

# Enine Demet Dinamiđine Giriş

*Veli Yıldız*

*Türk Hızlandırıcı ve Işınım Laboratuvarı*

# İÇERİK

- Faz uzayı ve emittance
- Enine demet dinamiği tanımı
- Parçacıkların gerçek uzayda ve faz uzayında hareketleri
- 4 kutuplu mıknatıslarla güçlü odaklama ve FODO yapıları
- Zayıf odaklama
- Hızlandırıcı elemanlarında enine demet dinamiği için transfer matrisleri kullanımı
- Transfer matrisi ile parçacık koordinatlarının ve demet elipsinin transformasyonu

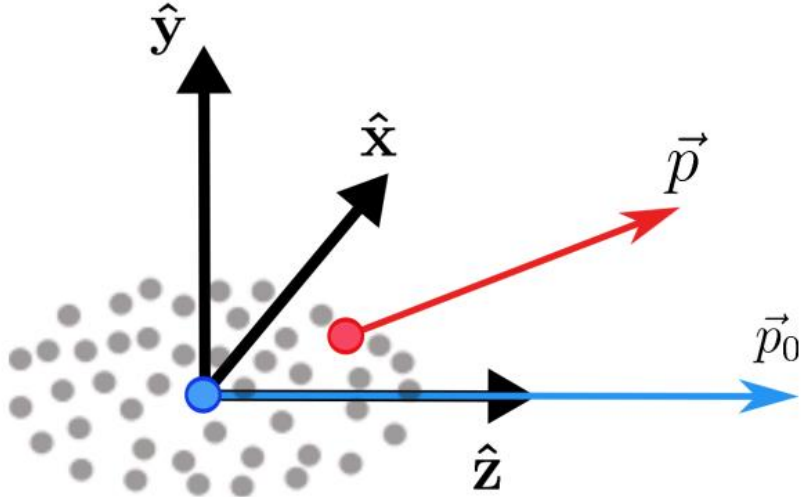
# DERSTE KULLANILACAK İNGİLİZCE TERİMLER

Ders içerisinde aşağıdaki İngilizce terimler Türkçe' ye çevrilmeden kullanılacaktır.

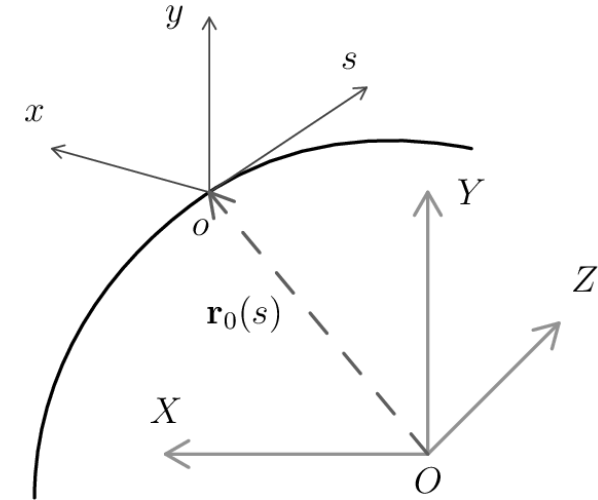
- Emittance
- Divergence

# KOORDİNAT SİSTEMİ

Demetle birlikte hareket (doğrusal) eden koordinat sistemi



Demetle birlikte hareket (daireysel) eden koordinat sistemi

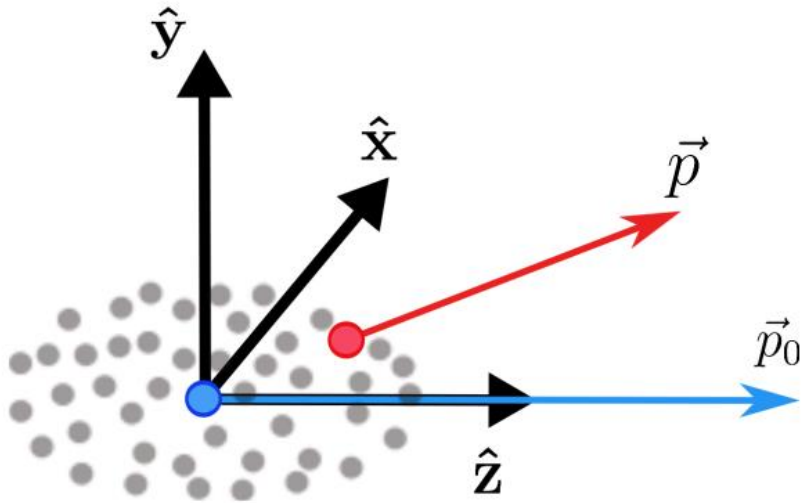


$\vec{p}$ : parçacığın momentumu

$\vec{p}_0$ : hayali bir referans parçacığının momentumu (demetin referans parçacığı)

Demetteki bütün parçacıkların koordinatları referans parçacığa göre yazılabilir.

# ENİNE UZAY TANIMI



x-z: yatay uzay

y-z: dikey uzay

} enine uzay

z yönünde: boyuna eksen

- İki enine uzayda (yatay ve dikey) parçacıkların hareketi 3 boyuttaki hareketlerinin 2 boyuttaki izdüşümüdür.
- Boyuna eksende parçacıkların hareketi 3 boyuttaki hareketlerinin 1 boyuttaki izdüşümüdür.

# DEMET DİNAMIĞI İÇİN PARÇACIK TANIMI

- 3 boyutta parçacıkların hareketini tanımlamak için her parçacığın 6 tane parametresini tanımlamak gerekli. 3 pozisyon, 3 momentum
- Değişik kaynaklar veya değişik simülasyon programları parçacıkların koordinatlarını farklı şekilde tanımlayabilir. Fakat hepsi birbirine dönüştürülebilir.
- $\vec{X}$ : bir parçacığın bütün koordinatlarını tanımlayan vektör. 3 örnek:

$$\vec{X}_1 = \begin{bmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \\ z \\ p_z \end{bmatrix}$$

3 pozisyon  
3 momentum

$$\vec{X}_2 = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ \phi \\ \frac{\Delta p}{p_0} \end{bmatrix}$$

Daha kolay algılanabilecek  
fiziksel özellikler

$$\vec{X}_3 = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \\ \phi \\ \Delta W \end{bmatrix}$$

$$x' = \frac{dx}{dz} = \frac{p_x}{p_z}$$

$$y' = \frac{dy}{dz} = \frac{p_y}{p_z}$$

Divergence  
(açı değildir)

# ENİNE DEMET DİNAMIĞI İÇİN PARÇACIK TANIMI

- Bu derste sadece enine demet dinamiği ile ilgileneceğiz. Bu yüzden vektörün sadece ilk 4 bileşenini alabiliriz.
- Dersin görsel ve anlaşılması kolay olması açısından, bu ders için, 4 boyutlu vektörün bileşenlerini iki boyutlu vektörlere indirgeyip demetin yatay ve dikey eksenlerde yaptığı hareketi ayrı ayrı inceleyeceğiz.

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{bmatrix} \begin{array}{l} \nearrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} \text{ yatay eksen} \\ \searrow \vec{y} = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \text{ dikey eksen} \end{array}$$

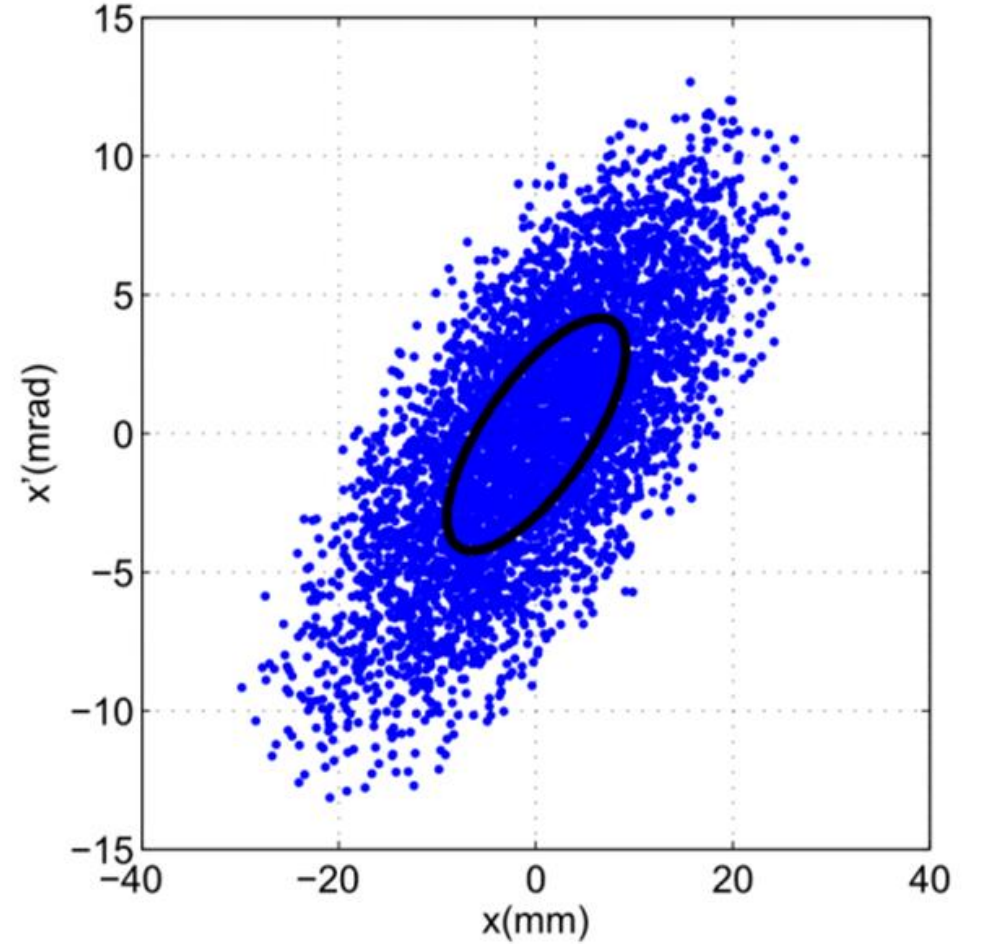
$$x' = \frac{dx}{dz} = \frac{p_x}{p_z}$$

