{(i)})$$

ゲージ場の強さ

$$F_{MN} = F_{A,MN} T_A$$

T_A: $E_8 \times E_8$の生成子

仮定

ブロック対角である Freund-Rubin configuration

$$F_{Ai,mn} = \sqrt{g_i} f_{Ai} \epsilon^{(i)}_{mn}$$

$$A = 1,2,\cdots,11$$

f_{Ai} :定数flux density

$\epsilon^{(i)}_{mn}$: Levi-Civita 記号

$$E_8 \times E_8 \supset SO(10) \times U(1)_1 \times U(1)_3 \times \cdots \times U(1)_{11}$$

3. 運動方程式

コンパクト化

$$M^{10} = M_0 \times M_1 \times M_2 \times M_3$$

$$R^{(i)}_{mnpq} = \lambda_i (g^{(i)}_{mp} g^{(i)}_{nq} - g^{(i)}_{mq} g^{(i)}_{np})$$

λ_i : 定数断面曲率

$\rightarrow \mathrm{tr} R \wedge R = 0$

ゲージ場の強さ

$$E^8 \times E^8 \supset SO(10) \times U(1)_1 \times \cdots \times U(1)_{11}$$

$$F_{Ai,mn} = \sqrt{g_i} f_{Ai} \epsilon^{(i)}_{mn}$$

f_{Ai} :定数flux density

$\rightarrow \nabla_M F^{MN} + [A_M, F^{MN}] = 0$を満たす

$$R = 0$$

$$R_{MN} + \frac{\alpha'}{4} R_{MPQR} R_N{}^{PQR} - \frac{\alpha'}{4} \mathrm{tr}(F_{MP} F_N{}^P) = 0$$

$$0 = dH = \frac{\alpha'}{4} (\mathrm{tr} R \wedge R - \mathrm{tr} F \wedge F)$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_i + \lambda_i^2 - \sum_{A=1}^{11} f_{Ai}^2 = 0$$

$$\sum_{A=1}^{11} f_{Ai} f_{Aj} = 0 \quad (i \neq j)$$

T.Tsuyuki "Minkowski spacetime and non-Ricci-flat compactification in heterotic supergravity" *Phys.Rev.D* 104 (2021) 6, 066009

3. 運動方程式

Gauss-Bonnetの定理

$$\int_{M_i} \frac{R^{(i)}}{2}\sqrt{g_i}d^2x = \mathrm{vol}(M_i)\lambda_i = 2\pi\chi_i$$

χ_i : オイラー数

Diracの量子化条件

$$\int_{M_i} F_{Ai} = \mathrm{vol}(M_i) f_{Ai} = 2\pi n_{Ai}$$

n_{Ai} : 整数

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_i + \lambda_i^2 - \sum_{A=1}^{11} f_{Ai}^2 = 0$$

$$\sum_{A=1}^{11} f_{Ai} f_{Aj} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\boxed{f_{Ai} = \frac{n_{Ai}}{\chi_i}\lambda_i}$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_i = \frac{\chi_i^2}{\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 - \chi_i^2}$$

$$\sum_{A=1}^{11} n_{Ai} n_{Aj} = 0 \quad (i \neq j)$$

4. 世代数

世代数の計算方法

$$E^8 \supset SO(10) \times SU(4)$$

$$248 = (45,1) + (1,15) + (10,6) + \boxed{(16,4)} + (\overline{16}, \bar{4})$$

標準模型のフェルミオン

$$N_{gen} = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{6}\left|\int \mathrm{tr}(F^3)\right| = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{6}\left|\int ((\sum_{A=1}^{3} F_A)^3 - \sum_{A=1}^{3} F_A^3)\right| = \left|\prod_{i=1}^{3}\sum_{A=1}^{3} n_{Ai} - \sum_{A=1}^{3}\prod_{i=1}^{3} n_{Ai}\right|$$

$SU(4)$の生成子

$T_1 = \mathrm{diag}[-1,0,0,1]$

$T_2 = \mathrm{diag}[0,-1,0,1]$

$T_3 = \mathrm{diag}[0,0,-1,1]$

Diracの量子化条件

A: $U(1)$を区別するラベル

i : 多様体を区別するラベル

4. 世代数

世代数の計算方法

$$E^8 \supset SO(10) \times SU(4)$$

$$248 = (45,1) + (1,15) + (10,6) + \boxed{(16,4)} + (1\bar{6}, \bar{4})$$

標準模型のフェルミオン

$$N_{gen} = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{6}\left| \int \mathrm{tr}(F^3) \right| = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{6}\left| \int ((\sum_{A=1}^{3} F_A)^3 - \sum_{A=1}^{3} F_A^3) \right| = \left| \prod_{i=1}^{3}\sum_{A=1}^{3} n_{Ai} - \sum_{A=1}^{3}\prod_{i=1}^{3} n_{Ai} \right|$$

