三次元カスケード理論に基づく空気シャワー粒子ラテラル分布の数値計算プログラム開発

横浜国大・理工　藤田楓

第七回 空気シャワー観測による宇宙線の起源探索研究会
2024年3月26日　東大・宇宙線研究所

背景と研究目的

・空気シャワーシミュレーション
　一次エネルギー　→　大
　計算時間　　　　→　大

・解析解を使った高速化も行われている
　Ex.) COSMOS
　　　一次元カスケード理論解の利用
　　　“one dimensional hybrid AS(as/qas)”

三次元カスケード理論解（＊）も求められているが、
使用例は少ない。
⇒　空気シャワーシミュレーションに利用できないか？

（＊）：The Lateral and the Angular Structure Functions of Electron Showers
Koichi KAMATA and Jun NISHIMURA
Progress of Theoretical Physics Supplement, Volume 6, February 1958, Pages 93–155, https://doi.org/10.1143/PTPS.6.93

三次元カスケード方程式

電子密度 π

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \theta \frac{\partial \pi}{\partial r} = \int_0^1 \left[\frac{1}{1-\nu} \pi\left(\frac{E}{1-\nu}, t\right) - \pi(E,t) \right] \varphi(\nu) d\nu + 2\int_0^1 \gamma\left(\frac{E}{u}, t\right) \Psi(u) du/u +$$

制動放射の寄与　　電子対生成の寄与

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\theta-\theta')\pi(\theta')d\theta' - \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\theta')\pi(\theta)d\theta' \right] - \varepsilon \frac{\partial \pi}{\partial E}$$

散乱の寄与　　電離損失の寄与

光子密度 γ

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \theta \frac{\partial \gamma}{\partial r} = \int_0^1 \pi\left(\frac{W}{u}, t\right) \varphi(\nu) d\nu/\nu - \sigma_0 \gamma(W,t)$$

制動放射の寄与　　電子対生成の寄与

B近似でのエネルギーの横広がりは、

$$\Pi_E = -\frac{\varepsilon}{4\pi^3} \iint_{-i\infty}^{+i\infty} ds dp \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s \left(\frac{\varepsilon}{E_s}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon^2 \gamma^2}{E_s^2}\right)^{-p-1} \times \Gamma(p+1)\Gamma(s-1+2p)\mathfrak{M}_2(p,-2p-s+1,s,t)$$

解析的に解けない　数値計算も困難！ ➡ 空気シャワー計算にほとんど利用されてこなかった。

新居による数値計算手法(一様大気)①

電子エネルギー密度

$$\Pi_E(E_0,0,r,t)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s ds H_1(s)e^{\lambda_1(s)t}\times\frac{\varepsilon^3}{E_S^2}\mathfrak{M}_E(s,E_0,r)$$

E_0：入射電子エネルギー　 r ：シャワー中心からの距離　t：発達距離
s：エイジパラメータ　ε： 臨界エネルギー 84 MeV

$$\mathfrak{M}_E(s,E_0,r)=\left(\frac{\varepsilon r}{E_s}\right)^{s-3}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\frac{C_i(s)D_j(s)}{\alpha_i(s)^{s/2-1/2}}\times\left\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{\beta_j(s)^2\varepsilon^2r^2}{\alpha_i(s)E_s^2}\right)\right.$$

$$\left.-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{E_0^2r^2}{\alpha_i(s)E_s^2}\right)\right\}$$

$$-\left(\frac{\varepsilon r}{E_s}\right)^{s-2}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\frac{C_i(s)D_j(s)\beta_j(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}}\times\left\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{\beta_j(s)^2\varepsilon^2r^2}{\alpha_i(s)E_s^2}\right)\right.$$

$$\left.-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{E_0^2r^2}{\alpha_i(s)E_s^2}\right)\right\}$$

引用：3 次元電磁カスケード B 近似理論 エネルギー流ラテラル分布関数の計算
I- V 新居誠彦

新居による数値計算手法(一様大気) ②
鞍点法による積分計算

$$\Pi_E(E_0, 0, r, t) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_c \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s ds H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \times \frac{\varepsilon^3}{E_S^2} \mathfrak{M}_E(s, E_0, r)$$

- $f_E(s) = s\, ln\frac{E_0}{\varepsilon} + ln\, H_1(s) + \lambda_1(s)t + ln\, \mathfrak{M}_E(s, E_0, r)$
- $f_E'(s) = ln\frac{E_0}{\varepsilon} + \lambda_1'(s)t + \frac{\mathfrak{M}_E'}{\mathfrak{M}_E} = 0$　　　この解、鞍点をs_1とする