$$y' = \frac{dy}{dz} = \frac{p_y}{p_z}$$

# FAZ UZAYI (ÖR:YATAY UZAYDA)

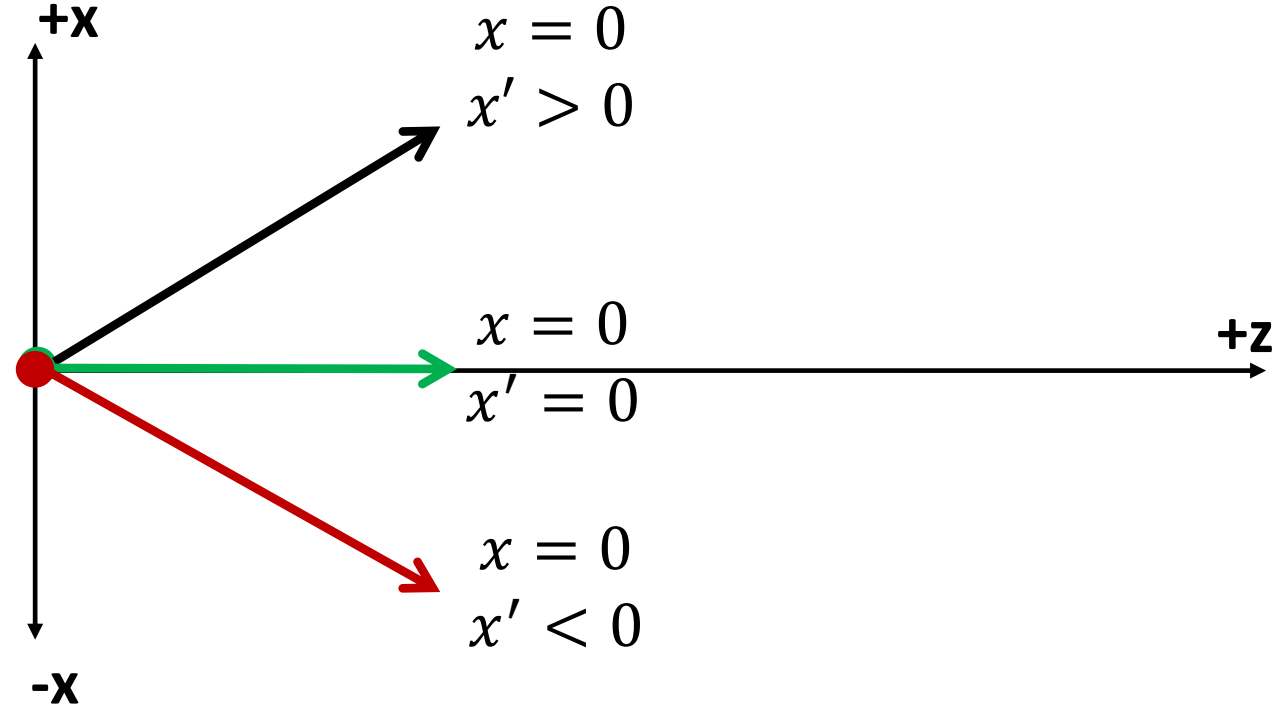
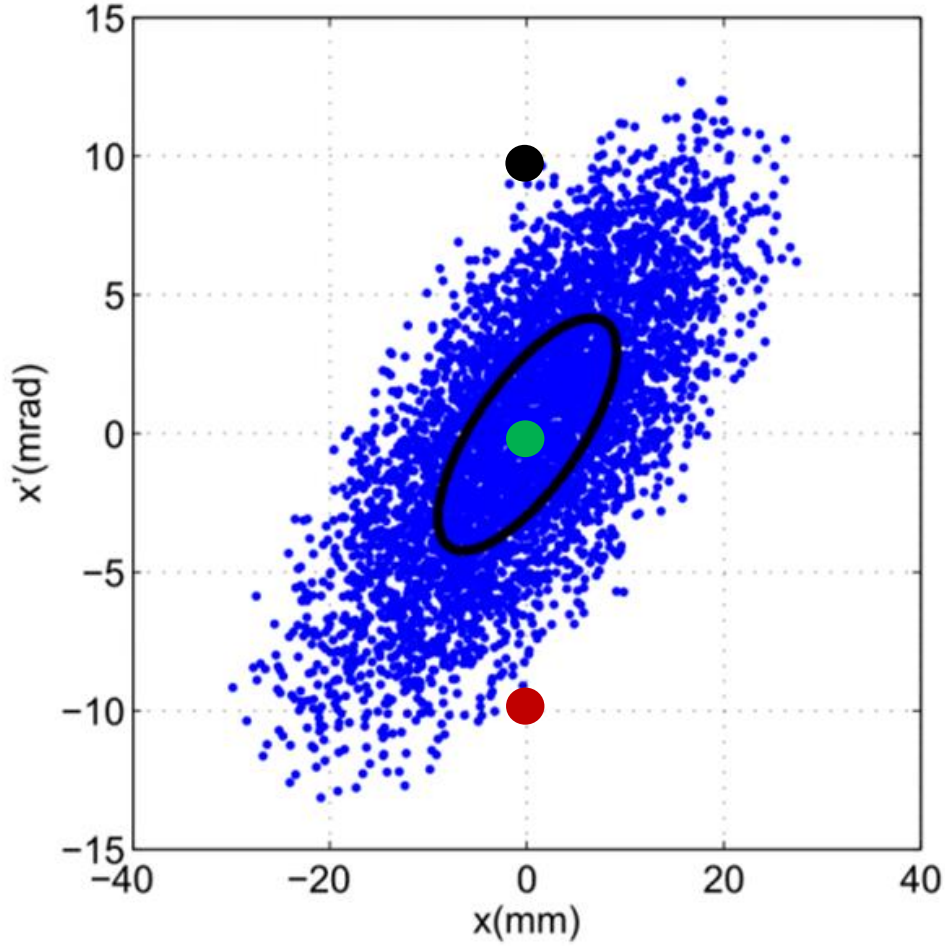
Demetteki bütün parçacıkların  $x-x'$  koordinatları bir grafikte nokta ile gösterilirse yatay ekseninde faz uzayı elde edilir. Dikey eksen için de aynı şey yapılabilir.

Şekildeki siyah elipsten dersin sonraki kısımlarında bahsedilecektir.

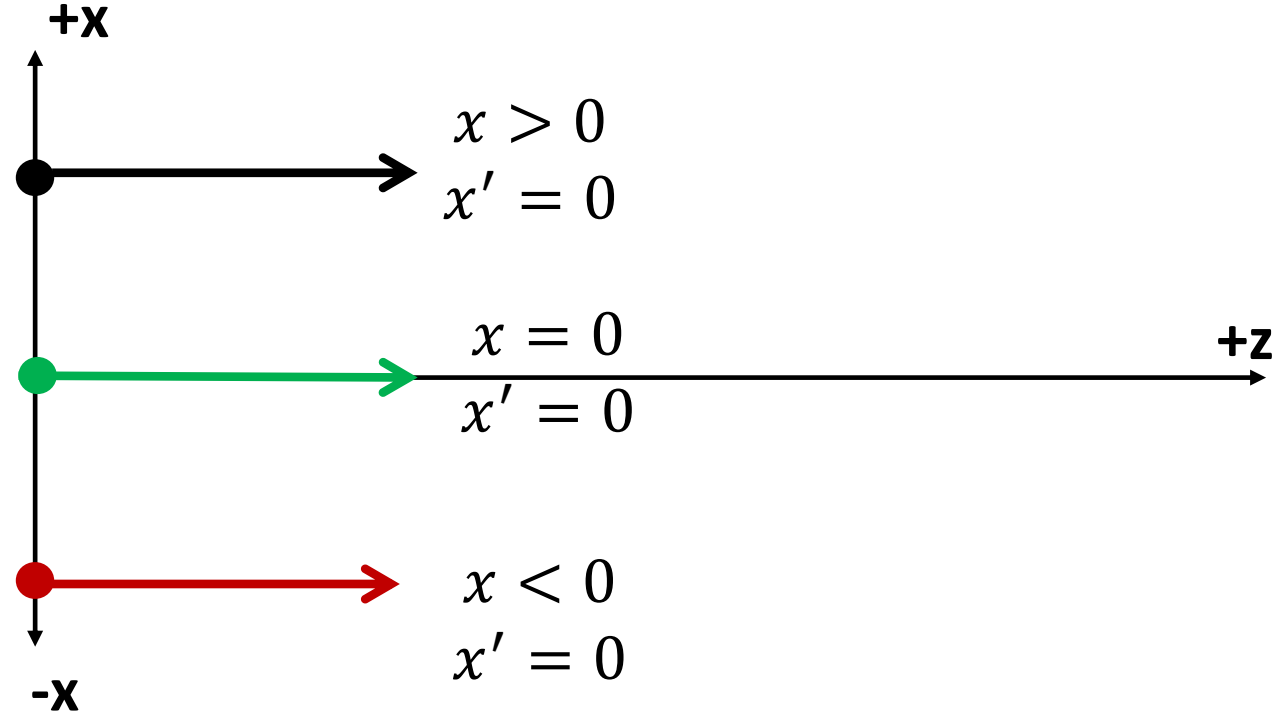
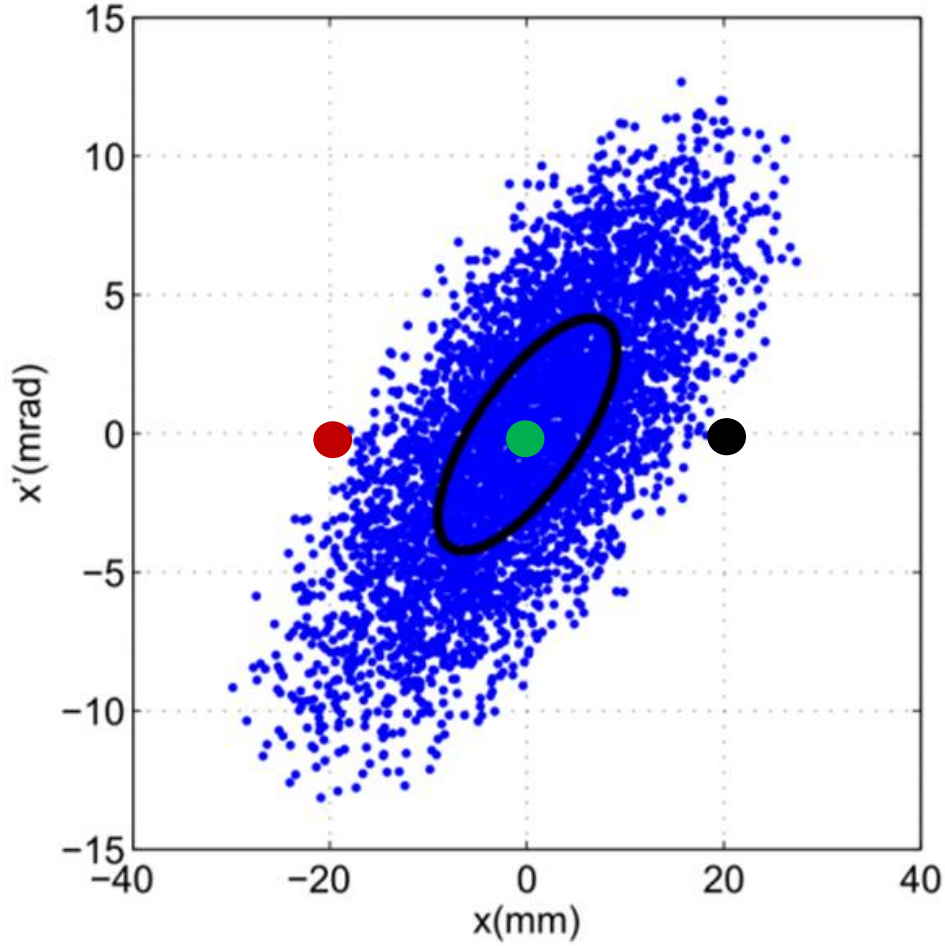




