Rölativistik Kinematik

Doç. Dr. Aysuhan OZANSOY

Ankara Üniversitesi Fizik Bölümü
aozansoy@science.ankara.edu.tr

İÇERİK

- **İÇİNDEKİLER:**

Türk Fizik Derneği 1950 Turkish Physical Society

I. Giriş

Görelilik kuramı; hareketin farklı gözlemciler tarafından nasıl algılandığını, farklı gözlemciler için ne bakımdan aynı ya da farklı olduğunu, birbiri ile ilişkisini, bu ilişkilerin nasıl açıklanacağını fizik açısından ele alır. Tüm fizik yasaları bir gözlem (referans) çerçevesine göre tanımlanır.

Bir teorinin göreliliği, o teorinin yasalarının değişmez (invaryant) kaldığı dönüşümler ile açıklanır. Bu dönüşümler, bir gözlemciye ait verilerden diğer bir gözlemcinin verilerini elde etmeye yarayan bir dizi formülden oluşur.

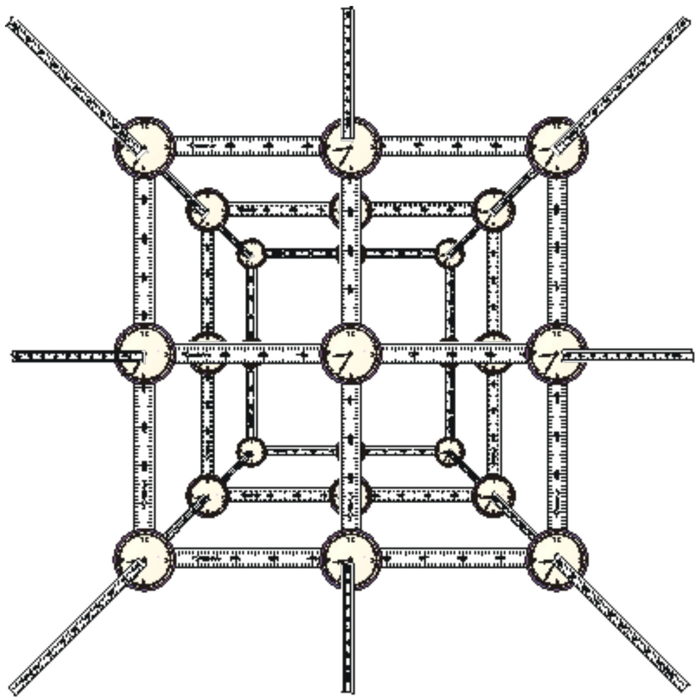
Albert Einstein' ın Özel Görelilik (1905) ve Genel Görelilik (1916) teorileri, Newton' un mutlak uzay ve mutlak zaman kavramlarının "bütünleşmiş" bir **"uzayzaman"** kavramı ile yer değiştirdiği fizik teorileridir.

Özel görelilik için temel sözlük

1. **OLAY:** En temel tanım ‘olay’ dır. Bir olay, uzayda belirli bir konumda bir anda olan bir oluşumdur. Uzayda kesin bir konumda ve kesin bir zamanda gerçekleşir. Örneğin, kararsız bir parçacığın bozunması, iki parçacığın çarpışması, bir ışık sinyalinin gönderilmesi.

2. **REFERANS ÇERÇEVESİ(*):** En temel ikinci tanım ‘referans çerçevesi’ dir. Referans çerçevesi, olaylara ***koordinatları*** atamak için bir sistemdir. Herhangi bir olaya tek bir zaman değerinin atanmasına olanak veren **senkronize saatler** sisteminden ve tek bir konum değeri atanmasına izin veren bir **uzaysal koordinat** sisteminden oluşur.

Gözlem (referans) çerçevesi ➔ Orijin + koordinatlar + zaman ölçen bir araç (saat)



Senkronize saatler sistemi, uzaysal koordinat çerçevesi (sistemi) içinde her yere hepsi birlikte çalışan lokal saatler konumlandırılmış olarak düşünülebilir.

Pratikte böyle bir örgü çizmek yerine genellikle 2 uzay koordinatını (x ve y) ve bir tek saati çiziyoruz.

Şekil Kaynak [1]'den alınmıştır.

!

⇨ **Özel görelilik teorisi**, eylemsiz referans çerçevelerindeki gözlemciler tarafından gözlenen olayları tanımlar.

3. EYLEMSİZ REFERANS ÇERÇEVESİ (ERÇ):

- Newton' un 1. yasasının geçerli olduğu çerçevedir. İvmesiz referans çerçevesidir.

- Eylemsiz bir çerçeveye göre sabit hızla hareket eden herhangi bir çerçeve de bir eylemsiz çerçevesi olacaktır.

- Tercihli bir ERÇ yoktur. Dolayısıyla, bir eylemsizlik çerçevesi belirleyebilir veya oluşturabilirseniz, bu çerçeveye göre sabit bir hıza sahip sonsuz sayıda bu tür çerçeveler bulabilirsiniz.

- Eylemsiz bir çerçeveye göre ivmelenen herhangi bir çerçeve eylemsiz bir çerçeve olamaz. Dönme, hızın değişimini içerdiğinden, eylemsiz bir çerçeveye göre dönen herhangi bir çerçeve eylemsiz bir çerçeve olmaz.

4. GÖZLEMCİ: Gözlemci, olayları kaydetmek için belirli bir referans çerçevesini kullanmaya adanmış bir kişidir. Gözlemci, seçtiği referans çerçevesinde hareketsizdir (durgundur). Özel görelilikteki olayların koordinatlarını bildirmek için bir gözlemcinin konumunun önemli olmadığını anlamak önemlidir. Bir gözlemcinin bir olaya atadığı pozisyon, olayın gerçekleştiği yerdir. Bir gözlemcinin atadığı zaman, o gözlemcinin referans çerçevesinde kullanılan senkronize saatler ağının bir parçası olan, olayın gerçekte meydana geldiği olay yerindeki saatin gösterdiği zamandır.

Örneğin, bir gözlemci gece uzaktaki bir yıldızın patlamasını görebilir, ancak patlamanın zamanını uzun zaman önce yani aslında patlamanın tam olarak meydana geldiği zamanı rapor eder, patlamadan gelen ışığın gözlemcinin konumuna ulaştığı zamanı değil .

5. İNVARYANT: Dönüşümler altında değeri değişmeyen niceliktir. Örneğin; dönmeler altında bir vektörün boyu.
6. KOVARYANT: Dönüşümler altında bir denklemin formunun (biçiminin) aynı kalması. (Daha sonra 4-vektörleri incelerken "kovaryant" kelimesini başka bir anlamda daha kullanacağız).

7. ÖZEL GÖRELİLİK: Bütün eylemsiz (inertial) referans çerçevelerinde geçerli olan fizikle ilgilenir.