- $\Pi_E(E_0, 0, r, t) = \frac{1}{4\pi^2} e^{f_E(s_1)} \sqrt{\frac{2\pi}{f_E''(s_1)}}$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\varepsilon^3}{E_S^2} \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^{s_1} H_1(s_1) e^{\lambda_1(s_1)t} \times \frac{\mathfrak{M}_E(s_1, E_0, r)}{\sqrt{\lambda_1''(s_1)t + (\mathfrak{M}_E'/\mathfrak{M}_E)'|_{s_1}}}$$

数値計算プログラム開発

新居の方法に基づく計算の流れ

1）Prony内挿法により$\alpha_i(s), \beta_i(s), C_i(s), D_i(s)$ を計算

2）あるエイジ s での $\ln\mathfrak{M}_E(s, E_0, r)$ を計算

3） $\ln\mathfrak{M}_E(s, E_0, r)$ を s の多項式で近似

4） $\mathfrak{M}_E{}'/\mathfrak{M}_E$, $(\mathfrak{M}_E{}'/\mathfrak{M}_E)'$ 等を計算

5）鞍点法による積分計算

開発したPythonプログラムの一部→

```
##########################################################################
## "The cascade theory with collision loss"
## H.J.BHABHA, D.R.S and S.K.CHAKRABARTY,  (16a)
def A_Bhabha(s):
    A=(4./3.+ALPHA_BHABHA) * ( di(s)+EMGAMMA-1.+1./s) + 1./2. -
1/(s*(s+1))
    return A

##########################################################################
#16b式
## "The Lateral and the Angular Structure Functions of Electron Showers"
## Koichi KAMATA and Jun NISHIMURA,  (3.13)
def B(s):
    B=2. * (1./(s+1.) - 1.360/((s+2.)*(s+3.)))
    return B

##########################################################################
## dBds
##
def dBds(s):
    dBds = 2. * (-1./((s+1.)**2) + 1.360/(((s+2.)**2)*(s+3.)) +
1.360/((s+2.)*((s+3.)**2) ))
    return dBds

##########################################################################
## d2B/ds2
##
def d2Bds2(s):
    d2Bds2 = 2. * (2.*((s+1.)**(-3)) - 2.* 1.360 * ((s+2.)**(-
3))*((s+3.)**(-1)) - 1.36*((s+2.)**(-2))*((s+3.)**(-2.)) ¥
                                   - 1.36*((s+2.)**(-2))*((s+3.)**(-2)) -
2.*1.36* ((s+2.)**(-1))*((s+3.)**(-3)))
    return d2Bds2

##########################################################################
## "The cascade theory with collision loss"
## H.J.BHABHA, D.R.S and S.K.CHAKRABARTY,  (16b)
def B_Bhabha(s):
    B=2 * (1/s - (4./3.+ALPHA_BHABHA)/(s+1.)/(s+2.))
    return B

##########################################################################
#
#16c式
## "The Lateral and the Angular Structure Functions of Electron Showers"
## Koichi KAMATA and Jun NISHIMURA,  (3.14)
def C(s):
    C=1./(s+2.) + 1.360/(s*(s+1.))
    return C

def g(s):
    g=1./(s+2) + 1.360/(s*(s+1))
    #g=1
    return g
##########################################################################
#
## dCds
##
def dCds(s):
    dCds=-1./((s+2.)**2) - 1.360/((s**2)*(s+1.)) - 1.360/(s*((s+1.)**2))
    return dCds

##########################################################################
#
# d2C/ds2
##
def d2Cds2(s):
    d2Cds2 = 2.*((s+2.)**(-3)) + 2. * 1.360 * (s**(-3)) * ((s+1.)**(-1)) +
1.36*(s**(-2))*((s+1.)**(-2.)) ¥
           + 1.36*(s**(-2))*((s+1.)**(-2)) + 2.*1.36* (s**(-
1))*((s+1.)**(-3))
    return d2Cds2
```