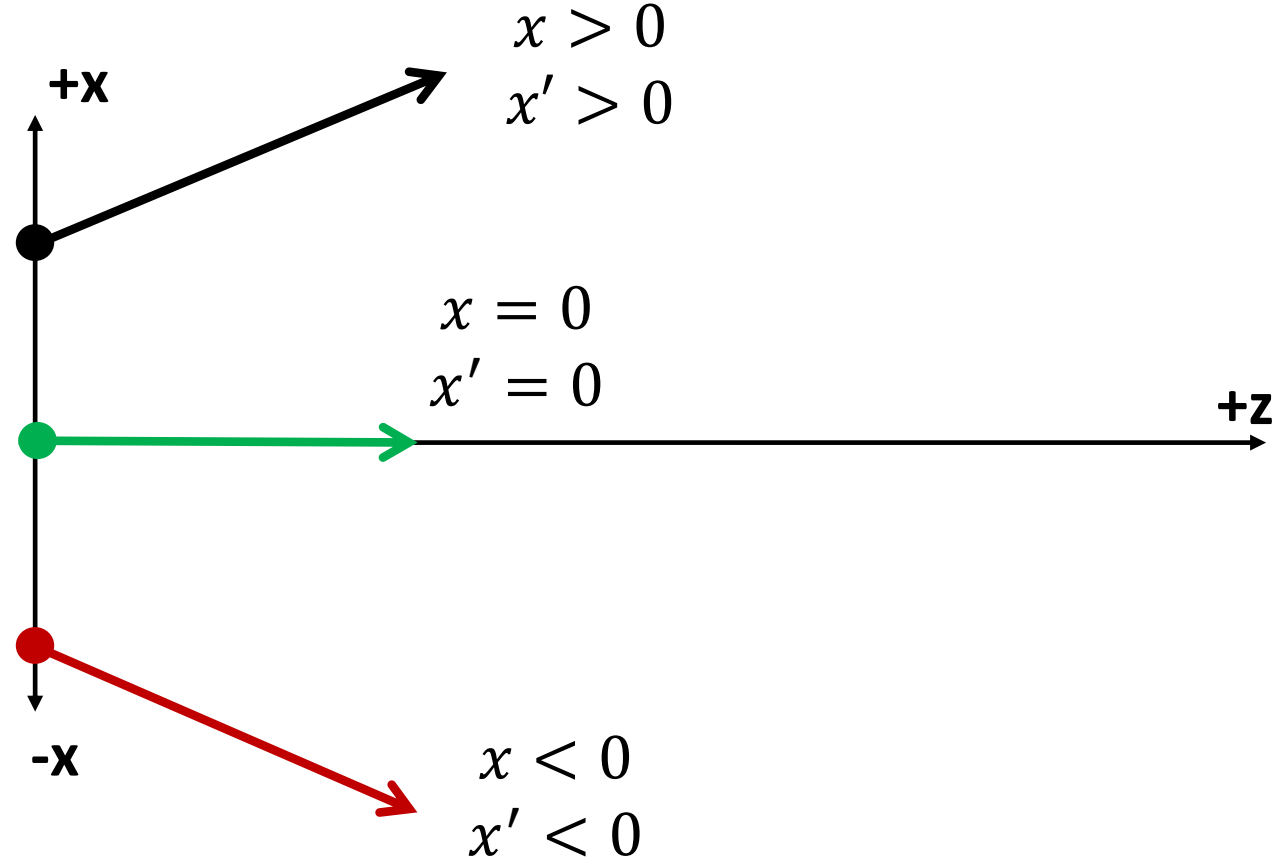
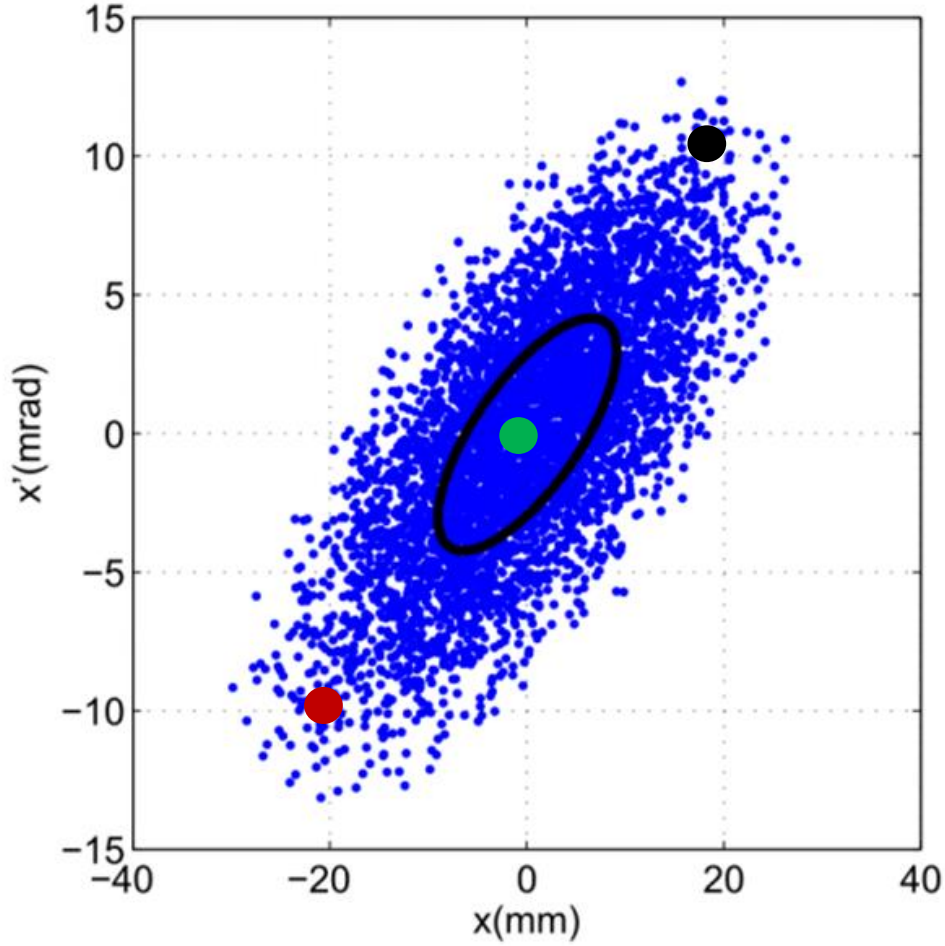
# FAZ UZAYI VE GERÇEK UZAY (ÖR:YATAY UZAYDA)



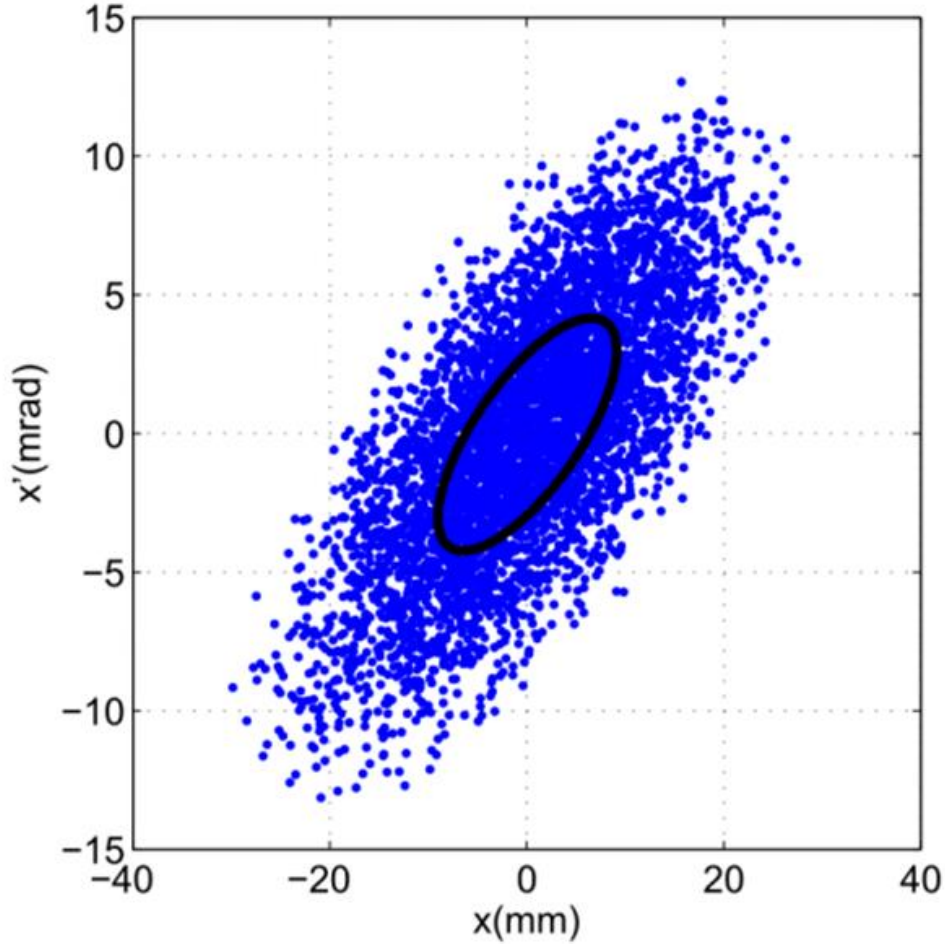
# FAZ UZAYI VE GERÇEK UZAY (ÖR:YATAY UZAYDA)



# FAZ UZAYI VE GERÇEK UZAY (ÖR:YATAY UZAYDA)



# FAZ UZAYI VE RMS EMITTANCE ELİPSİ



- Faz uzayında (2 boyutta) parçacıkların belirli bir dağılımı vardır.
- Bu dağılım belirli istatistiksel parametreler cinsinden basitleştirilmiş bir şekilde ifade edilebilir.
- Bu istatistiksel parametreler şunlardır:
  - Rms emittance
  - Twiss parametreleri (alfa, beta, gama)

# FAZ UZAYI VE RMS EMITTANCE ELİPSİ

$$\epsilon_{rms} = \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2}$$

Geometrik rms emittance

$$\alpha = -\frac{\langle xx' \rangle}{\epsilon}$$

$$\beta = \frac{\langle x^2 \rangle}{\epsilon}$$

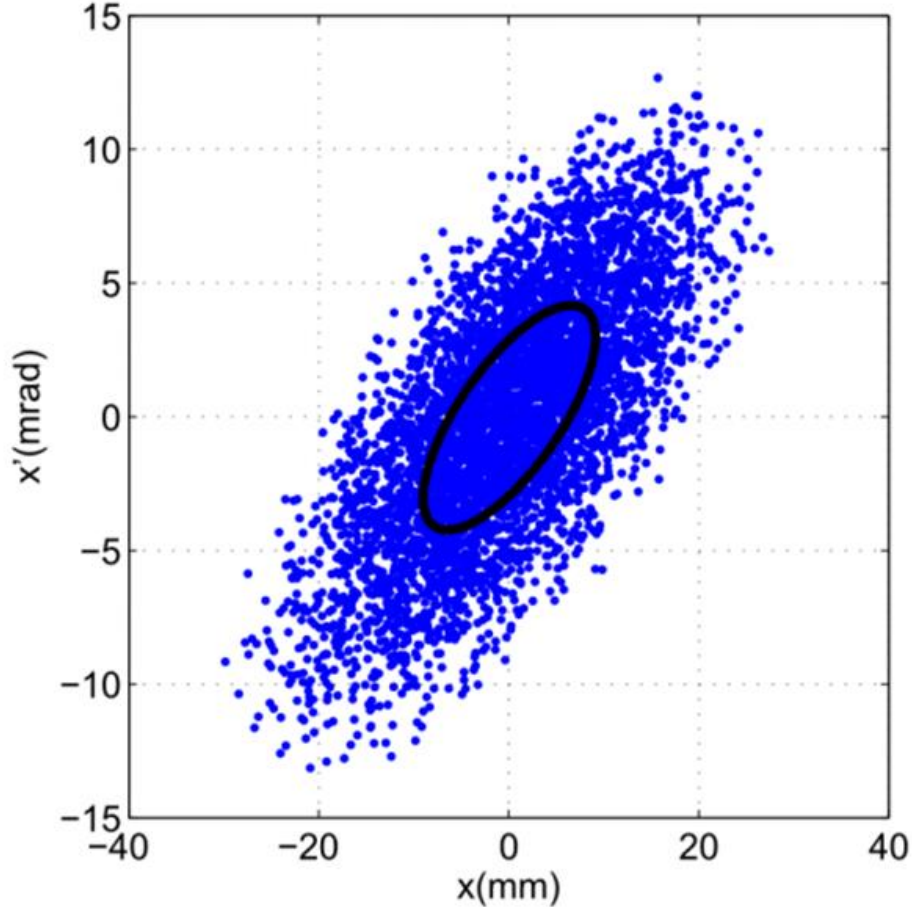
$$\gamma = \frac{\langle x'^2 \rangle}{\epsilon}$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2$$

$$\langle x'^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x'_i - \langle x' \rangle)^2$$

$$\langle xx' \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)(x'_i - \langle x' \rangle)$$