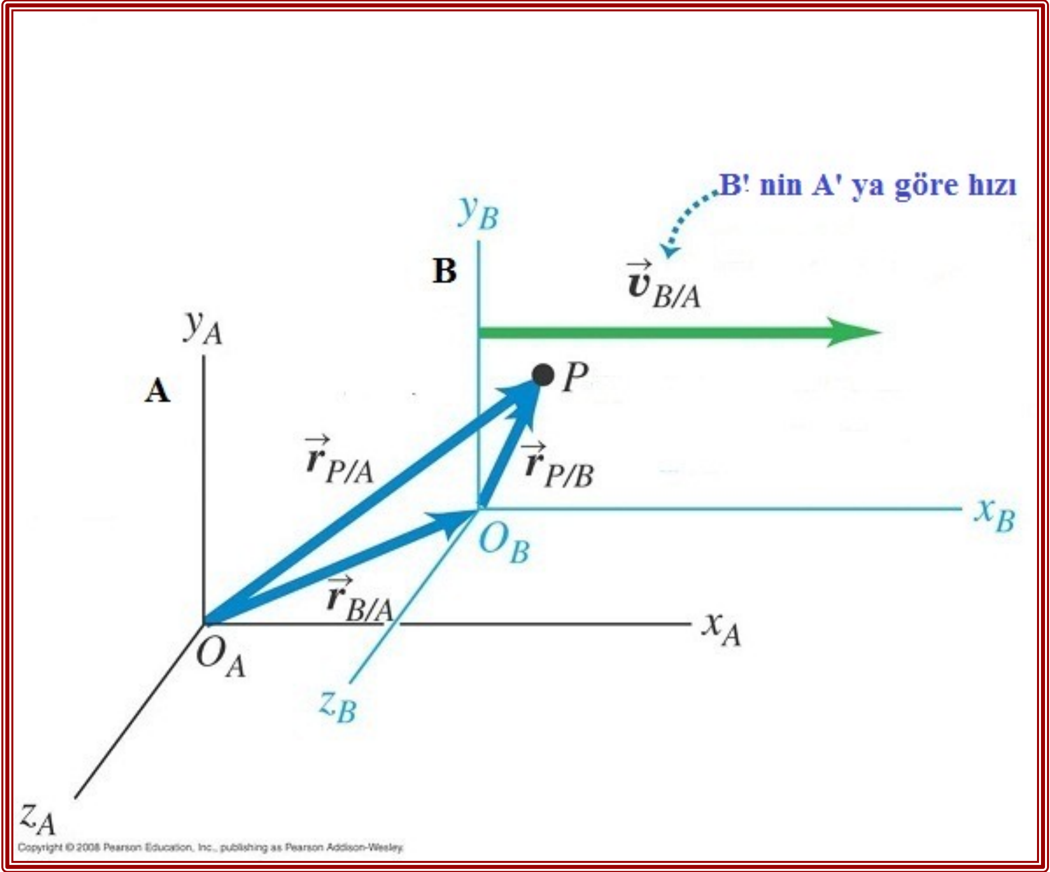
8. GENEL GÖRELİLİK: Daha genel koordinat çerçeveleriyle ilgilenir. Yani eylemsiz referans çerçeveleriyle birlikte ivmeli referans çerçevelerindeki fizikle ilgilenir. (ERÇ'lere göre ivmelenen referans çerçevelerine eylemsiz olmayan (non-inertial) çerçeve denir). Genel Görelilik 'gravitasyonun (kütleçekiminin)' relativistik teorisidir. Genel Görelilik kütleçekimini uzayzamanın bir özelliği olarak ele alır, ayrıca kozmoloji için doğal kavramsal bir çerçeve sağlar.

Cisimlerin Hızı	Eylemsiz Çerçeveler	Eylemsiz Olmayan Çerçeveler
V < c	Newton Yasaları	Newton Yasaları+ Sanki kuvvetler
V~ c	Özel Görelilik	Genel Görelilik

Önceki sayfadaki açıklamayı okuyunuz.

Bu tablo https://www1.phys.vt.edu/~takeuchi/relativity/notes/section06.html' den alınarak düzenlenmiştir.

SORU: A ve B iki eylemsiz referans çerçevesidir. P deki olay için bu iki çerçevenin ölçtükleri konum, hız ve ivme nasıldır? ?



$$\vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA} = \vec{r}_{PA}$$

$$\vec{r}_{PB} = \vec{r}_{PA} - \vec{r}_{BA},$$

$$|\vec{r}_{BA}| = |\vec{v}_{BA}|t = v_0 t, \quad \vec{v}_{BA} \equiv \vec{v}_0 = sbt$$

$$\frac{d\vec{r}_{PB}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{PA}}{dt} - \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{PA}}{dt} - \frac{d(\vec{v}_0 t)}{dt}$$

$$\vec{v}_{PB} = \vec{v}_{PA} - \vec{v}_{BA} = \vec{v}_{PA} - \vec{v}_o$$

$$\frac{d\vec{v}_{PB}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{PA}}{dt} - \frac{d\vec{v}_o}{dt}$$

$$\vec{a}_{PB} = \vec{a}_{PA}$$

→ **Ölçtükleri kuvvetler aynıdır!**

• Bir hareketlinin, farklı referans çerçevelerinde ölçülen hızı farklı olsa da, bu çerçeveler **eylemsiz referans çerçevesi olduğu sürece** ölçülen ivme değerleri aynı olacaktır.

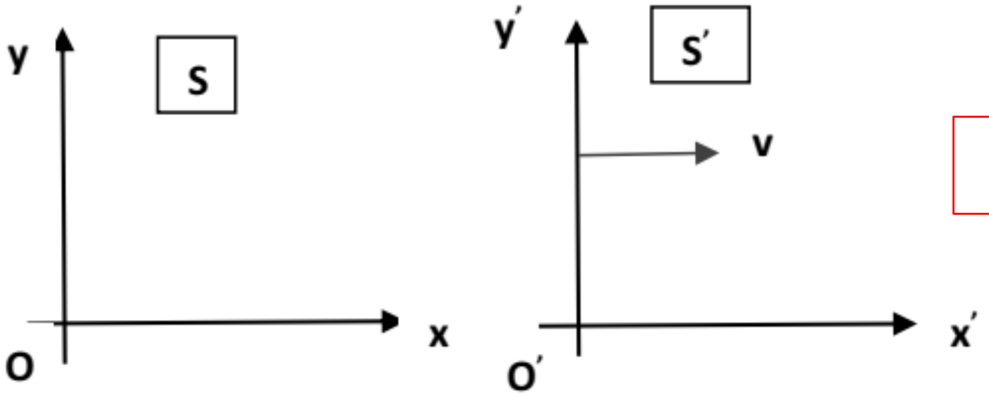
Galileo Dönüşümleri:

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Zaman mutlak ! $t' = t$



Hız dönüşümü

$$u'_x = u_x - v$$

Galileo görelilik ilkesi elektrodinamik için de geçerli midir?

➔ 19 yy sonu 20 yy başlarında ışığın boşlukta yayılabileceği fikri kabul görmüyordu. Diğer dalgalar gibi elektromanyetik dalgalarında yayılması için bir ortamın olduğu düşünülüyordu. Bu ortama ether (esir) adı verilmişti. Basitlik olması bakımından "ether çerçevesi" ışığın hızının tam olarak " c " olarak ölçüldüğü bir ERÇ olarak düşünülebilir. (Michelson-Morley deneyleri!)

➔ Galileo dönüşümlerine göre, iki çerçevenin bağıl hareketine bağlı olarak $c+v$' den $c-v$' ye kadar ölçebilir. Buna göre ışık hızı Galileo dönüşümleri altında invaryant değil!

Örneğin; Maxwell denklemlerinden Faraday Yasası' nın Galileo dönüşümleri altında nasıl davrandığına bakalım:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$$= \ldots$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -v\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \overset{?}{\Rightarrow} -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t'} + v\frac{\partial\vec{B}}{\partial x'}$$

Faraday Yasası Galileo dönüşümleri altında formunu korumadı !

Klasik elektrodinamik için tercihli bir ERÇ var gibi görünüyor. "yeni bir görelilik ilkesi" hem mekanik hem de elektrodinamik için geçerli olmalıdır, ancak buna göre Galileo dönüşümleri yerine **yeni dönüşümler** formüle edilmelidir.