モンテカルロシミュレーション（MC）との比較による新居の方法の妥当性の検討

シミュレーションコード：Epics9.311

物質：一様大気　$\rho = 1.205 \times 10^{-3}$ g/㎤

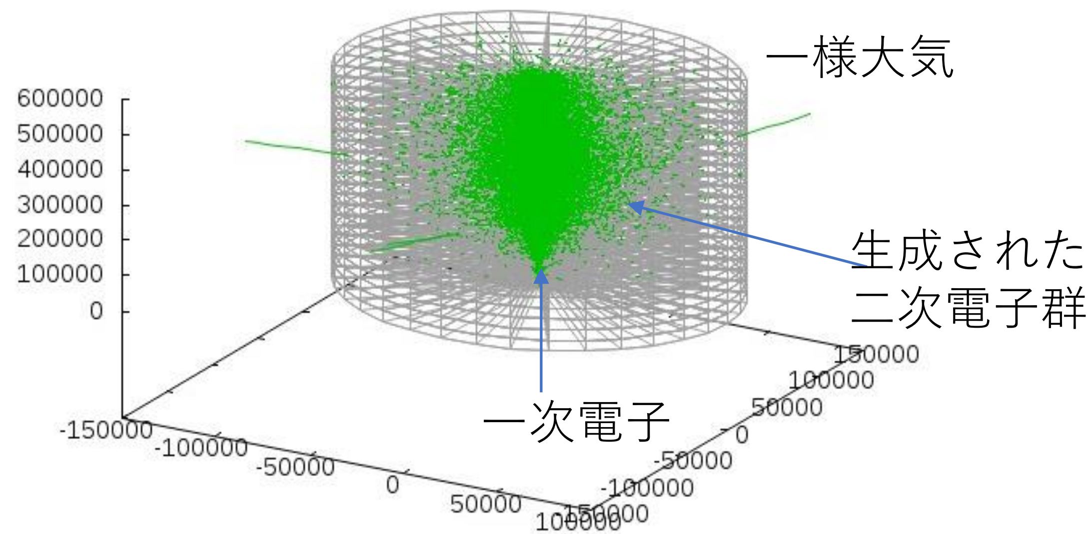
一次粒子：電子（84 GeV, 840 GeV, 84 TeV）

閾値エネルギー：電子521 KeV、ガンマ線10 KeV

最大発達時の深さでの

・エネルギー密度分布、

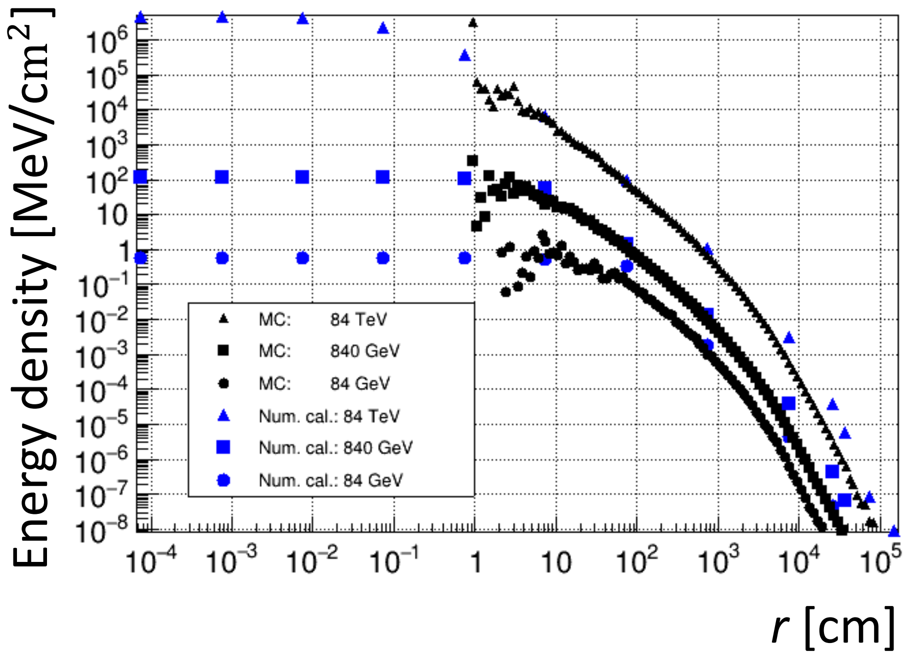
・粒子数密度分布を比較



1 TeVの電子を入射したときの二次電子の飛跡