# FAZ UZAYI VE RMS EMITTANCE ELİPSİ

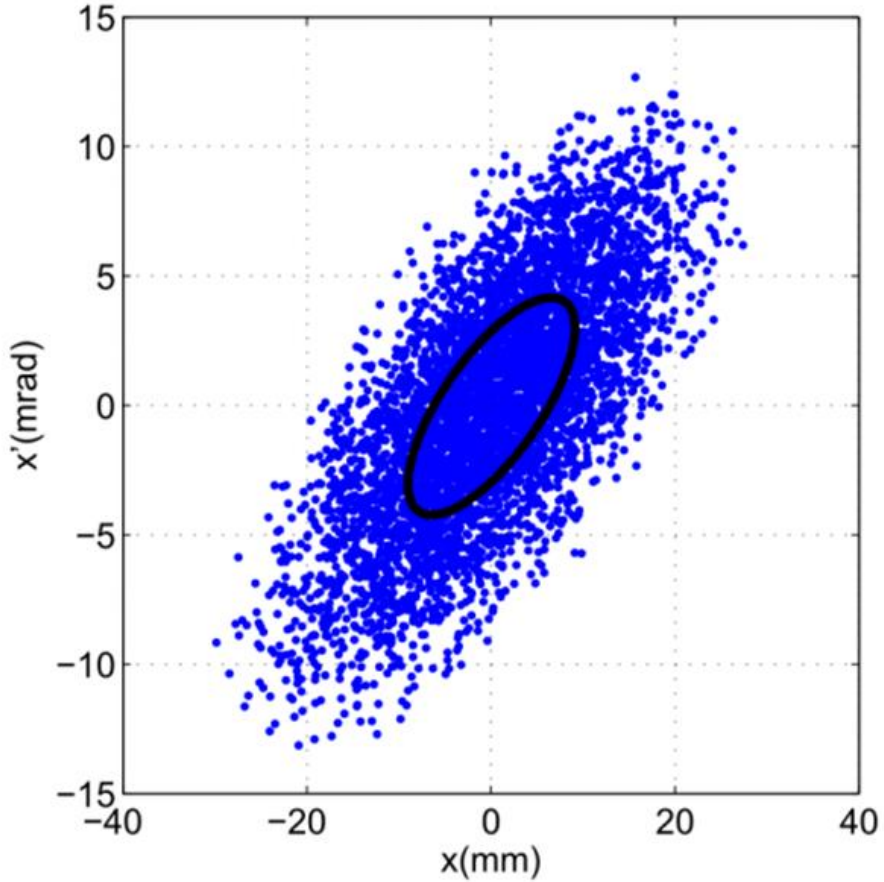


- Rms emittance elipsinin parametreleri  $\epsilon_{rms}, \alpha, \beta, \gamma$  dir.
- Rms emittance elipsi (soldaki siyah elips) çizildiğinde parçacık dağılımı basitleştirilmiş bir şekilde ifade edilebilir.

**Rms emittance elipsinin formülü aşağıdaki gibidir. Elipsin üzerinde kalan noktalar bu formülü sağlar.**

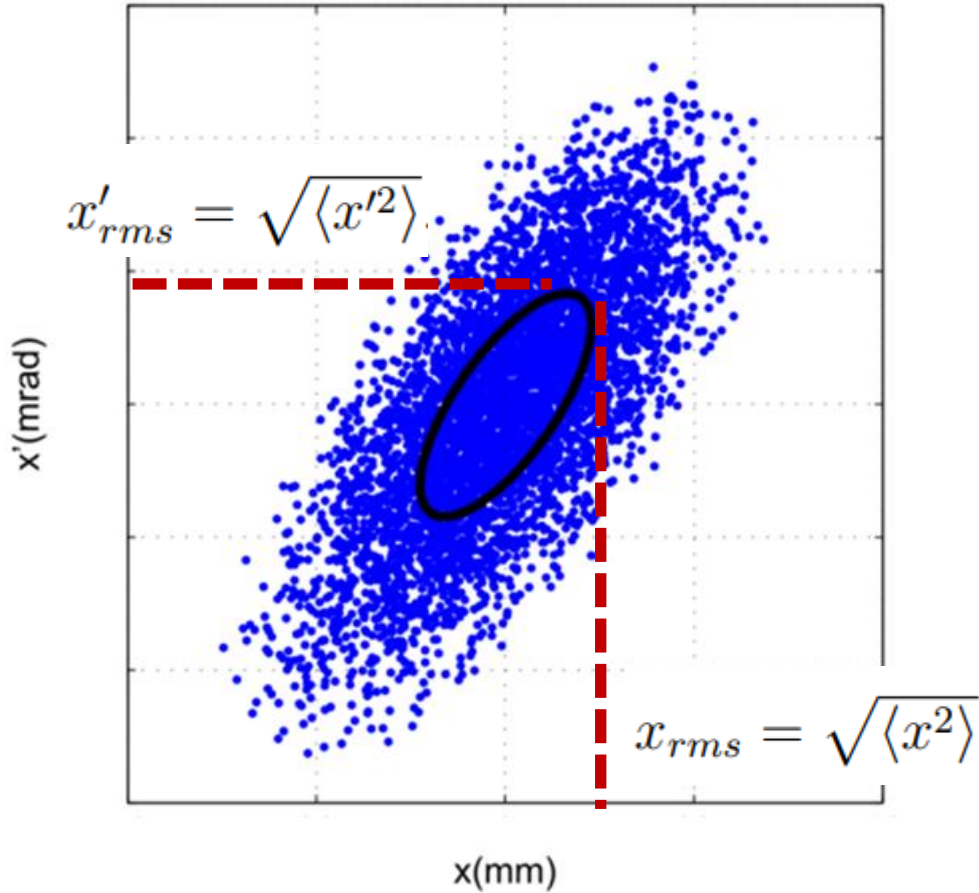
$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \epsilon$$

# FAZ UZAYI VE RMS EMITTANCE ELİPSİ



- Rms emittance değeri rms emittance elipsinin alanıyla orantılıdır ve parçacık dağılımının 2 boyutta ne kadar geniş/büyük olduğunu gösterir  
 $Alan = \pi\epsilon$
- Twiss parametreleri  $(\alpha, \beta, \gamma)$  elipsin oryantasyonunu belirler.

# RMS EMİTTANCE ELİPSİ VE DAĞILIMIN STANDARD DEVIASYONU



Rms emittance elipsinin üzerinde kalan maksimum  $x$  ve  $x'$  değerleri aynı zamanda 1 boyutlu ( $x$  veya  $x'$ ) parçacık dağılımının Standard deviasyonudur. (Hızlandırıcı fizikçileri genelde rms ve Standard deviasyonu birbirinin yerine kullanır.)

$$x_{rms} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\epsilon\beta}$$

$$x'_{rms} = \sqrt{\langle x'^2 \rangle} = \sqrt{\epsilon\gamma}$$



# ENİNE DEMET DİNAMIĞI NEDİR?

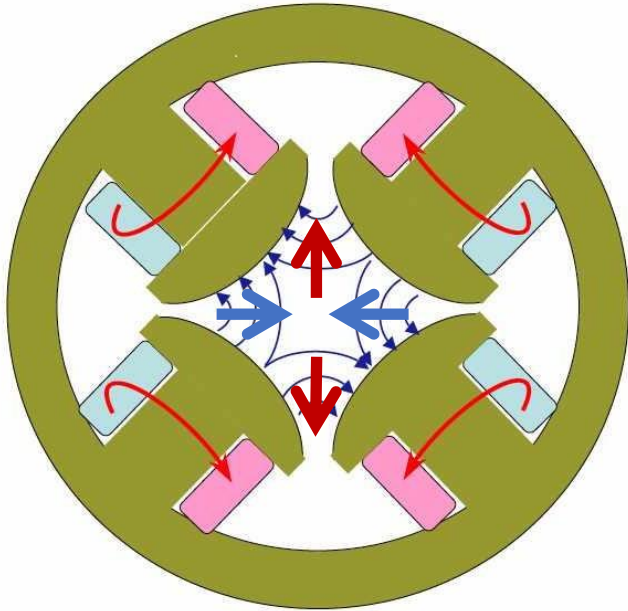
- Enine demet dinamiği, parçacıklar değişik hızlandırıcı elemanlarının içerisinden geçerken enine uzayda hareket denklemlerini çözerek parçacıkların nasıl hareket ettiklerini hesaplamaktır.
- Hızlandırıcı tasarlanırken demet dinamiği tasarımı da yapılır. Bu tasarımda hızlandırıcı elemanlarının nereye konulacağı ve güçlerinin ne olacağı belirlenir.
- Enine demet dinamiği tasarımının amacı enine uzayda demetin boyunu kontrol etmek ve emittance büyümesini minimize etmektir.

# 4 KUTUPLU MIKNATISLARLA ODAKLAMA (GÜÇLÜ ODAKLAMA)

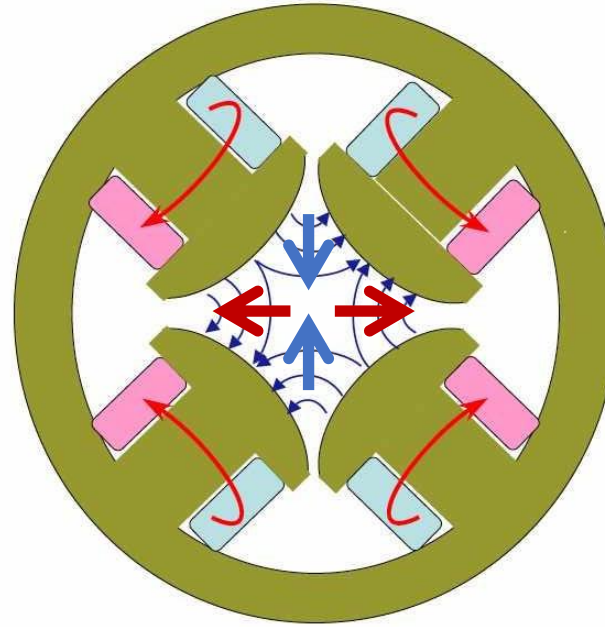
Sadece manyetik alan varsa

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

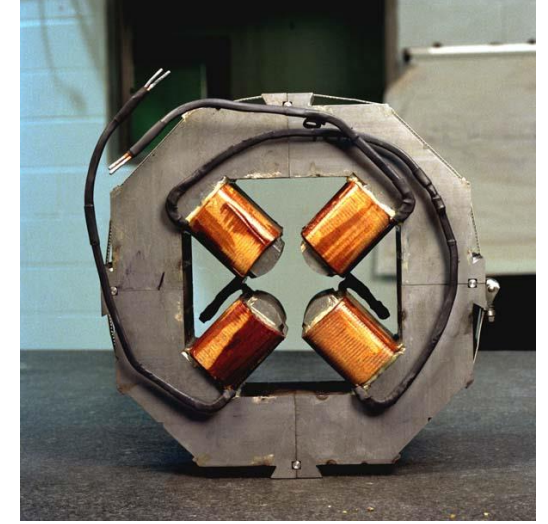
Sayfa düzlemine giren pozitif parçacıklar için kuvvet yönleri.