Einstein Görelilik İlkesi

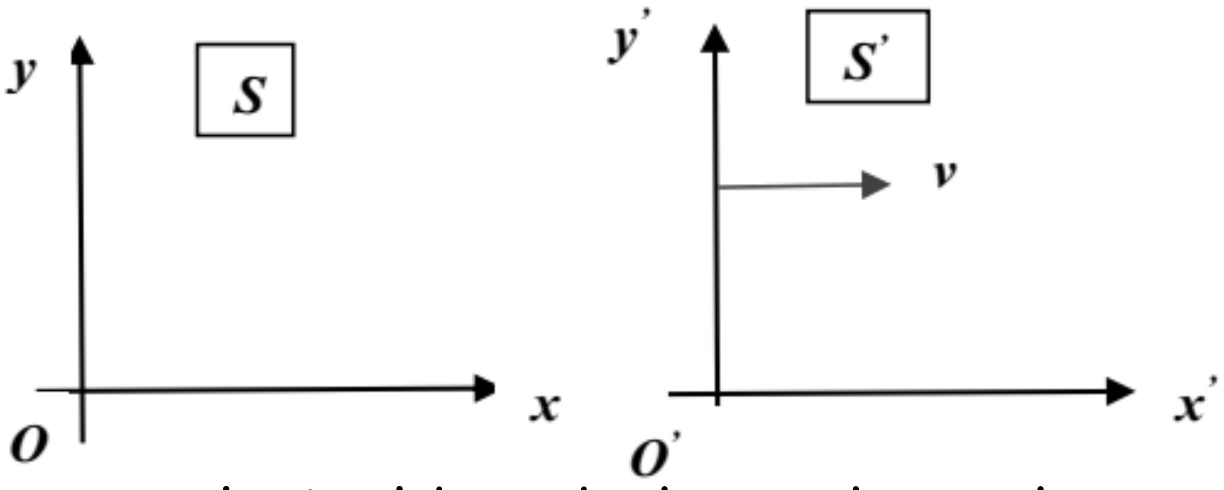
Özel görelilik teorisinin tamamı Einstein' in şu iki görelilik varsayımına dayanarak doğrudan çıkarılmıştır:

1. Görelilik İlkesi (Einstein Görelilik İlkesi): Fizik yasaları tüm ERÇ' lerde aynıdır. Klasik mekanik yasaları gibi em ve optik yasaları da tüm ERÇ' lerde değişmezdir. (Tercihli bir ERÇ yoktur!)
2. Işık hızının sabitliği İlkesi: Işığın boşluktaki hızı sabittir. Bu değer tüm ERÇ' lerde aynıdır ; kaynağın ve gözlemcinin hareketinden bağımsızdır.

Mutlak ışık hızı!

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \cong 3\times10^8 \ m/s$$

II. Lorentz Dönüşümleri



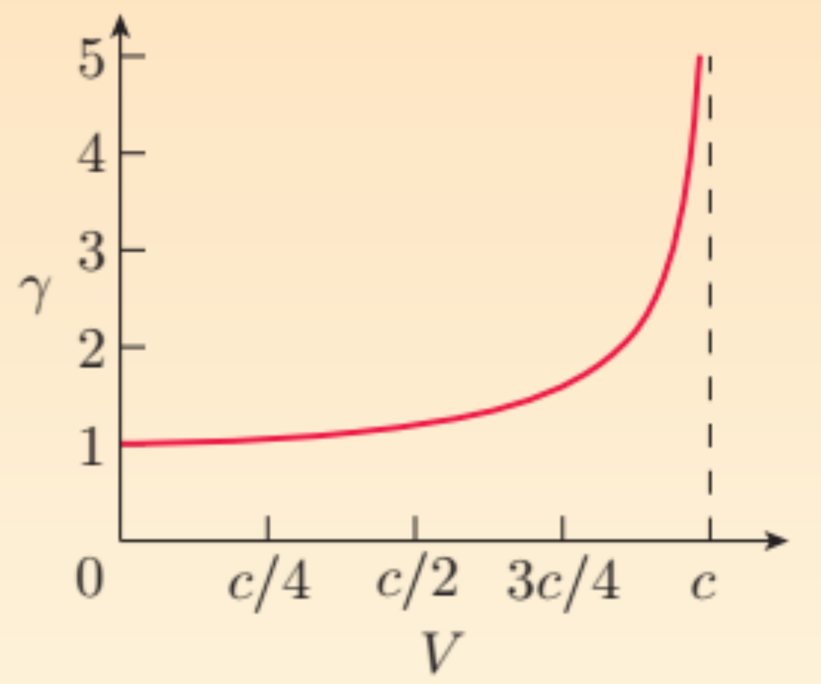
Amaç: Bir gözlem çerçevesindeki koordinatları ve zamanı, başka bir gözlem çerçevesine bağlayan, görelilik varsayımlarına uygun dönüşümleri elde etmek.

- ⇨ Dönüşümleri elde ederken çıkış noktamız Einstein görelilik varsayımları ve uzayzamanda homojenlik (uzayzaman tekdüze ve izotrop).
- ⇨ **Kolaylık:** S ve S' gözlem çerçevelerinin eksenleri paralel. S' çerçevesi S çerçevesine göre $+x'$ yönünde sabit v hızı ile ilerliyor. (ya da buna özdeş olarak S çerçevesi S' çerçevesine göre sabit $-v$ hızı ile ilerliyor)
- ⇨ $t=t'=0$ anında O ve O' çakışık.
- ⇨ Hareket doğrultusuna dik bileşenler etkilenmeyecek.
- ⇨ x' ve t' hem x hem de t nin bir fonksiyonu olmalı. Dönüşümler çizgisel olmalı.

Lorentz dönüşüm faktörü

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$



Lorentz Dönüşümleri

$$x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$$

Ters Dönüşümler: v → -v

Daha kompakt bir formda Lorentz dönüşümleri

$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$
$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

$$x = \gamma(x' + vt')$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \gamma(' + \frac{v}{c^2}x')$$

Çeşitli hız değerleri için Lorentz faktörünün değerleri

v	γ
0,01 c	1,00005
0,1 c	1,005
0,3 c	1,05
0,5 c	1,15
0,7 c	1,40
0,9 c	2,29
0,95 c	3,20
0,999 c	22
0,99999 c	224
0,99999988 c	2050
0,99999999 c	7100

Lorentz faktörü γ'nın kayda değer bir fark yaratabilmesi için hızın, ışık hızına çok çok yakın değerlerde olması gerektiği çizelgeden görülmektedir.

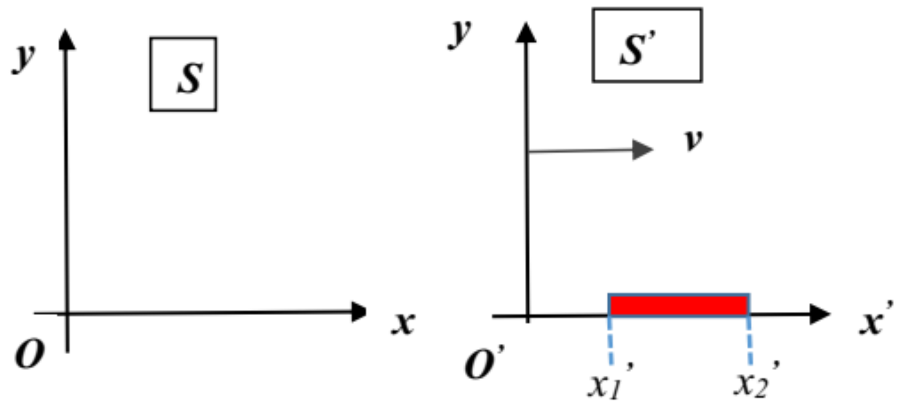
!

$$v << c \;\Rightarrow \frac{v}{c} \rightarrow 0$$

$$\gamma \rightarrow 1$$

limitinde Lorentz dönüşümleri ➔ Galileo dönüşümlerine indirgenir.