世代数には片方のE_8の$U(1)$flux$(A = 1,2,3)$しか効かない！

5. 世代数の制限

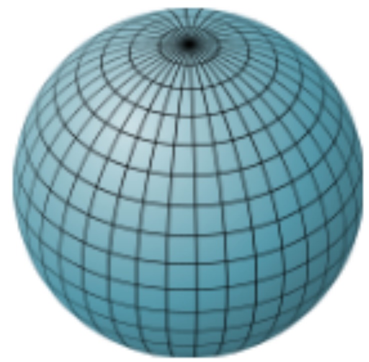
条件式

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

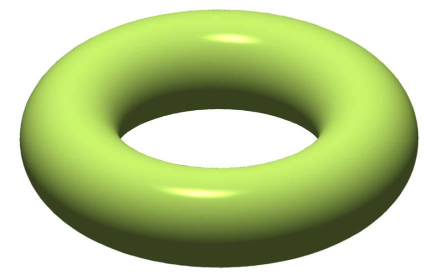
$$\lambda_i + \lambda_i^2 - \sum_{A=1}^{11} f_{Ai}^2 = 0$$

$$\sum_{A=1}^{11} n_{Ai} n_{Aj} = 0 \quad (i \neq j)$$

球 S^2



トーラス T^2



コンパクト
双曲平面 H^2/Γ

5. 世代数の制限

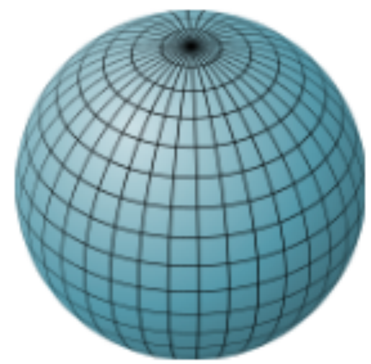
条件式

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

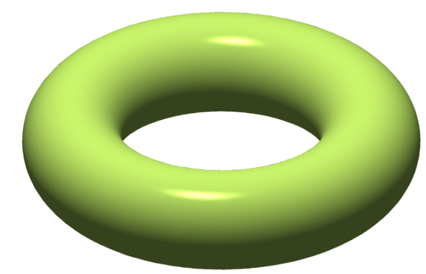
$$\lambda_i + \lambda_i^2 - \sum_{A=1}^{11} f_{Ai}^2 = 0$$

$$\sum_{A=1}^{11} n_{Ai} n_{Aj} = 0 \quad (i \neq j)$$

球 S^2



トーラス T^2



コンパクト
双曲平面 H^2/Γ

トーラスを含むコンパクト化→②よりfluxゼロ

5. 世代数の制限

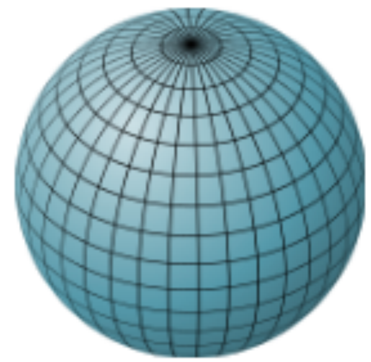
条件式

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \qquad \cdots ①$$

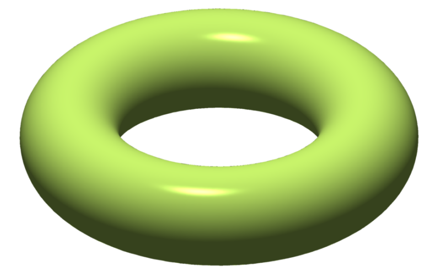
$$\lambda_i + \lambda_i^2 - \sum_{A=1}^{11} f_{Ai}^2 = 0 \qquad \cdots ②$$