- Yatayda odaklayıcı
- Dikeyde dağıtıcı

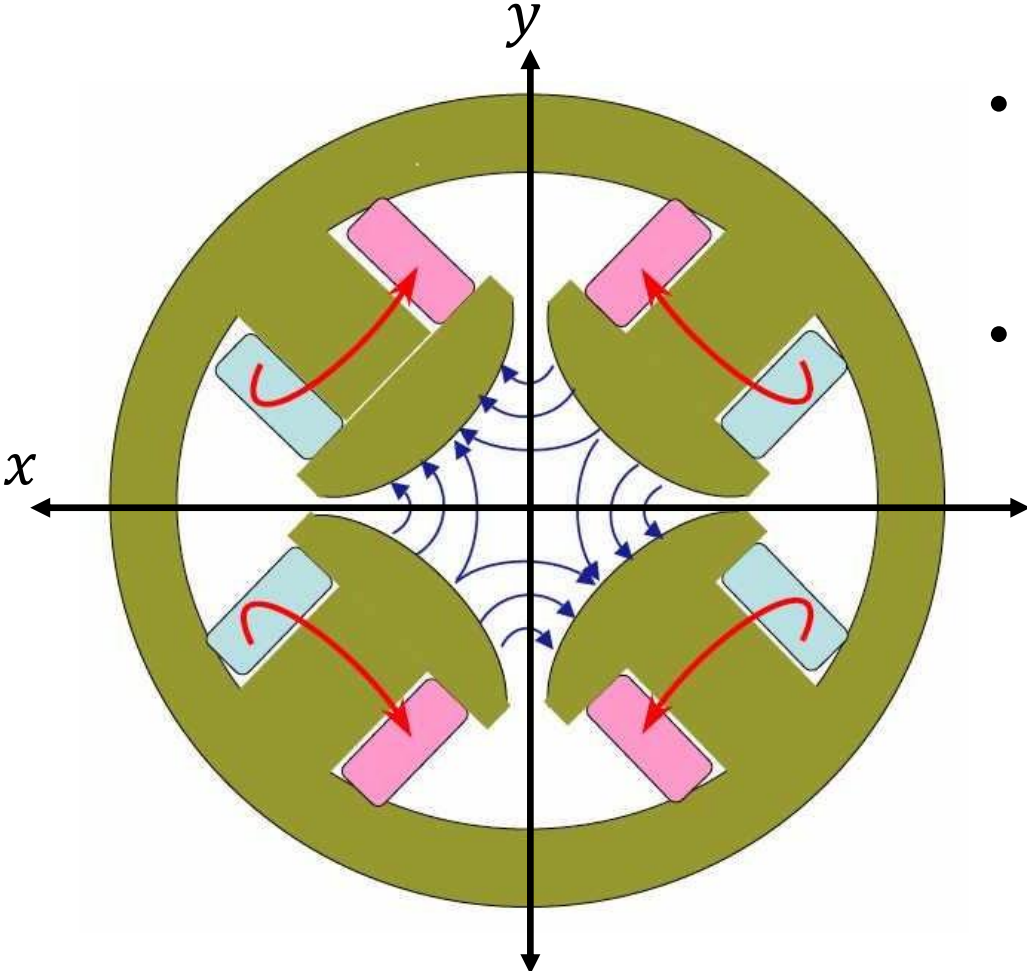


- Yatayda dağıtıcı
- Dikeyde odaklayıcı



Sarımlardan geçen elektrik akımı sayesinde manyetik alan yaratılır.

# 4 KUTUPLU MIKNATISLARLA ODAKLAMA (GÜÇLÜ ODAKLAMA)



Sayfa düzlemine giren bir demet için.

- Manyetik alanlar merkezden uzaklaştıkça lineer olarak artar. Dolayısıyla, merkezden uzak parçacıklara daha büyük bir manyetik kuvvet uygulanır.
- Bu özellik parçacıkları lineer bir şekilde odaklamamızı sağlar.

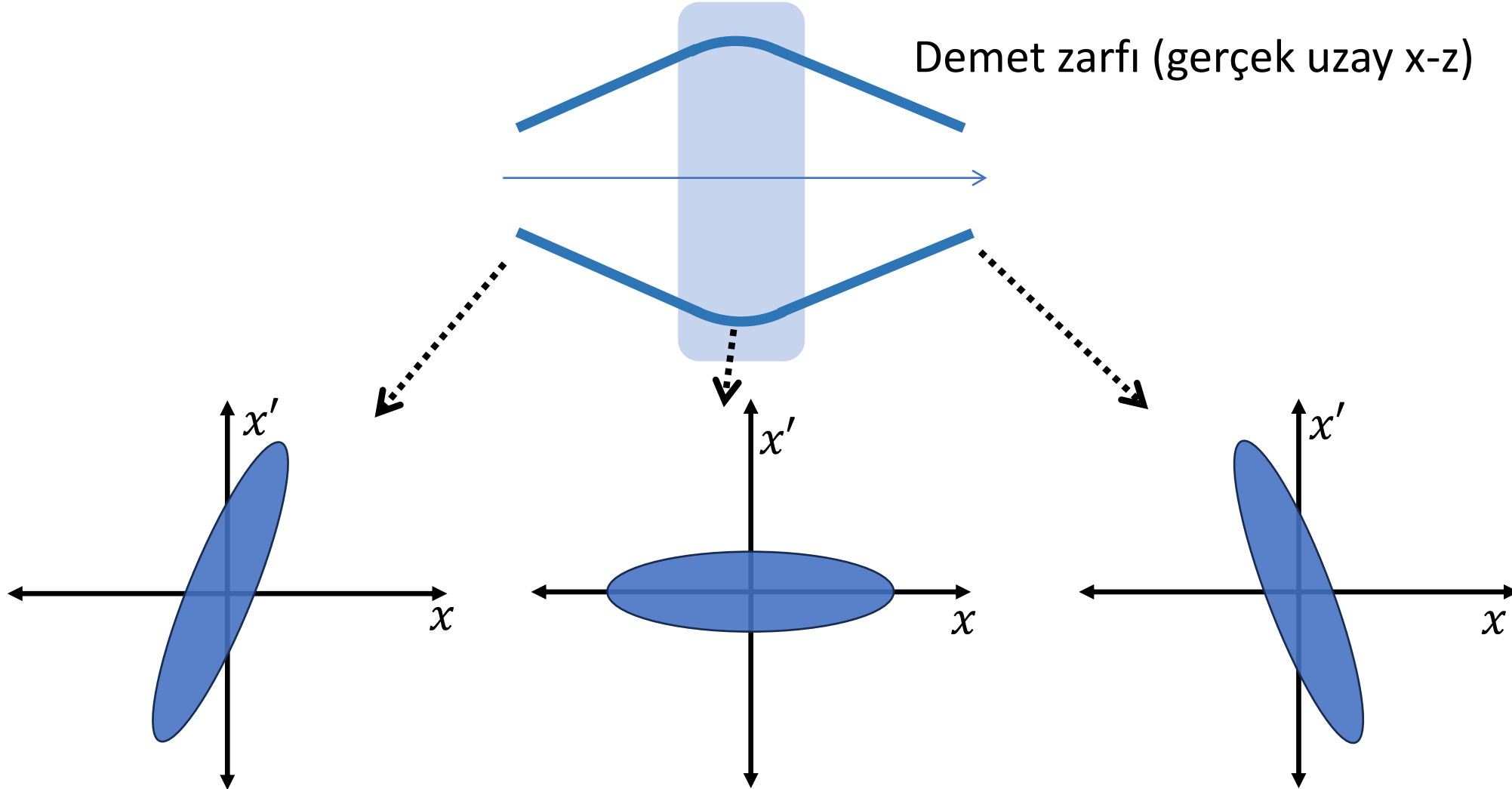
$$B_x = Gy$$

$$B_y = Gx$$

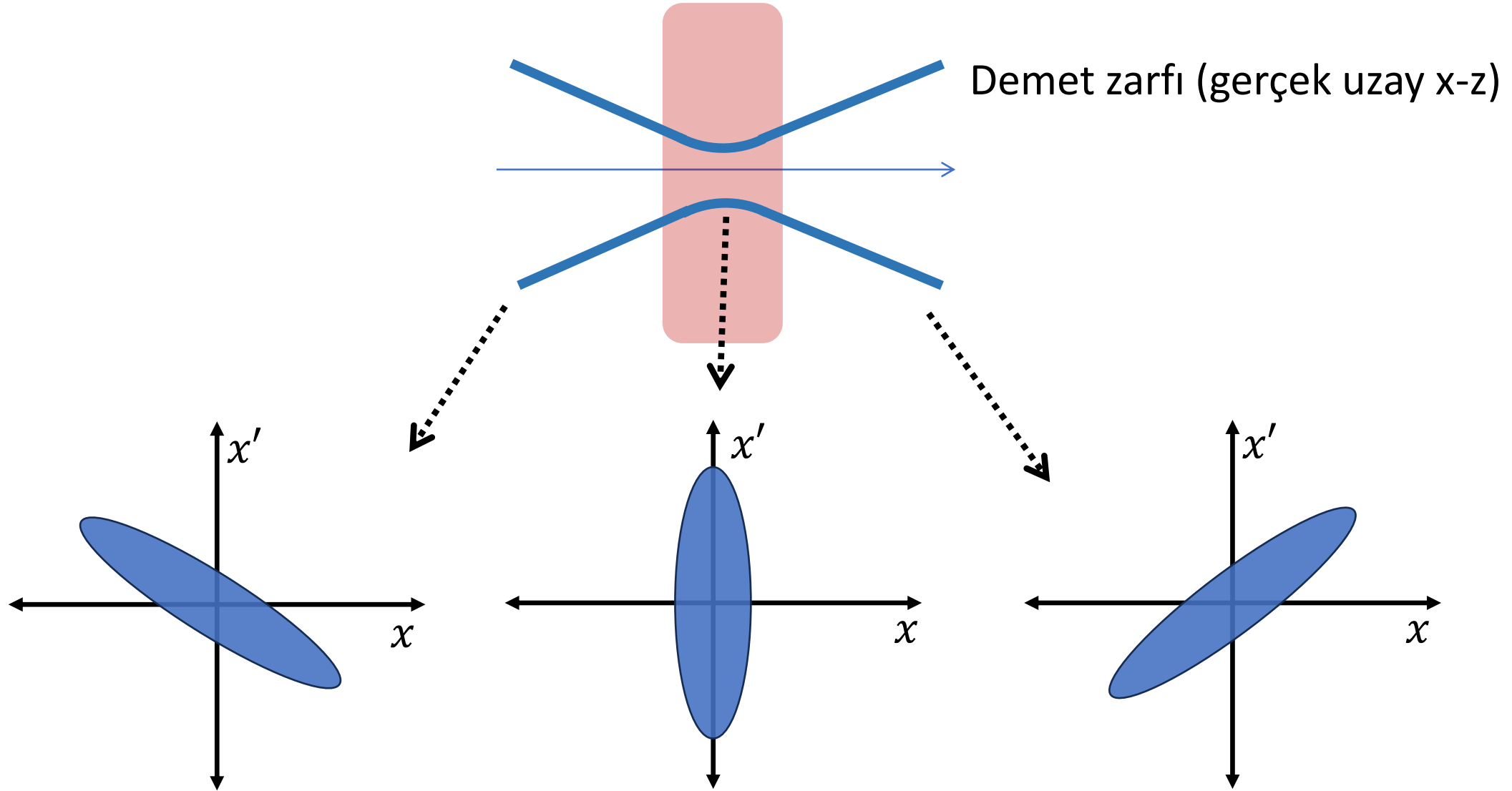
$$B_z = 0$$

G: mıknatısın gradyanı.