Uzunluk Büzülmesi



S' gözlem çerçevesindeki bir gözlemciye göre, bir çubuk durgun olarak x' ekseni boyunca uzanmış olsun. Çubuğun uç noktaları x_2' ve x_1' olarak ölçülmüş olsun. Bu nedenle çubuğun durgun uzunluğu (has uzunluğu) $x_2' - x_1'$ olur. Gözlemciye göre çubuğun v hızıyla hareket ettiği S gözlem çerçevesindeki bir gözlemci çubuğun boyunu ne ölçer?

$$x' = \gamma(x - vt) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x - vt)$$

$$x_2' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x_2 - vt_2) \qquad x_1' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x_1 - vt_1)$$

$$x_2' - x_1' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left[(x_2 - x_1) - v\underbrace{(t_2 - t_1)}\right]$$

DİKKAT: *Çubuğun hangi çerçevede durgun, hangisinde hareketli olduğuna lütfen dikkat ediniz!*

$$\Rightarrow \quad x_2' - x_1' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x_2 - x_1)$$

$$L_0 = x_2' - x_1'$$

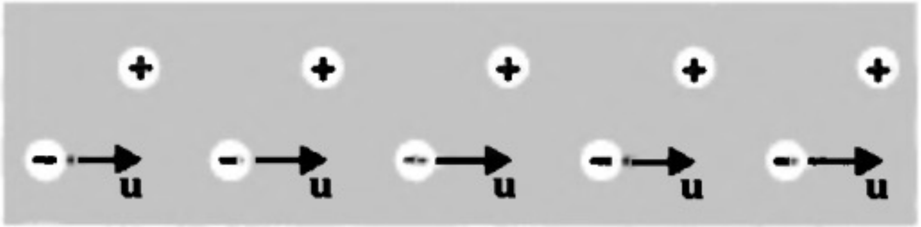
$$L = x_2 - x_1$$

L_0 : Has uzunluk

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_0\sqrt{1-\beta^2} = L \quad \Rightarrow L = \frac{L_0}{\gamma}}$$

$$\gamma > 1 \Rightarrow \; L < L_0$$

- Has uzunluk, bir cismin ölçülen en büyük uzunluğudur. Gözlemciye göre cismin hareketli olduğu bir çerçevede ölçülen uzunluk daima has uzunluktan kısadır. Buna ***uzunluk büzülmesi*** denir. Hareket yönüne dik olan bileşenler etkilenmez.
- Uzunluk büzülmesini doğrudan ölçebilmek için makroskobik bir cismi ışık hızına yakın hızlara kadar hızlandırmak mümkün değildir. Uzunluk büzülmesi etkisi akım geçiren bir teldeki çizgisel yük yoğunluğunda görülebilir.

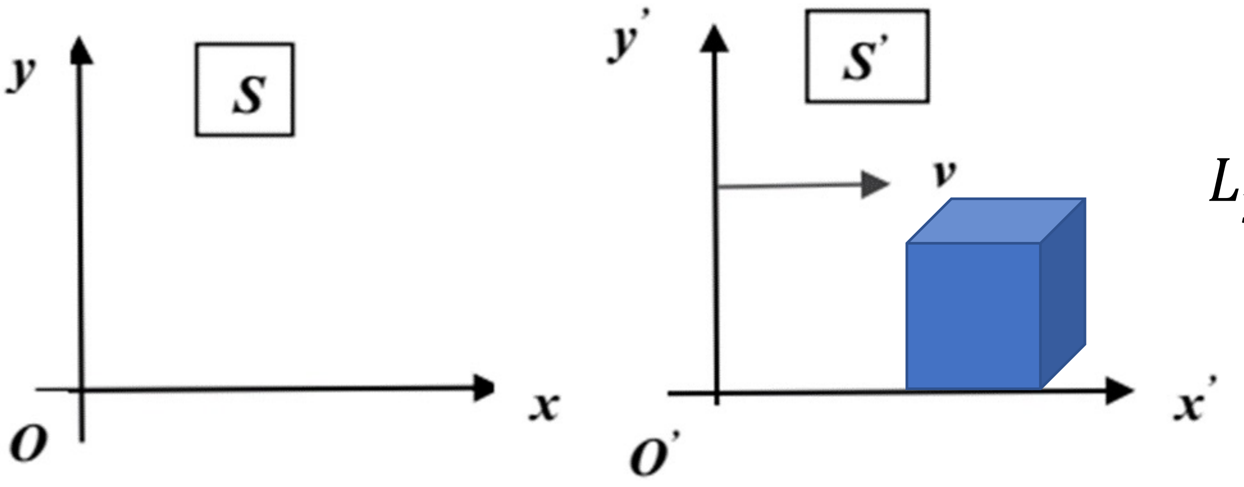


Çizgisel yük yoğunluğu

$$\lambda \equiv \frac{Toplam\ yük}{Telin\ uzunluğu} \qquad \lambda = \frac{Q}{L}$$

Hacim ve yoğunluk nasıl dönüşür?

Bir kutu kendisinin durgun olduğu S' çerçevesinde V' hacmine sahipse v hızıyla hareket ettiği S çerçevesindeki bir gözlemci tarafından ölçülen hacmi nedir? Eğer kutu S' durgunluk çerçevesinde birim hacim başına ρ' tane moleküle sahipse, S sisteminde birim hacim başına taşıdığı molekül sayısı nedir?



$$L_x = \frac{L'_x}{\gamma}$$

$$L_y = L'_y \quad L_z = L'_z$$

Harekete dik doğrultular etkilenmez!

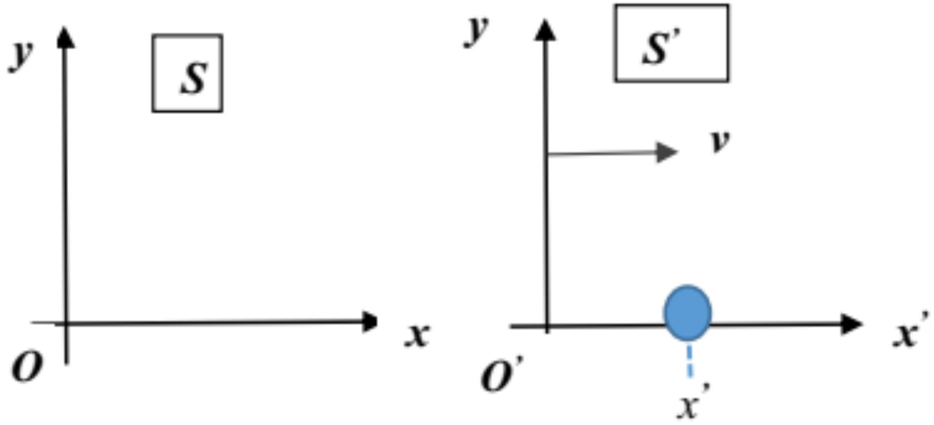
$$V' = L'_x L'_y L'_z$$

$$V = L_x L_y L_z = \frac{L'_x}{\gamma} L'_y L'_z = \frac{V'}{\gamma}$$

$$N' = N \ \ molekül\ sayısı \qquad \rho = \frac{N}{V} \qquad \rho' = \frac{N'}{V'} \Rightarrow \ \rho = \frac{N'}{\frac{V'}{\gamma}} = \gamma\rho'$$

Zaman Genişlemesi

S' çerçevesinde bir x' konumunda bir saat durgun olsun (tüm zamanlarda bu saat x' konumunda). Bir olay bu saatin birim zaman aralığı olsun, yani bu saatin iki "tık" ı arasında geçen zaman olsun.



$$t_1' = t' \quad , \quad t_2' = t' + 1 \quad \Rightarrow \quad t_2' - t_1' = 1\ br$$

- S deki gözlemci için;

$$t_1 = \gamma\left(t_1' + \frac{v}{c^2}x_1'\right) \qquad , \qquad t_2 = \gamma\left(t_2' + \frac{v}{c^2}x_2'\right)$$

$x' = x_1' = x_2'$ olduğu dikkate alınırsa ➔

$$t_2 - t_1 = \gamma\left(\underbrace{t_2' - t_1'}_{1\ br}\right) + \frac{v}{c^2}\left(\underbrace{x_2' - x_1'}_{=0}\right)$$

- Herhangi bir $t_2' - t_1'$ zaman aralığı için;