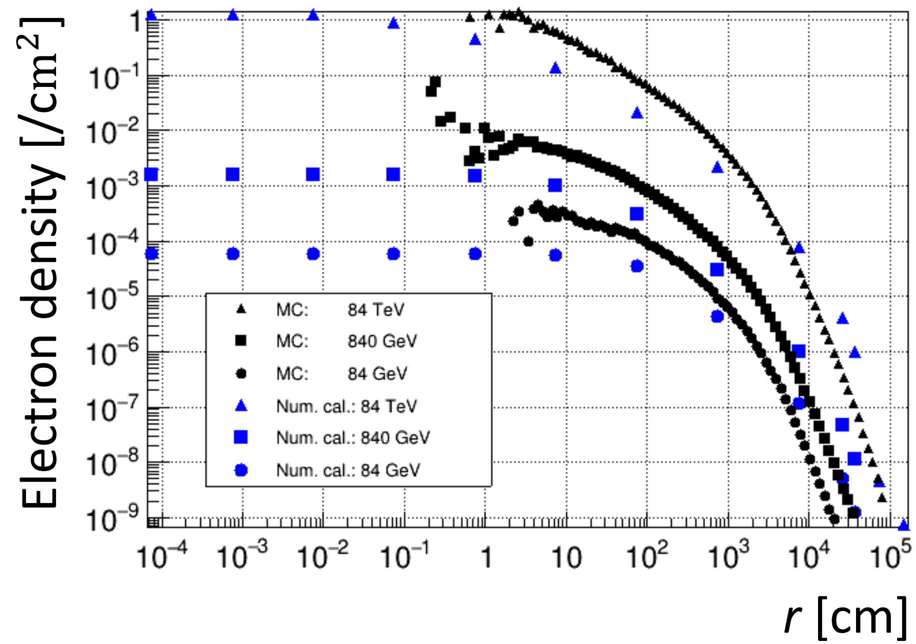
数値計算結果とEpics計算結果との比較（一様大気）

エネルギーの横広がり
@シャワーの最大発達位置



1 cm < r < 1000 cm ：～数％の差
r >1000 cm ： 差は拡大

粒子数密度の横広がり
@シャワーの最大発達位置



~数10％の差

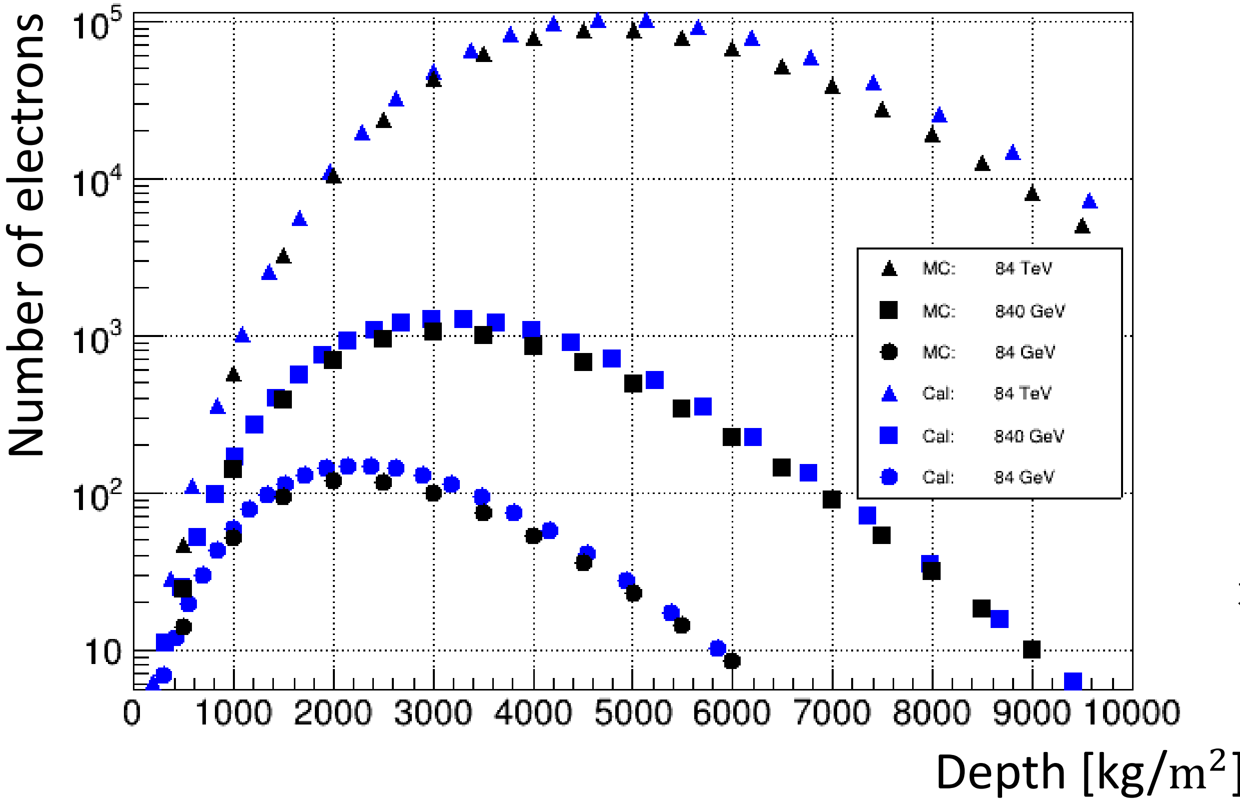
最大発達位置（数値計算の値）
84TeV ->12.93 r.l. , 840GeV-> 8.287 r.l. , 84GeV -> 5.963 r.l.