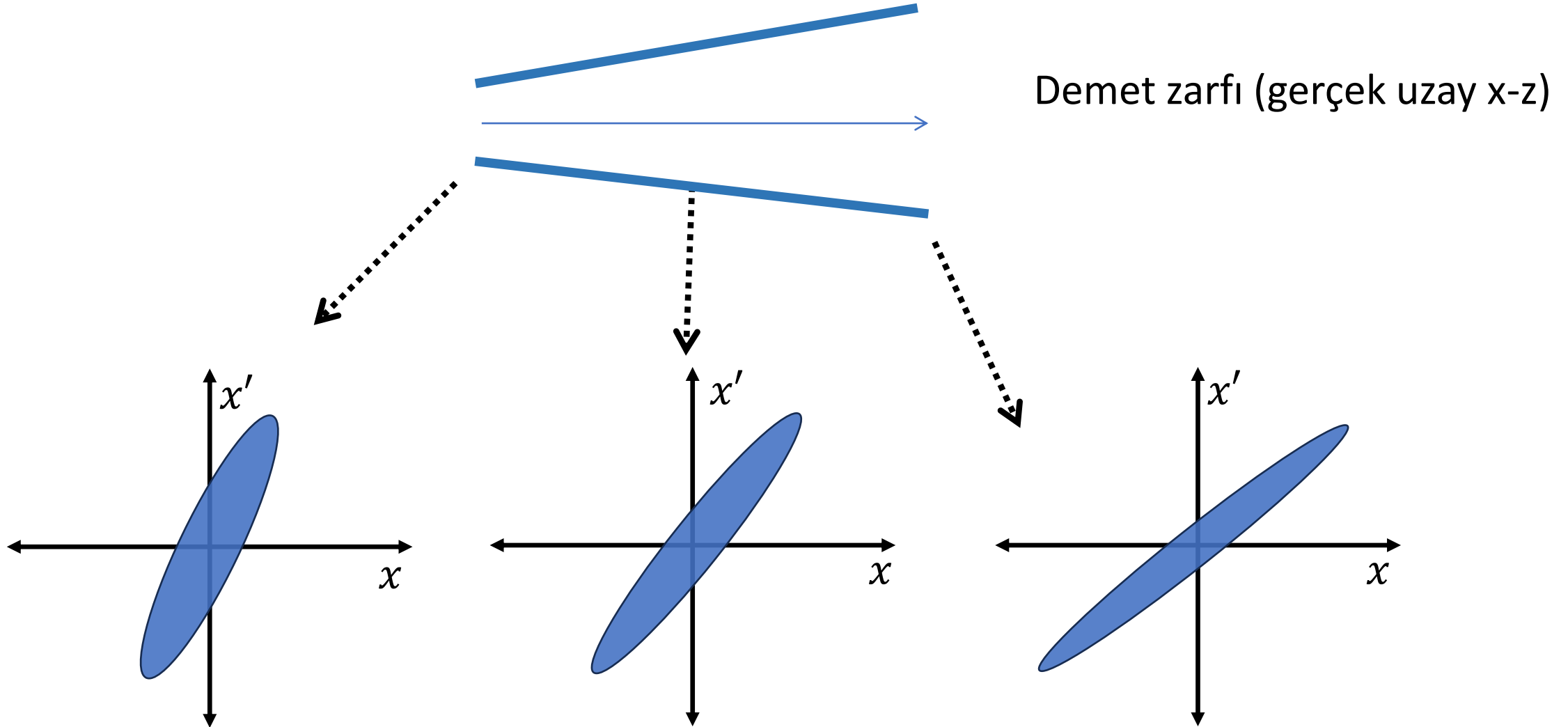
# ODAKLAYICI MIKNATISIN FAZ UZAYINA ETKİSİ



# DAĞITICI MIKNATISIN FAZ UZAYINA ETKİSİ

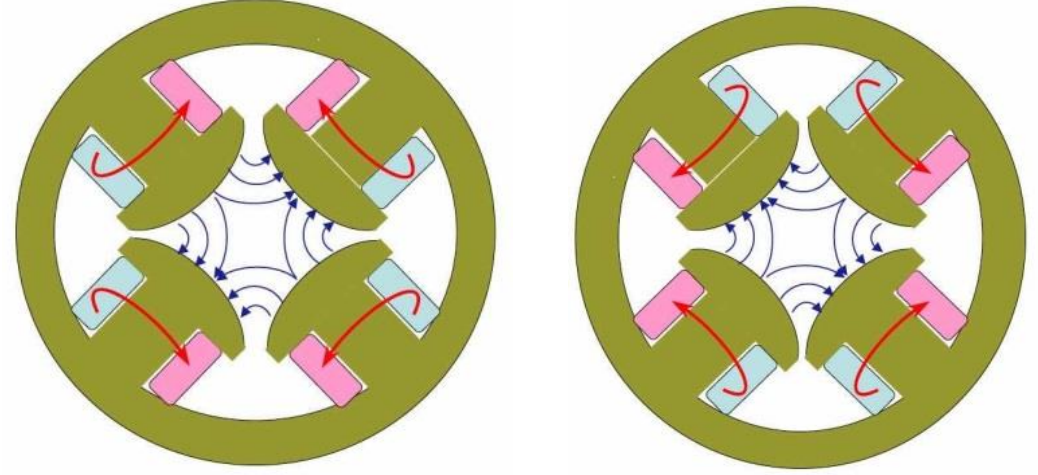
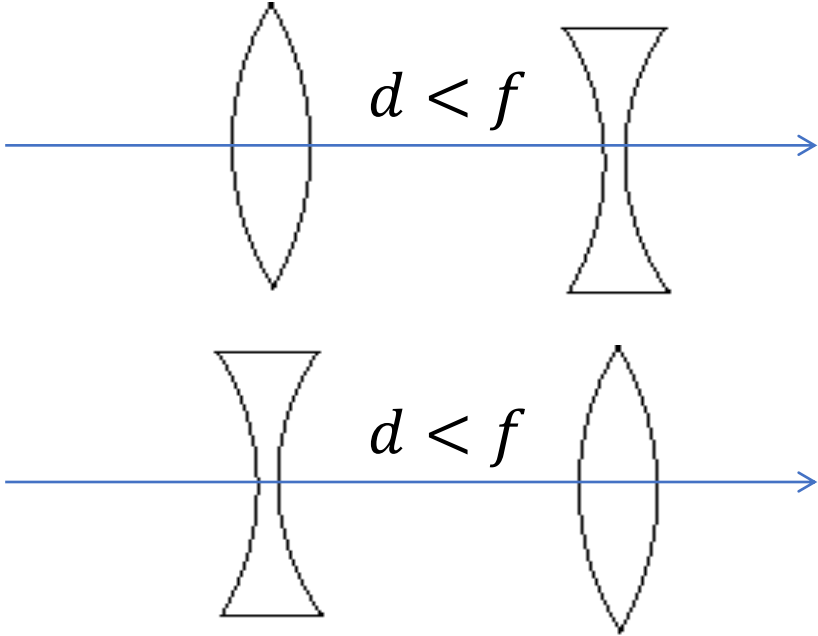


# SÜRÜKLENME BOŞLUĞUNUN FAZ UZAYINA ETKİSİ



# FODO

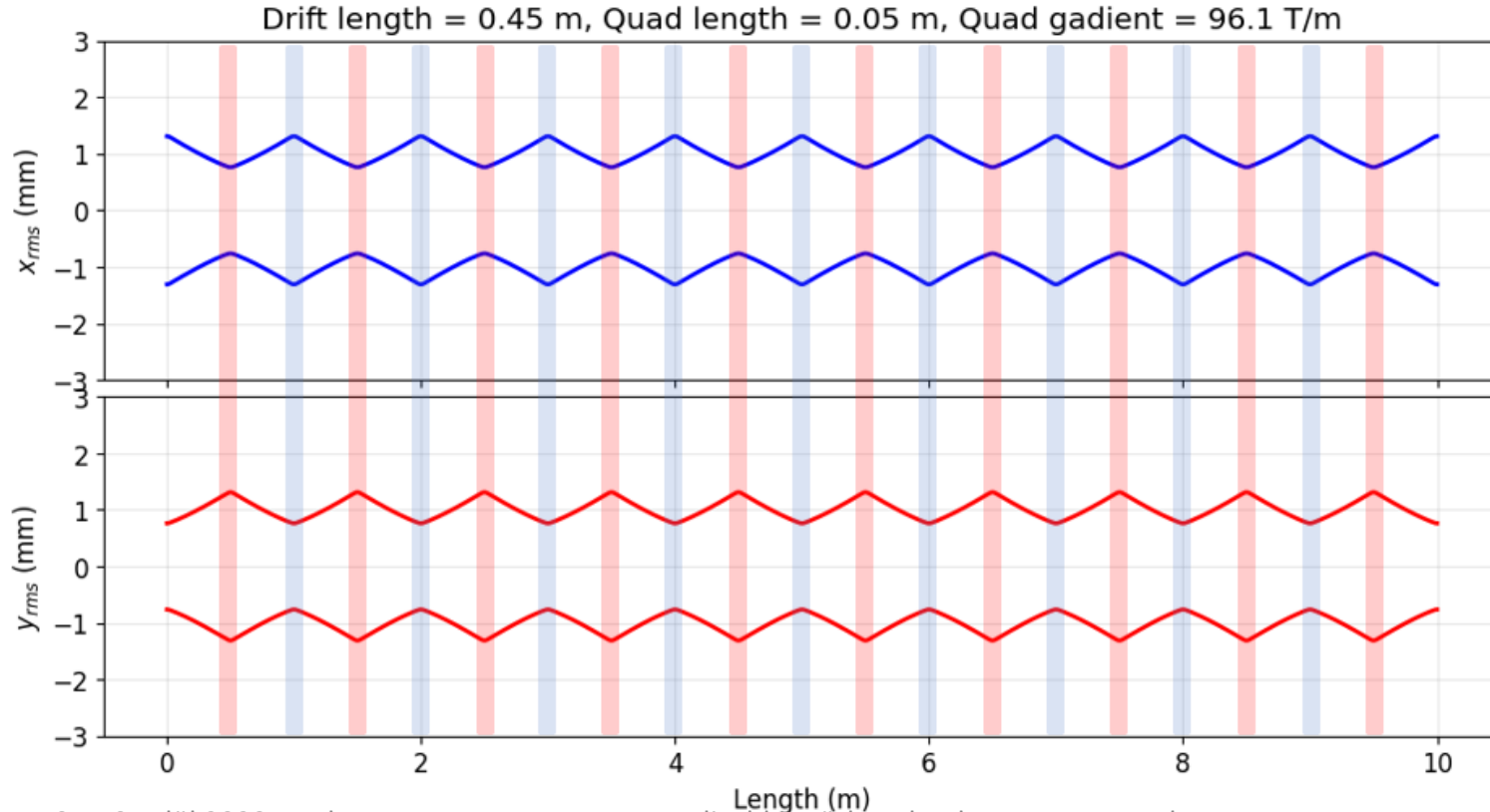
- F: odaklayıcı mıknatıs, D: dağıtıcı mıknatıs, O: sürüklenme boşluğu



- Odak uzaklıkları aynı ( $f$ ) olan bir ince kenarlı ve bir kalın kenarlı merceği arka arkaya koyarsak aradaki uzaklık  $d < f$  şartını sağladığı sürece bu iki merceğin yaptığı toplam etki odaklayıcıdır. Merceklerin sırası önemli değil.
- FODO yapısında birbiri ardına gelen 4-kutuplu mıknatıslar birbirine göre 90 derece döndürülmüştür.