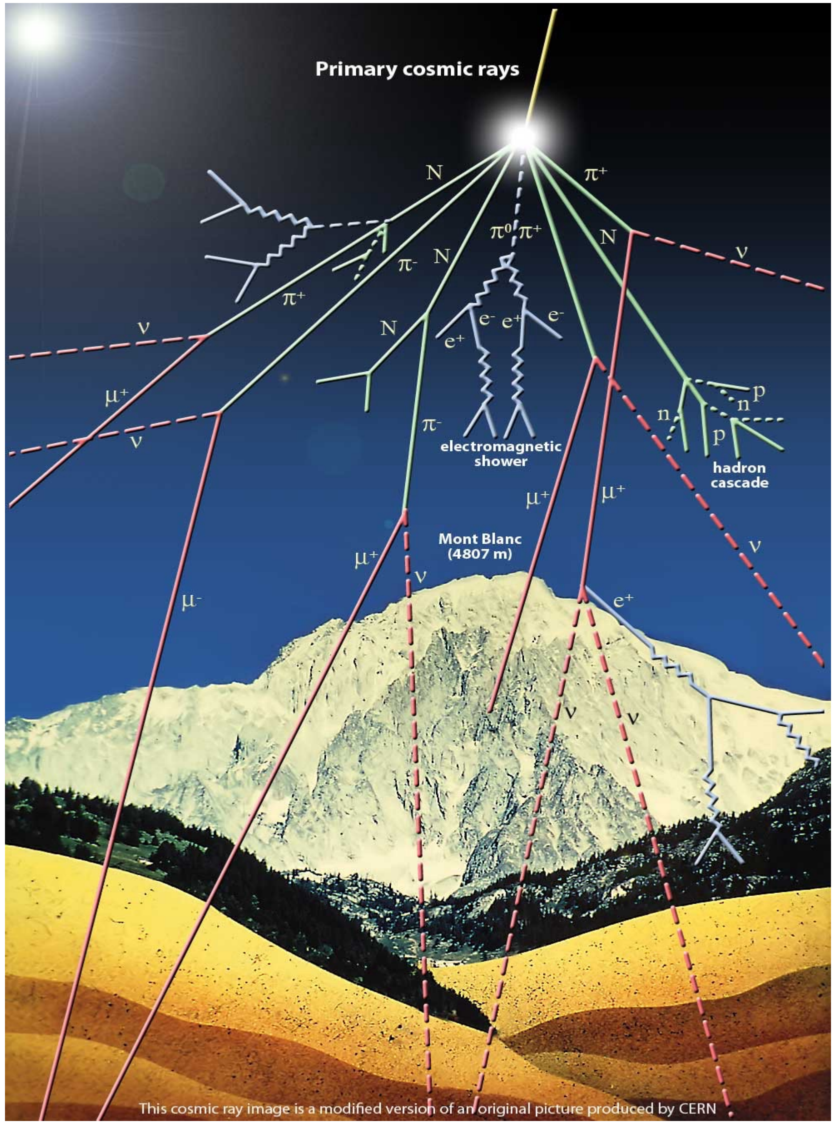
$$t_2 - t_1 = \gamma\left(t_2' - t_1'\right) = \frac{\left(t_2' - t_1'\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad T_0 = t_2' - t_1' \quad , \quad T = t_2 - t_1$$

$$\boxed{T = \gamma T_0}$$

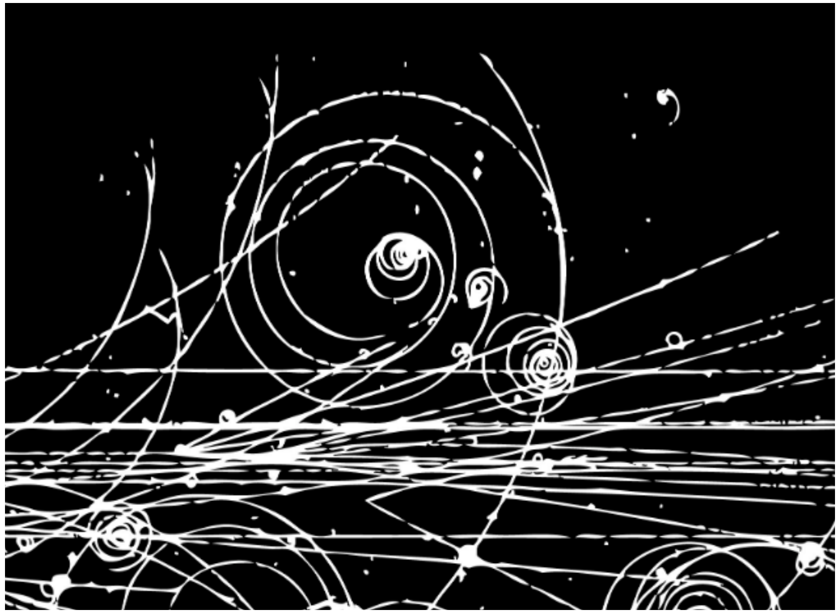
T_0 : has zaman aralığı. Has zaman aralığı ölçülen en kısa zaman aralığıdır. Hareketli olan saatin ölçtüğü zaman aralığı artmıştır (genişlemiştir).

! Zaman genişlemesi etkisinin deneysel kanıtı müon yaşam süresidir.

- Müonun has çerçevesinde (müonun üzerine takılmış bir saatin ölçtüğü) yaşam süresi T_0=2,2 μs' dir. Müonların yere ulaşana kadar aldıkları yol yaklaşık olarak $d \approx c \times T_0 = 3\times10^8\,(2{,}2\times10^{-6}) = 660\ m$. Bu mesafe oldukça kısadır, ancak müonlar laboratuvarda gözlenebilmektedir !
- *Yerdeki (laboratuvardaki) gözlemciye göre müonlar hareketlidir.* Yerdeki gözlemci müon yaşam süresini $T=\gamma\ T_0$ olarak ölçer. Müonların hızı v = 0,99c alınırsa γ = 7,1 olur ve zaman genişlemesinden dolayı $T=\gamma\ T_0$= $7{,}1(2{,}2)\ \mu s \approx 16\ \mu s$ olarak ölçülür. Bu durumda $d \approx$ 4800 m olarak bulunur. Bu uzaklık makul bir değerdedir.



Örnek: Laboratuvarlarda yüksek enerjili parçacıklar, dedektörlerde bıraktıkları belirli izlerin fotoğrafları çekilerek gözlenebilirler. İzlerin uzunluğu parçacıkların hızlarına ve yaşam sürelerine bağlıdır. 0,995c hızı ile hareket eden bir parçacık 1,25 *mm* uzunluğunda bir iz bırakıyor. Parçacığın has yaşam süresi nedir?



$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{1,25\times 10^{-3}}{0,995(3\times 10^{8})} = 0,418\times 10^{-11} s = T$$

$$T = \gamma T_0 \Rightarrow T_0 = \frac{T}{\gamma} = T\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$T_0 = 4,17\times 10^{-13} s$$

Hız dönüşümleri

S' ve S çerçeveleri standart şekillenimdeler (S' çerçevesi S çerçevesine göre $+x'$ yönünde sabit v hızı ile ilerliyor). Bir parçacığın S' ve S çerçevelerindeki hızları sırasıyla u' ve u olsun.

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

$$\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right)$$

$$dx' = \gamma(dx - vdt)$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)$$

$$u'_x = \frac{(u_x - v)}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

Hatırlatma: Galileo Hız Dönüşümleri

$$u'_x = u_x - v$$

!

Bu hız dönüşümleri, düşük hız limitinde Galileo dönüşümlerine indirgenir ve tüm ERÇ' lerde ışığın hızının aynı olduğu sonucunu verir!