シャワー発達曲線の数値計算とMCの比較(標準的な大気)

$$\Pi_E(E_0,0,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\frac{ds}{s}H_1(s)\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s K_1(s,-s)e^{\lambda_1(s)t}\approx\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\frac{1}{s}\frac{H_1(s)K_1(s,-s)}{[\lambda''_1(s)t+1/s^2]^{1/2}}\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s e^{\lambda_1(s)t}$$

$$t=-\frac{1}{\lambda'_1(s)}\left[ln\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)-\frac{1}{s}\right]$$

シミュレーションコード：COSMOS X 0.08



差は10%～30%

まとめ

新居の計算方法に基づく三次元カスケード方程式の数値計算プログラムを開発した。

●新居の計算方法の妥当性を検証するため、Epics9.311による一様大気中の発達結果と比較した。

エネルギー84 GeV、840 GeV、84 TeVの電子による最大発達地点での

エネルギー密度差：～数％（1 cm $< r <$ 1000 cm）

差が広がる($r >$1000 cm)

粒子数密度差：　～数10％

●標準的な大気中での発達曲線をCOSMOS Xと比較した。

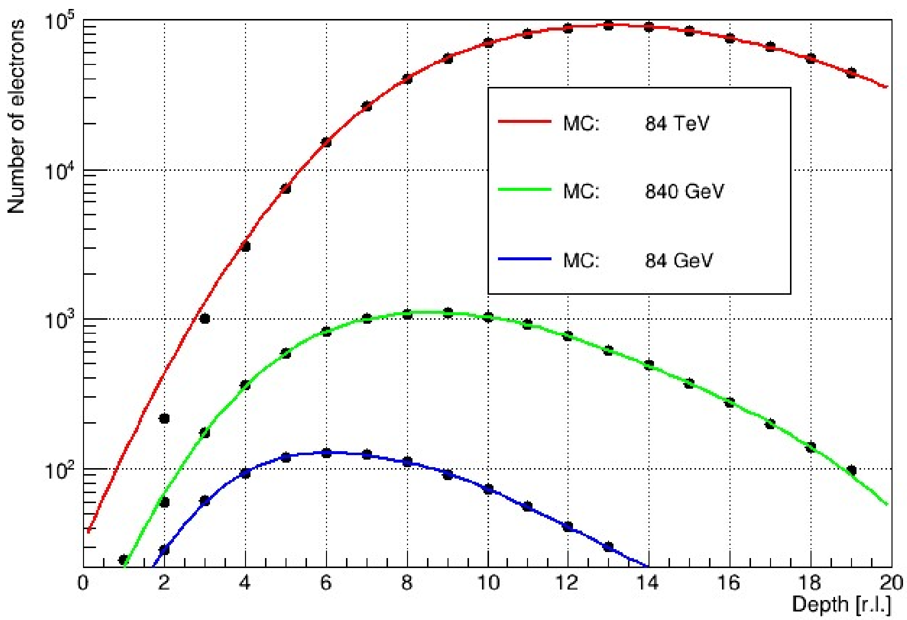
粒子数の差は10%～30％

今後

標準的な大気での横広がりをCOSMOS Xと比較する。

最大発達時の深さの見積もり

シャワー発達曲線



シャワーの最大発達時の深さ

Epics9.311

84TeV	13.1252 r.l.
840GeV	8.55745 r.l.
84GeV	6.03442 r.l.

数値計算の値

84TeV	12.93 r.l.
840GeV	8.287 r.l.
84GeV	5.963 r.l.