$$\sum_{A=1}^{11} n_{Ai} n_{Aj} = 0 \qquad (i \neq j) \cdots ③$$

球 S^2



トーラス T^2



コンパクト

双曲平面 H^2/Γ

トーラスを含むコンパクト化→②よりfluxゼロ

0でない世代数を得られるコンパクト化

1) $S^2 \times H^2/\Gamma \times H^2/\Gamma$

2) $S^2 \times S^2 \times H^2/\Gamma$

5. 世代数の制限

1) $S^2 \times H^2/\Gamma \times H^2/\Gamma$

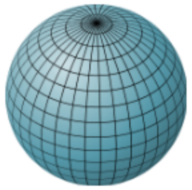
条件式

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \cdots①$$

$$\lambda_i = \frac{\chi_i^2}{\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 - \chi_i^2} \quad \cdots②$$

$$\sum_{A=1}^{11} n_{Ai} n_{Aj} = 0 \quad (i \neq j)\cdots③$$

S^2



$\chi_1 = 2$, $\lambda_1 > 0\cdots④$

$5 \leq \sum_{A=1}^{11} n_{A1}^2 < 6$ より $\sum_{A=1}^{11} n_{A1}^2 = 5 \rightarrow \lambda_1 = 4\cdots⑤$

H^2/Γ

$\chi_i = -2n$, $\lambda_i < 0$ と条件②より $\lambda_i < -1\cdots⑥$

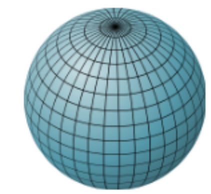
$\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 < \chi_i^2$ と条件⑤,①,②より

$\chi_i = -2$の時 $\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 = 2 \quad (i = 2,3) \rightarrow \lambda_i = 2\cdots⑦$

5. 世代数の制限

1) $S^2 \times H^2/\Gamma \times H^2/\Gamma$

S^2



条件式

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \cdots①$

$\lambda_i = \dfrac{\chi_i^2}{\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 - \chi_i^2} \quad \cdots②$

$\sum_{A=1}^{11} n_{Ai} n_{Aj} = 0 \quad (i \neq j)$

$\chi_1 = 2 \ , \ \lambda_1 > 0 \cdots ④$

$4 < \sum_{A=1}^{11} n_{A1}^2 < 6$ より $\sum_{A=1}^{11} n_{A1}^2 = 5 \rightarrow \lambda_1 = 4 \cdots ⑤$

$\lambda_1 > 0$と、②から $\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 > 4$

時②より $\lambda_i < -1 \cdots ⑥$

$\sum_{A=1} n_{Ai}^2 < \chi_i$ と条件①,①,②より

$\chi_i = -2$の時 $\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 = 2 \quad (i = 2,3) \rightarrow \lambda_i = 2 \cdots ⑦$

5. 世代数の制限

1) $S^2 \times H^2/\Gamma \times H^2/\Gamma$

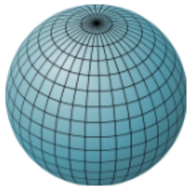
条件式

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \cdots ①$$

$$\lambda_i = \frac{\chi_i^2}{\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 - \chi_i^2} \quad \cdots ②$$

$$\sum_{A=1}^{11} n_{Ai} n_{Aj} = 0 \quad (i \neq j) \cdots ③$$

S^2



$\chi_1 = 2 \,,\, \lambda_1 > 0 \cdots ④$

$4 < \sum_{A=1}^{11} n_{A1}^2 < 6$ より $\sum_{A=1}^{11} n_{A1}^2 = 5 \rightarrow \lambda_1 = 4 \cdots ⑤$

H^2/Γ

$\chi_i = -2n \,,\, \lambda_i < 0$ と条件②より $\lambda_i < -1 \cdots ⑥$

$\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 < \chi_i^2$ と条件⑤①②より

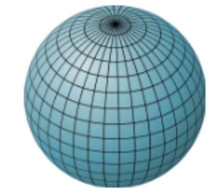
$\lambda_i < 0$と、②から$0 < \sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 < \chi_i^2$

$\chi_i = -$

5. 世代数の制限

1) $S^2 \times H^2/\Gamma \times H^2/\Gamma$

S^2



条件式

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \cdots ①$$

$$\lambda_i = \frac{\chi_i^2}{\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 - \chi_i^2} \quad \cdots ②$$

$$\sum_{A=1}^{11} n_{Ai} n_{Aj} = 0 \quad (i \neq j) \cdots ③$$

$\chi_1 = 2$, $\lambda_1 > 0 \cdots$④

$4 < \sum_{A=1}^{11} n_{A1}^2 < 6$ より $\sum_{A=1}^{11} n_{A1}^2 = 5 \rightarrow \lambda_1 = 4 \cdots$⑤