İvme dönüşümleri

Kısaltma:

$$A \equiv \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)$$

$$a_x = \frac{du_x}{dt} \quad a_y = \frac{du_y}{dt} \quad a_z = \frac{du_z}{dt}$$

$$a'_x = \frac{du'_x}{dt'} \quad a'_y = \frac{du'_y}{dt'} \quad a'_z = \frac{du'_z}{dt'}$$

$$\boxed{a'_x = \frac{a_x}{A^3\gamma^3}}$$

Boyuna bileşenin dönüşümü

$$\boxed{a'_{y(z)} = \frac{a_{y(z)}}{A^2\gamma^2} + \frac{u_{y(z)}va_x}{c^2\gamma^2A^3}}$$

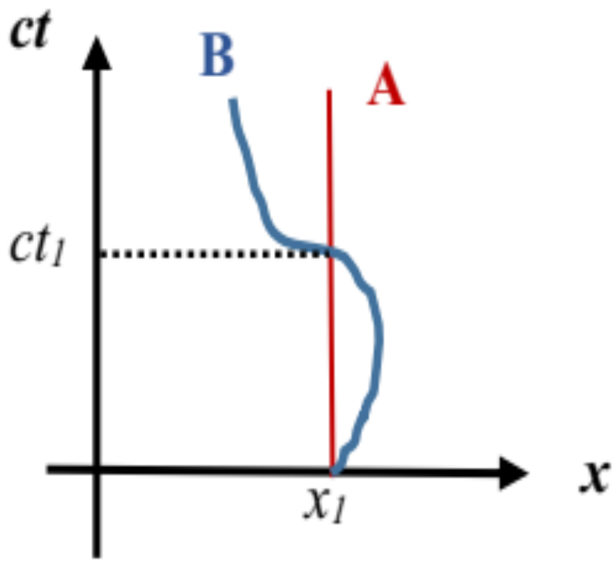
Enine bileşenlerin dönüşümü

Galileo dönüşümleri altında ivme invaryantken Lorentz dönüşümleri altında bu geçerli değildir. İvme, Lorentz dönüşümleri altında daha komplike bir yoldan dönüşmektedir.

IV. Lorentz Dönüşümlerinin Grafiksel Gösterilmesi (Minkowski Diyagramları)

- Uzay ve zamanı birlikte değerlendirmeyi düşünen ilk kişi Herman Minkowski' dir ve uzayzamanı *"world (dünya)"* olarak tanımlamıştır.
- Olaylar, ***"world point (dünya noktası)"*** olarak adlandırılır.
- ***Dünya Çizgisi (World Line):*** Eylemsiz bir referans çerçevesinde bir parçacığın hareketini tanımlamak için çizilen eğrilere dünya çizgisi denir. Dünya çizgileri dünya noktalarının bir toplamıdır.

Örnek: Yatay eksen uzay eksenlerinden biri ve düşey eksen ct alınır.



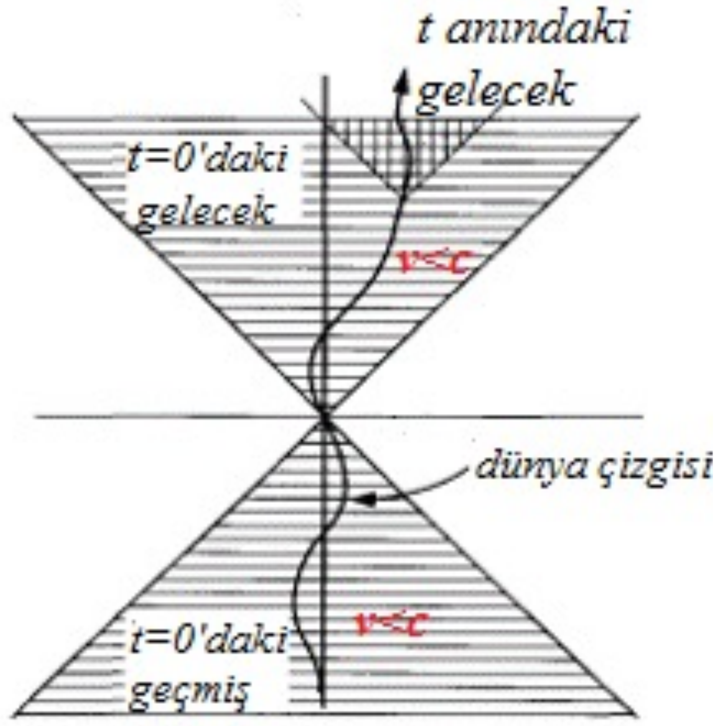
Şekilde A ve B parçacıkları dünya çizgileri gösterilmektedir.

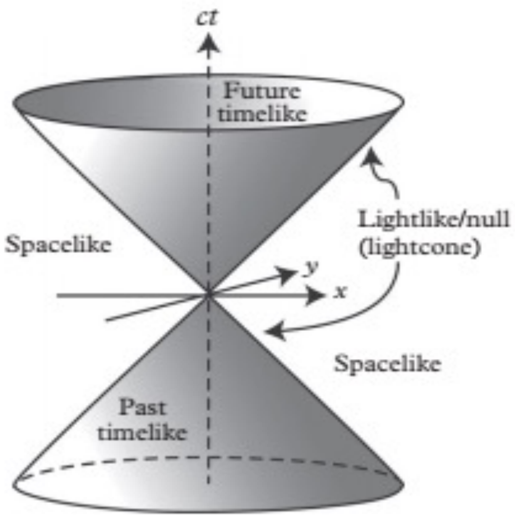
A: (ct,x) eylemsiz çerçevesinde durgun olan bir parçacık. Tüm zamanlarda konumu x_1.

B: (ct,x) eylemsiz çerçevesinde $t=0$ anında hızlanan, sonra yön değiştirip yavaşlayan ve $t=t_1$ anına x_1 konumunu tekrar geçen bir parçacık.

⇨Işık hızında ilerleyen parçacık için dünya çizgisinin eğimi 1 olur. *v* hiçbir zaman *c* den büyük olamayacağı için hareket iki adet 45° ($x=\pm ct$) çizgisi arasındaki bölgede olur.

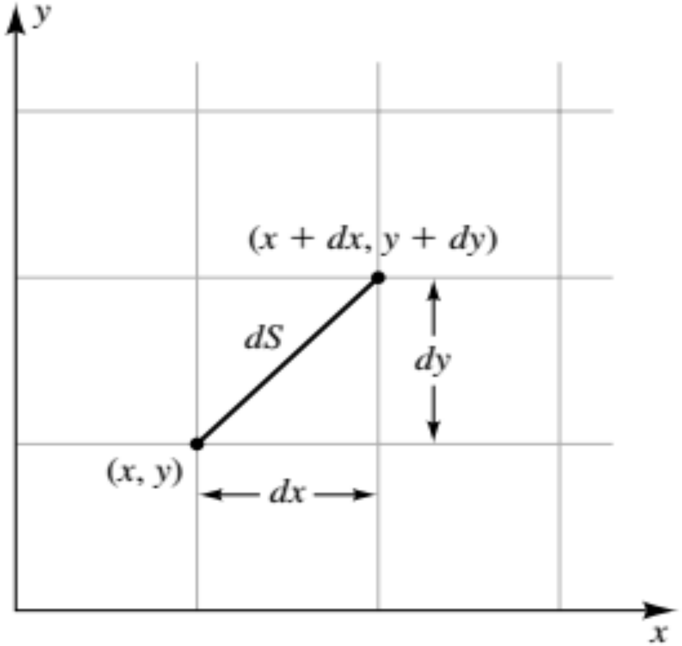
- *t* = 0 da yukarıdaki bölge gelecek olarak adlandırılır ve yola çıkıldığında gidilebilecek yerlerin geometrik yeridir. Alttaki bölge de geçmiş olarak adlandırılır. Zaman ilerleyip biz dünya çizgisi boyunca ilerlediğimizde (üçgen şeklindeki) bu bölgeler daralacaktır.





İki uzay ve bir zaman boyutunu dikkate alırsak artık üçgen yerine koni şeklinde bölgeler elde edilir. Bu konilerin yüzeyleri ışığın gidebildiği yollar olduğu için bunlara *"ileri ışık konisi"* ve *"geri ışık konisi"* denir.

Çizgi elemanı (ds): Yakın noktalar arasındaki uzaklık.



İki boyutta kartezyen koordinatlarda çizgi elemanının karesi

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

3-boyuta genelleme: $\boxed{ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2}$ Düz uzay, Öklidyen geometri

- Metrik; uzayzamanın geometrisi hakkında bilgi verir.