# FODO

- FODO yapıları (mıknatısların güçleri ve yerleri) demetinin özelliklerine göre tasarlanır. FODO yapısı boyunca demetin zarfı periyodik hareket yapar.
- Aşağıdaki şekilde 230 MeV lik protonlar için tasarlanmış bir FODO yapısında demetin hareketi gösterilmiştir. Mavi yatay uzayda rms demet boyunu kırmızı da dikey uzayda rms demet boyunu göstermektedir.



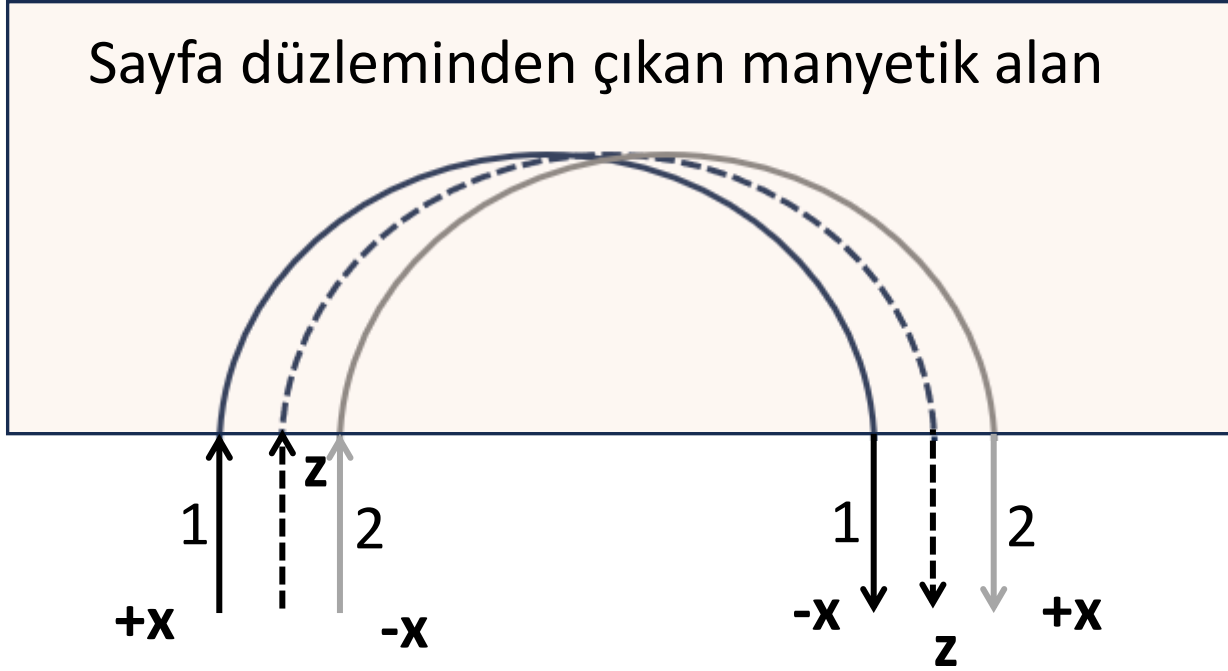
Yatayda odaklayıcı mıknatıslar mavi ile, yatayda dağıtıcı mıknatıslar kırmızı ile gösterilmiştir.



# ZAYIF ODAKLAMA

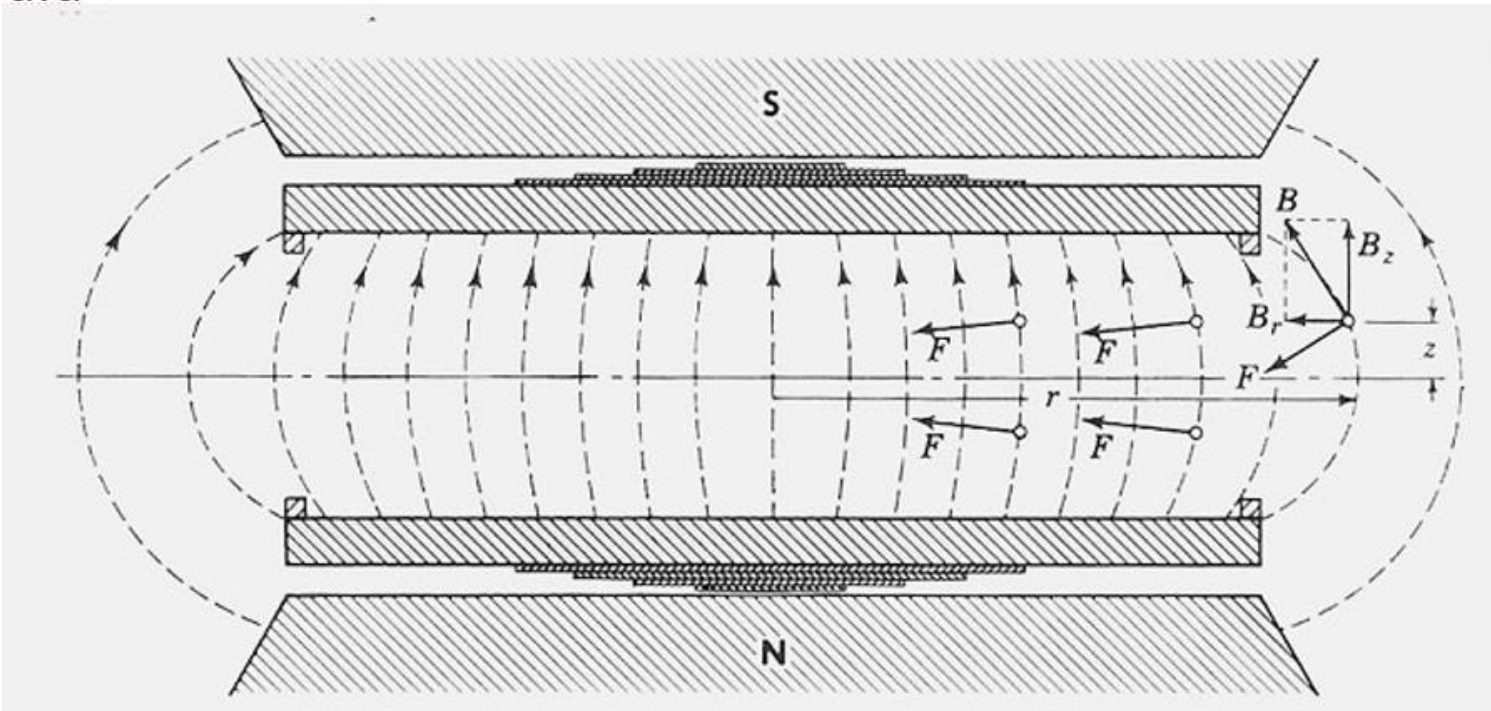
- Güçlü (4 kutuplularla) odaklama 1952 yılında bulundu. Bundan önce dairesel hızlandırıcılarda (cyclotron, synchrotron) demetin enine uzayda boyutu zayıf odaklama ile kontrol ediliyordu.
- Zayıf odaklama iki kutuplu mıknatıslarla demeti hem yatay hem de dikey ekseninde odaklama prensibine dayanır.
- İki kutuplu (dipol) mıknatısların asıl amacı demeti saptırmaktır. Fakat mıknatısların tasarımına göre parçacıkları enine uzayda odaklayabilirler.

# ZAYIF ODAKLAMA: YATAY EKSEN



z yönünde hareket eden pozitif yüklü iki parçacık (1 ve 2) homojen bir manyetik alana girdiklerinde aynı dönme yarıçapına sahip oldukları için birbirlerine yaklaşıp tekrar uzaklaşırlar. Aynı zamanda kesikli çizgi (referans parçacığı) etrafında salınım yaparlar. Bu yatay eksen zayıf odaklamadır.

# ZAYIF ODAKLAMA: DİKEY EKSEN



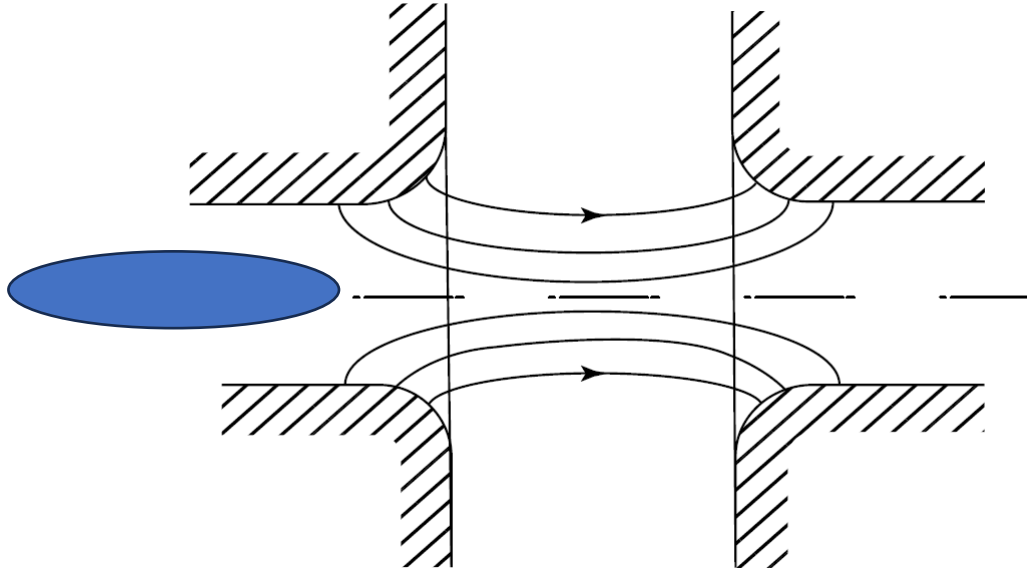
- Cyclotronun yandan görünüşü ve sayfa düzleminde çıkan pozitif yüklü parçacıklara uygulanan manyetik kuvvetler.
- Parçacıklara merkezci ivme uygulanırken manyetik alanın şişkinliği sayesinde dikey ekseninde parçacıklar aynı zamanda odaklanıyor.
- Aynı prensip zayıf odaklamaya dayalı synchrotronlardan da kullanıldı.