①と⑥より$\lambda_1 > 2$、②に適用して$\sum_{A=1}^{11} n_{A1}^2 < 6$

$\chi_i = -2n$, $\lambda_i < 0$ と条件②より $\lambda_i < -1 \cdots$⑥

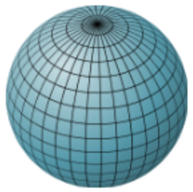
$0 < \sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 < \chi_i^2$ と条件⑤,①,②より

$\chi_i = -2$の時 $\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 = 2 \quad (i = 2,3) \rightarrow \lambda_i = 2 \cdots$⑦

5. 世代数の制限

1) $S^2 \times H^2/\Gamma \times H^2/\Gamma$

S^2



条件式

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \cdots ①$$

$$\lambda_i = \frac{\chi_i^2}{\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 - \chi_i^2} \quad \cdots ②$$

$$\sum_{A=1}^{11} n_{Ai} n_{Aj} = 0 \quad (i \neq j) \cdots ③$$

$\chi_1 = 2$, $\lambda_1 > 0 \cdots ④$

$4 < \sum_{A=1}^{11} n_{A1}^2 < 6$ より $\sum_{A=1}^{11} n_{A1}^2 = 5 \rightarrow \lambda_1 = 4 \cdots ⑤$

$\sum_{A=1}^{11} n_{A1}^2 = 1,2,3$の時$\lambda_i = -4/3, -2, -4$

$\chi_i = -2n$, $\lambda_i < 0$ と条件②より $\lambda_i < -1 \cdots ⑥$

$0 < \sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 < \chi_i^2$ と条件⑤,①,②より

$\chi_i = -2$の時 $\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 = 2 \quad (i = 2,3) \rightarrow \lambda_i = 2 \cdots ⑦$

5. 世代数の制限

1) $S^2 \times H^2/\Gamma \times H^2/\Gamma$

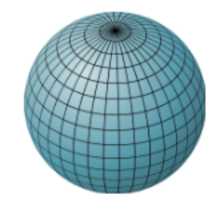
条件式

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \cdots ①$$

$$\lambda_i = \frac{\chi_i^2}{\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 - \chi_i^2} \quad \cdots ②$$

$$\sum_{A=1}^{11} n_{Ai} n_{Aj} = 0 \quad (i \neq j) \cdots ③$$

S^2



$\chi_1 = 2\ ,\ \lambda_1 > 0 \cdots ④$

$5 \leq \sum_{A=1}^{11} n_{A1}^2 < 6$ より $\boxed{\sum_{A=1}^{11} n_{A1}^2 = 5} \rightarrow \lambda_1 = 4 \cdots ⑤$

H^2/Γ

$\chi_i = -2n\ ,\ \lambda_i < 0$ と条件②より $\lambda_i < -1 \cdots ⑥$

$\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 < \chi_i^2$ と条件⑤,①,②より

$\chi_i = -2$ の時 $\boxed{\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 = 2} \quad (i = 2,3) \rightarrow \lambda_i = 2 \cdots ⑦$

5. 世代数の制限

1) $S^2 \times H^2/\Gamma \times H^2/\Gamma$

条件式

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \cdots ①$$

$$\lambda_i = \frac{\chi_i^2}{\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 - \chi_i^2} \quad \cdots ②$$

$$\sum_{A=1}^{11} n_{Ai} n_{Aj} = 0 \quad (i \neq j) \cdots ③$$

$+$

$$S^2 : \sum_{A=1}^{11} n_{A1}^2 = 5$$

$$n_{A1} = (2,1,\vec{0}) \text{ or } (1,1,1,1,1,\vec{0})$$

$$H^2/\Gamma : \sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 = 2 \quad (i = 2,3)$$

$$n_{Ai} = (1,1,\vec{0})$$

$$\longrightarrow \boxed{N_{gen} = \left| \prod_{i=1}^{3} \sum_{A=1}^{3} n_{Ai} - \sum_{A=1}^{3} \prod_{i=1}^{3} n_{Ai} \right| \leq 3}$$