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \rightarrow g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i,j =1,2,3

3 boyutlu düz uzayda metrik

- Uzayzamanda iki olay göz önüne alalım: $(t_1, x_1, y_{1,}, z_{1,})$ve $(t_2, x_2, y_{2,}, z_{2,})$.
- Uzaydaki iki nokta arasındaki ***uzaklık*** kavramını, uzayzamandaki iki nokta arasındaki ***aralık*** kavramına genelleştirebiliriz. Karesi alınmış aralık şu şekilde tanımlanabilir;

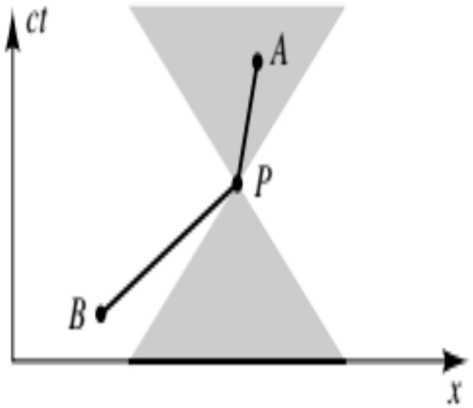
$$(\boldsymbol{\Delta s})^2 = \boldsymbol{c}^2(\boldsymbol{t_2} - \boldsymbol{t_1})^2 - (\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})^2 - (\boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1})^2 - (\boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1})^2$$
$$(\boldsymbol{\Delta s})^2 = \boldsymbol{c}^2(\boldsymbol{\Delta t})^2 - (\boldsymbol{\Delta x})^2 - (\boldsymbol{\Delta y})^2 - (\boldsymbol{\Delta z})^2$$

- Bu aralık sadece pozitif tanımlı değildir. +, - ya da sıfır olabilir !

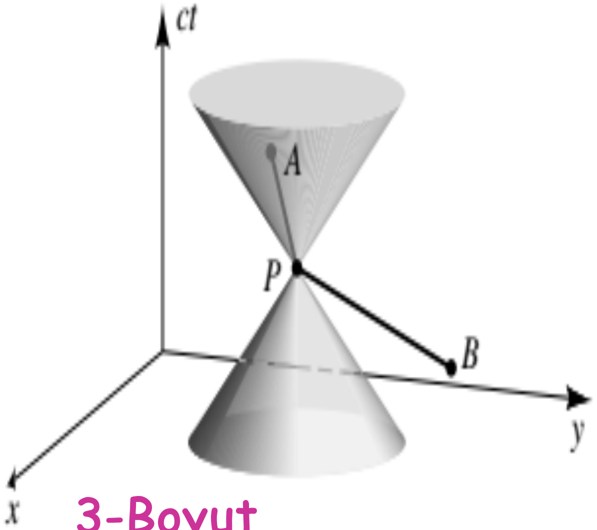
$$\Delta s^2 > 0 \quad \rightarrow \quad zamansal\ (zaman\ türü)\ aralık$$
$$\Delta s^2 = 0 \quad \rightarrow \quad ışıksal\ (\ ışık\ türü)\ aralık$$
$$\Delta s^2 < 0 \quad \rightarrow \quad uzaysal\ (uzay\ türü)\ aralık$$

- Eğer iki olay arasındaki aralık sonsuz küçük ise, (x, y, z, t) ve (x + dx, y + dy, z + dz, t + dt). Bu durumda sonsuz küçük aralık;

$$\boxed{ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2).}$$



2-Boyut



3-Boyut

A noktası, P′den itibaren gölgeli olan tüm noktalar gibi, P'den zamansal olarak ayrılmıştır.(A, P′ nin ışık konisi içindedir.) B noktası ise P noktasından uzaysal olarak ayrılmıştır.

- Pozitif bir uzayzaman ayrımı (aralık) olan olaylar, $\Delta s^2 > 0$, zamansal olarak ayrılmışlardır. **Bu tür olaylar nedensel olarak ilişkilidir.**
- Sıfır (veya boş) uzayzaman ayrımı olan olayların, $\Delta s^2 = 0$, ışıksal olarak ayrılmış olduğu söylenir. Bu tür olaylar nedensel olarak ilişkilidir ve tüm gözlemciler bunların bir ışık sinyali ile bağlanabilecekleri konusunda hemfikirdir.
- Negatif uzayzaman ayrımı olan olaylar, $\Delta s^2 < 0$, uzaysal olarak ayrılmışlardır. **Bu tür olaylar nedensel olarak ilişkili değildir.**

<u>V. Dört-vektörler (4-vektörler ya da dörtlü vektörler)</u>

- Dört-vektör notasyonu kullanışlı bir matematiksel araçtır çünkü 4-vektörlerin skaler çarpımı <u>**Lorentz invaryant**</u> bir niceliktir. Lorentz dönüşümleri ile birbiriyle bağlantılı olan (birbirinin içine karışan) iki fiziksel nicelik bir 4-vektör oluşturabilir.

- Örneğin, uzay ve zaman , göreli enerji ve göreli momentum, yük yoğunluğu ve akım yoğunluğu, skaler potansiyel ve vektör potansiyel gibi.

- Dört vektörleri tanıtmak için Yunan alfabesinin harflerinden yararlandığımız ($\mu, \nu, \sigma, \kappa, \lambda, \alpha, \beta$ vb) bir indis kullanırız. Bu indis 0, 1, 2 ve 3 değerlerini alır ve <u>Lorentz indisi</u> olarak adlandırılır.

- İlk olarak dört-konum vektörünü tanıtarak başlayalım. x^μ gibi, bir üst indisli, 4-vektöre bir ***kontravaryant dört-vektör*** ve x_μ gibi, bir alt indisli olana bir ***kovaryant dört-vektör*** denir.
- Burada x^μ kontravaryant dört-konum vektörü olmak üzere;

Aradaki virgül zamansal bileşen ve uzaysal bileşenleri ayırmak için kullanılır.

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$$

$$= (\underbrace{ct}_{\text{Zamansal bileşen}}, \underbrace{-\vec{r}}_{\text{Uzaysal bileşenler}})$$

$$= (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\vec{r})$$

μ : *Lorentz indisi*

$\mu = 0,1,2,3$

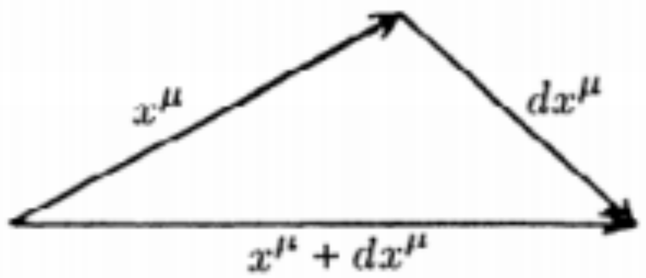
Zamansal bileşen *Uzaysal bileşenler*

$$\Rightarrow \boxed{x_0 = x^0, x_i = -x^i \quad i = 1,2,3}$$

! ***Bir kontravaryant ve bir kovaryant vektörün iç çarpımı bir değişmezdir (skalerdir).*** Değişmez (invaryant) kalma kuralını *bir üst ve bir alt indis* üzerinden toplam alarak sağlarız.