# BÜKÜCÜ MIKNATISLARDA ODAKLAMA

- Modern hızlandırıcılarda güçlü odaklama kullanılarak demet boyutları ve dolayısıyla demet borusunun boyutları küçük tutulmaktadır.
- Fakat hala demeti saptırma için bükücü (iki kutuplu) mıknatıslar kullanılmaktadır.
- Hızlandırıcılarda kullanılan iki kutuplu mıknatısların asıl amacı parçacıkları saptırmak olsa da parçacıkları yatay ve dikey ekseninde sıkıştırma etkisi de vardır.
- Bu etki demet dinamiği hesaplarında göz önünde bulundurulmalıdır.

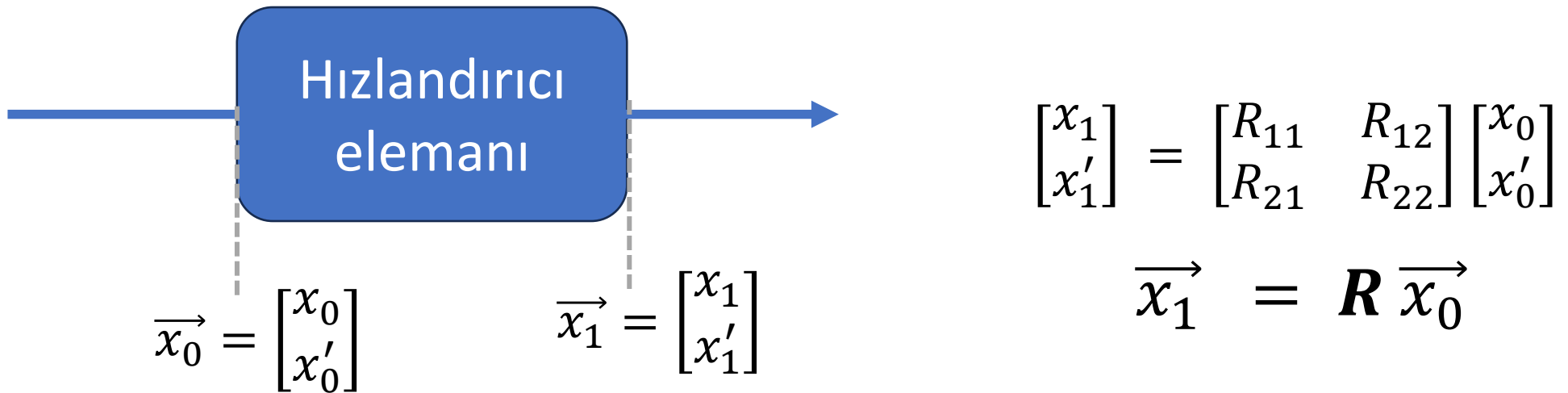
# HIZLANDIRMA BOŞLUĞUNDA ENİNE DAĞITMA/ODAKLAMA

- RF kovuklarının hızlandırma boşluklarında elektrik alanın yarıçap yönünde de bileşeni vardır. Demet hızlandırma boşluğunun ilk yarısında enine odaklama, ikinci yarısında enine dağıtma hisseder. Kovuktaki RF fazının seçimine göre toplam etki odaklama veya dağıtma olabilir. RF kovuklarındaki bu etki de enine demet dinamiği hesaplarına katılmalıdır.



# TRANSFER MATRİSLERİ

- Bir hızlandırıcı elemanı için zamana bağlı hareket denklemleri yazılıp değişken değiştirme yöntemi ile denklem faz uzayındaki parametrelere dönüştürülebilir.
- Bu dönüşüm yapıldıktan sonra hızlandırıcı elemanın parçacıkların faz uzayındaki koordinatlarına nasıl bir dönüşüm uyguladığı bulunabilir.
- Dönüşüm formülleri matris cinsinden yazılırsa o hızlandırıcı elemanın transfer matrisi bulunur. Transfer matrisini bu derste **R** ile göstereceğiz.

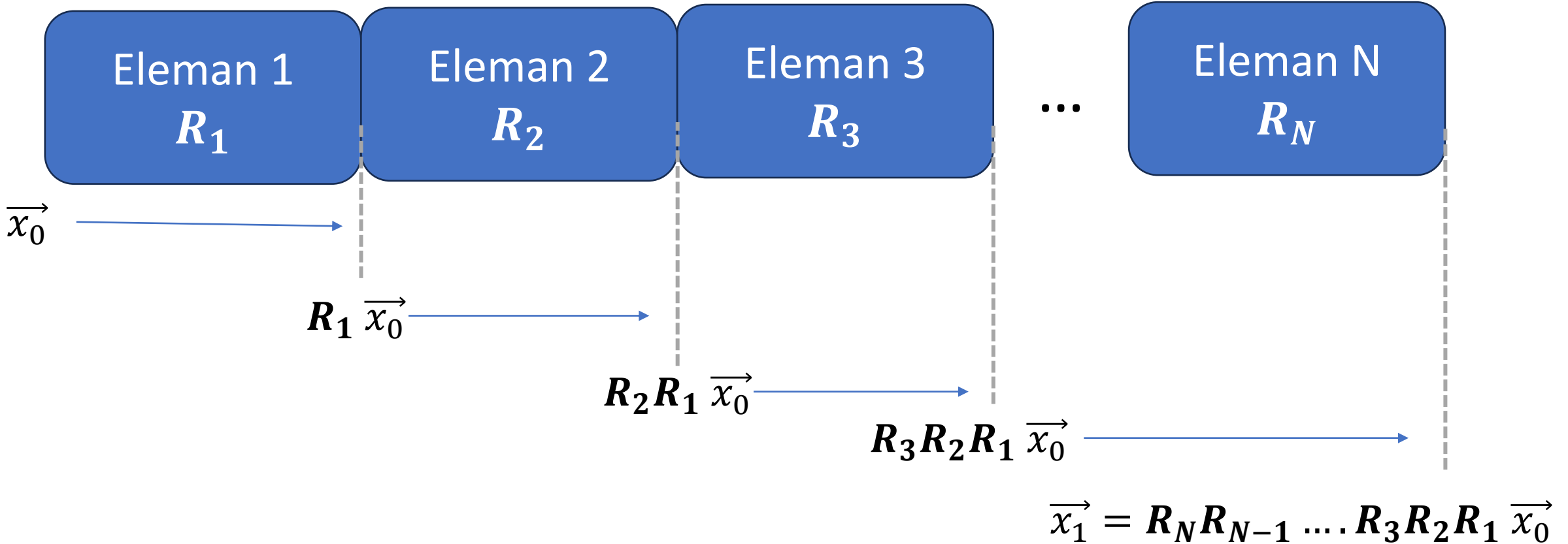


Parçacığın girişteki koordinatları

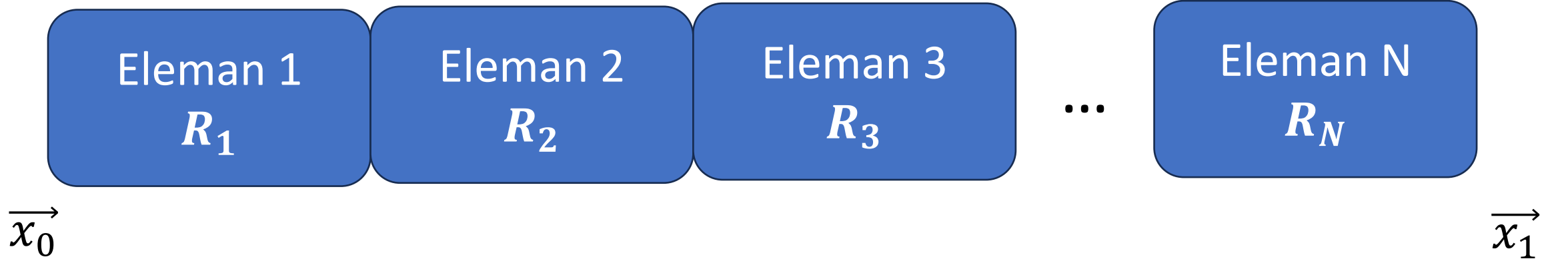
Parçacığın çıkıştaki koordinatları

# ARDIŞIK HIZLANDIRICI ELEMANLARININ EŞDEĞER TRANSFER MATRİSİ

Başlangıç koordinatları  $\vec{x}_0$  vektörü ile ifade edilen bir parçacığı N tane hızlandırıcı elemanından geçirdiğimizi düşünelim ve parçacığın en sondaki koordinatlarını gösteren vektör  $\vec{x}_1$  olsun.



# ARDIŞIK HIZLANDIRICI ELEMANLARININ EŞDEĞER TRANSFER MATRİSİ



$$\vec{x}_1 = \underbrace{R_N R_{N-1} \dots R_3 R_2 R_1}_{\text{Eşdeğer Transfer Matrisi}} \vec{x}_0$$

N elemanın eşdeğer transfer matrisi bütün elemanların transfer matrislerinin ters sırayla yazılıp çarpılmasından bulunabilir.



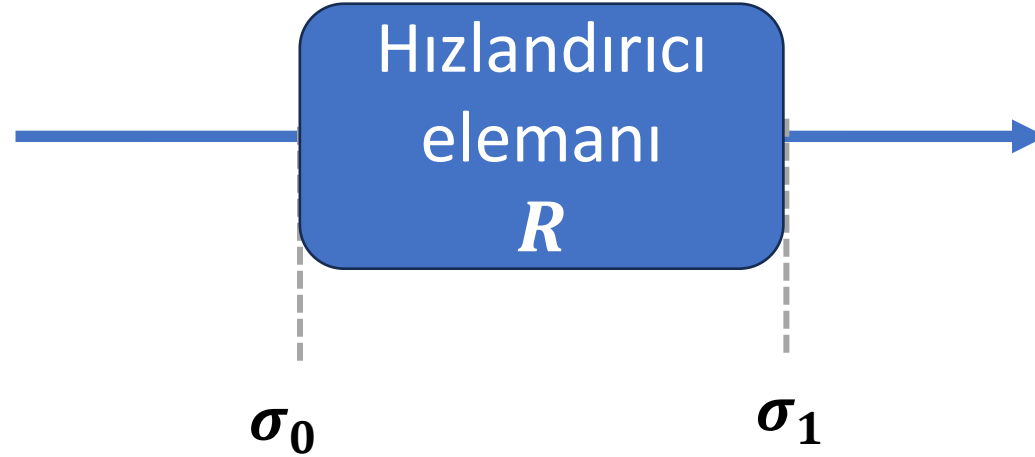
# DEMET MATRİSİ VE TRANSFORMASYONU

- Demet dinamiği hesapları yaparken demetteki her parçacığın koordinatlarının her hızlandırıcı elemanından nasıl etkilendiği matris ve vektör çarpımları ile bulunabilir.
- Buna benzer olarak aynı transfer matrisleri kullanılarak demetin faz uzayındaki rms emittance elipsin parametrelerinin nasıl değiştiği de bulunabilir.
- Bu hesap için demet matrisi şöyle tanımlanır:

$$\sigma = \epsilon \begin{bmatrix} \beta & -\alpha \\ -\alpha & \gamma \end{bmatrix}$$

# DEMET MATRİSİ VE TRANSFORMASYONU

- Demet matrisinin bir hızlandırıcı elemanından transformasyonu şöyledir:



$$\sigma_1 = R\sigma_0R^T$$

# ÖZET

- Derste enine demet dinamiğine basit bir giriş yapıldı.
- Demetin faz uzayında nasıl ifade edildiği tartışıldı.
- Dört kutuplu mıknatıslarla güçlü odaklama ve iki kutuplu mıknatıslarla zayıf odaklamanın prensibi tartışıldı.
- Transfer matrislerinin enine demet dinamiği için nasıl kullanıldığı tartışıldı.