5. 世代数の制限

1) $S^2 \times H^2/\Gamma \times H^2/\Gamma$

条件式

$\lambda_1 + \lambda_2$

$\lambda_i = \frac{}{\sum}$

$\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}$

$,1,1,1,\vec{0})$

$2,3)$

3世代の例

$$
n_{Ai} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\longrightarrow \boxed{N_{gen} = \left| \prod_{i=1}^{3} \sum_{A=1}^{3} n_{Ai} - \sum_{A=1}^{3} \prod_{i=1}^{3} n_{Ai} \right| \leq 3}
$$

5. 世代数の制限

2） $S^2 \times S^2 \times H^2/\Gamma$

条件式

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \cdots ①$$

$$\lambda_i = \frac{\chi_i^2}{\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 - \chi_i^2} \quad \cdots ②$$

$$\sum_{A=1}^{11} n_{Ai} n_{Aj} = 0 \quad (i \neq j) \cdots ③$$

①,②を満たす解

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2,2,-4), (1,1,-2),$

$(4/3, 2/3, -2), (1, 1/3, -4/3), (2/3, 2/3, -4/3)$

例) $\chi_3 = -2$かつ$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2/3, 2/3/ -4/3)$

$$S^2 : \sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 = 10 \quad (i = 1,2)$$

$$n_{A1} = (3, 1, \vec{0}), (2, 2, 1, 1, \vec{0}), (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \vec{0}), (\vec{1}, 0)$$

$$H^2/\Gamma : \sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 = 1 \qquad n_{Ai} = (1, \vec{0})$$

5. 世代数の制限

2）$S^2 \times S^2 \times H^2/\Gamma$

条件式

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad \cdots ①$$

$$\lambda_i = \frac{\chi_i^2}{\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 - \chi_i^2} \quad \cdots ②$$

$$\sum_{A=1}^{11} n_{Ai} n_{Aj} = 0 \quad (i \neq j) \cdots ③$$

例) $\chi_3 = -2$かつ$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (2/3, 2/3/ -4/3)$

$$S^2 : \sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 = 10 \quad (i = 1,2)$$

$$n_{A1} = (3,1,\vec{0}),(2,2,1,1,\vec{0}),(2,1,1,1,1,1,1,\vec{0}),(\vec{1},0)$$

$$H^2/\Gamma : \sum_{A=1}^{11} n_{Ai}^2 = 1 \qquad n_{Ai} = (1,\vec{0})$$

$$\longrightarrow \boxed{N_{gen} = \left| \prod_{i=1}^{3} \sum_{A=1}^{3} n_{Ai} - \sum_{A=1}^{3} \prod_{i=1}^{3} n_{Ai} \right| \leq 9}$$

5. 世代数の制限

2） $S^2 \times S^2 \times H^2/\Gamma$

$(2/3,2/3/-4/3)$

条件式

$\lambda_1 + \lambda_2$

$\lambda_i = \frac{}{\sum}$

$\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}$

$1,1,1,1,1,\vec{0}),(\vec{1},0)$

3世代の例

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \boxed{N_{gen} = \left| \prod_{i=1}^{3} \sum_{A=1}^{3} n_{Ai} - \sum_{A=1}^{3} \prod_{i=1}^{3} n_{Ai} \right| \leq 9}$$

5. 世代数の制限

2）$S^2 \times S^2 \times H^2/\Gamma$

条件式

$(2/3, 2/3/-4/3)$

$\lambda_1 + \lambda_2$

$\lambda_i = \frac{}{\sum}$

$1,1,1,1,1,\vec{0}),(\vec{1},0)$

$\sum_{A=1}^{11} n_{Ai}$

9世代の例

$$n_{Ai} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \boxed{N_{gen} = \left| \prod_{i=1}^{3} \sum_{A=1}^{3} n_{Ai} - \sum_{A=1}^{3} \prod_{i=1}^{3} n_{Ai} \right| \leq 9}$$

6. まとめと今後の展望

- $S^2 \times H^2/\Gamma \times H^2/\Gamma$ and $\chi_{2,3} = -2$のとき、
  世代数は３世代以下
- $S^2 \times S^2 \times H^2/\Gamma$ and $\chi_3 = -2$のとき、
  世代数は9世代以下

6. まとめと今後の展望

・今回の制限を満たす解の中で、さらに選ばれべき解を決める理論的制約はあるか？

・世代数問題だけでなく、他の問題も解決しうる模型なのかを検証する

Thank you!