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3} dx^\mu dx_\mu = dx^\mu dx_\mu$$
$$= c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

*(Einstein toplama kuralı: Tekrarlanan indisler üzerinden toplam var. Burada tekrar eden indislerden biri altta diğeri üstte olmalıdır. Bu indise **sağır (dummy)** indis denir. Tekrarlanmayan indislere **serbest indis** denir. Serbest indisler bir denklemin her teriminde yer almalıdır.)*



$$dx^\mu dx_\mu = (dx')^\mu (dx')_\mu$$

- Herhangi bir kontravaryant vektörle onun kovaryant karşılığı arasındaki) ilişki bir ***metrik tensör*** $g_{\mu\nu}$ tanıtılarak verilir:

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$$
$$= g_{\mu 0}x^0 + g_{\mu 1}x^1 + g_{\mu 2}x^2 + g_{\mu 3}x^3$$
$$\mu = 0,1,2,3$$

burada toplama anlaşması kullanılmıştır

$$\boxed{ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \qquad \textit{simetrik tensör}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Düz uzayzaman ya da Minkowski metriği için

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$$

Dörtlü Skaler Çarpım:

$$\Rightarrow \quad A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$\begin{aligned} A^\mu B_\mu &= A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 \\ &= A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 \\ &= A^0 B^0 - \left(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \right) = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot x = x^\mu x_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu &= x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 \\ &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ &= c^2 t^2 - \boldsymbol{r}^2 \ . \end{aligned}$$

Dört-Hız:

Tanımı yaparken dikkat! Zaman artık bir parametre değil!

$$U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} \qquad \gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma(u) \qquad \tau: \textit{has zaman}$$

$$U^\mu = \gamma(u)\frac{d}{dt}(ct,\vec{r}) = \gamma(u)(c,\vec{u})$$

$$U^\mu = (U^0, U^1, U^2, U^3)$$
$$U^\mu = \left(\gamma(u)c\,, \gamma(u)u_x\,, \gamma(u)u_y\,, \gamma(u)u_z\right)$$

Dört-Momentum:

$$P^\mu \equiv mU^\mu$$

$$P^\mu = m(\gamma(u)c,\ \gamma(u)\vec{u}) = (\gamma(u)mc,\ \gamma(u)m\vec{u}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

$$E = \gamma(u)mc^2 \ \ \textit{toplam göreli enerji}$$
$$\vec{p} = \gamma(u)m\vec{u} \quad \textit{toplam göreli } 3-\textit{momentum}$$

$$R = E_0 = mc^2 \ \ \textit{durgunluk enerjisi}$$
$$K = (\gamma - 1)mc^2(\text{Göreli K. E})$$

$$P^\mu = \frac{hf}{c}(1,\hat{n}) \qquad f: \textit{frekans} \qquad \textit{Kütlesiz parçacık için } 4-\textit{momentum}$$

Dört-Gradyent:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$$

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$$

Dört-Kuvvet:

$$F^{\mu} \equiv \frac{dP^{\mu}}{d\tau} = \frac{dP^{\mu}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma(u)\frac{dP^{\mu}}{dt} = \gamma(u)\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{c},\vec{p}\right) = \gamma(u)\left(\frac{1}{c}\frac{dE}{dt},\frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

$$F^{\mu} = \left(F^{0},\vec{F}\right)$$

Dört-Akım yoğunluğu:

$$J^{\mu} = \rho_0 U^{\mu} = \rho_0[\gamma(u)(c,\vec{u})] = (\rho_0\gamma(u)c, \rho_0\gamma(u)\vec{u})$$

$\rho = \rho_0\gamma(u)$ $\qquad$ ρ_0: *has yük yoğunluğu*

$$J^{\mu} = (\rho c, \rho\vec{u}) = (J^{0},\vec{J})$$

Dört-EM Potansiyel:

$$A^{\mu} = \left(\frac{\varphi}{c},\vec{A}\right) = (A^{0},A^{1},A^{2},A^{3}) = \left(\frac{\varphi}{c},A_x,A_y,A_z\right)$$

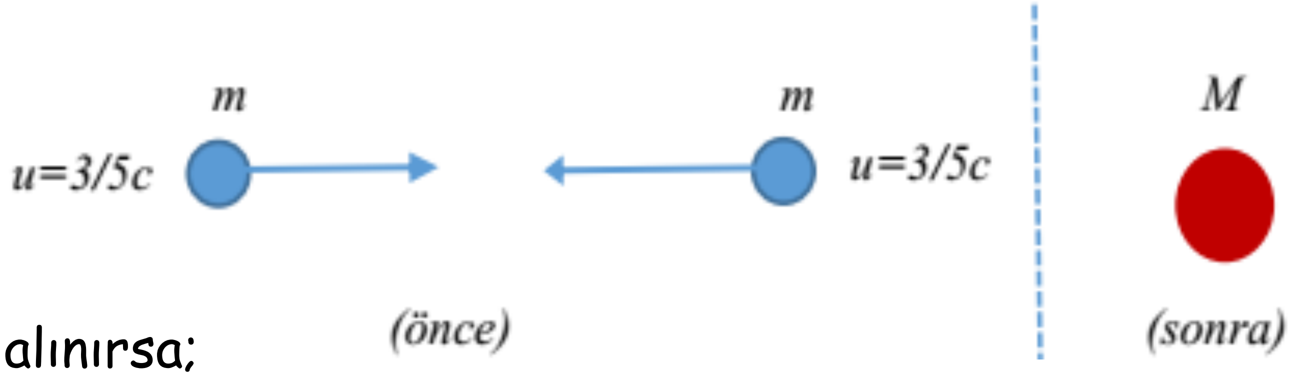
4- vektörler nasıl dönüşür?

$$X'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} X^{\nu}$$

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Standart şekillenim için Lorentz dönüşüm matrisi

Örnek: Her birinin kütlesi m olan iki cisim 3/5 *c* hızı ile kafa kafaya çarpışıyorlar ve birbirlerine yapışıp duruyorlar. Son durumdaki birleşik cismin kütlesi ne olur?



c=1 alınırsa;

$$P^{\mu}_{önce} = P^{\mu}_{sonra}$$

$$(E_1 + E_2, \vec{p}_1 + \vec{p}_2) = (E, 0) \quad E_1 + E_2 = E \quad ve \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$$

$$E_1 + E_2 = E$$

$$\gamma mc^2 + \gamma mc^2 = Mc^2 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{5}{4}$$

$$2\frac{5}{4}mc^2 = Mc^2 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{5}{2}m$$

$$\left(\frac{E_1}{c} + \frac{E_2}{c},\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)$$

$$\left(\frac{E}{c},\ 0\right)$$

?

Ödev: Dört-hız, dört-momentum ve dört-gradyentin skaler çarpımlarını yapınız!

Kaynaklar:

1. *"Spacetime Physics: Introduction to Special Relativity"* , E. F. Taylor and J.A. Wheeler, Second Edition, W.H. Freeman and Company, 1992.
2. 50 soruda Görelilik Kuramları, İ. Semiz, Bilim ve Gelecek Kitaplaığı-3, 2010.
3. **"Introduction to Electrodynamics"**, David Griffiths Prentice- Hall Inc., 1991.
4. "**İzafiyet Teorisi**", Cep Kaynağı, NTV Yayınları,2010.
5. *"Introduction to Special Relativity"*, R. Resnick, John Wiley&Sons, 1968.
6. *"Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity"*, J. B. Hartle, Addison&Wesley, 2003.
7. *"Relativity, Gravitation and Cosmology"* Robert J.A. Lambourne, Cambridge.
8. *"Einstein's Space-Time: An Introduction to Speical and General Relativity"*, R. Ferraro, Springer, 2007.
9. *"Relativity: Special, General, and Cosmological"*, W. Rindler, Second Edition, Oxford University Press, 2006. *(Kitabın daha önceki baskısı "Intoduction to Special Relativiy", 1991).*
10. "*Special Relativity"*, A. P. French, The MIT Introductory Physics Series, Norton, 1968.

ÖZET

- Fizik yasaları tüm ERÇ' lerde aynıdır. Işığın boşluktaki hızı sabittir.
- Bir gözlem çerçevesindeki koordinatları ve zamanı başka bir çerçevedeki koordinatlara ve zamana bağlayan görelilik varsayımlarına uygun dönüşümler Lorentz dönüşümleridir.

$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$
$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

- Gözlemciye göre cismin hareketli olduğu bir çerçevede ölçülen uzunluk daima has uzunluktan kısadır. (Uzunluk Büzülmesi)
- Gözlemciye göre hareketli olan saatin ölçtüğü zaman aralığı artar. (Zaman genişlemesi)
- Metrik; uzayzamanın geometrisi hakkında bilgi verir.
- 4-vektörlerin skaler çarpımı **Lorentz invaryant** bir nicelik olduğu için dört-vektör notasyonu kullanışlı bir matematiksel araçtır.