

Mécanique newtonienne : Application en astronomie

La mécanique newtonienne, développée par le célèbre physicien Isaac Newton, est un cadre fondamental pour comprendre le mouvement des objets dans l'univers. Cette théorie révolutionnaire a jeté les bases de notre compréhension de l'astronomie et de la physique classique.

1 Modélisation du mouvement des corps célestes :

Les lois de Newton permettent de prédire avec précision le mouvement des planètes, des étoiles et d'autres objets astronomiques.

2 Calcul des trajectoires orbitales

La mécanique newtonienne fournit les équations nécessaires pour calculer les orbites complexes des corps célestes.

3 Explication des phénomènes astronomiques

Elle offre un cadre théorique solide pour expliquer des événements tels que les marées, les éclipses et les mouvements des petits corps (asteroides et comètes).



Soit P un objet céleste de masse m en mouvement autour du point fixe O et subissant une accélération centrale telle que:

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \ell G \frac{m \cdot M}{r^2} \vec{n}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \ell \frac{\mu}{r^2} \vec{n}$$

$\mu = GM = \text{constante}$,

\vec{n} étant le vecteur unitaire radial

ℓ prend trois valeurs discrètes (-1, 0, +1), permet de traiter à la fois le cas:

- * attractif ($\ell = -1$)
- * le cas répulsif ($\ell = +1$)
- * le cas sans accélération ($\ell = 0$).

L' équation du mouvement : $C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u + \ell \frac{\mu}{C^2} \right) = 0$ avec $u = \frac{1}{r}$

Les solutions sont alors de deux types :

- Soit $u=0$, l'objet P est à l'infini
- Soit on cherche la solution de l'équation différentielle du 2^{ème} ordre :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\ell \frac{\mu}{C^2}$$

L'équation $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\ell \frac{\mu}{C^2}$ se résout facilement en cherchant des solutions de la forme :

$$\exists A, B \in \mathbb{R} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, u(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta - \ell \frac{\mu}{C^2}$$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \frac{1}{r} = u(\theta) = A' \cos(\theta - \theta_0) - \ell \frac{\mu}{C^2}, \quad \theta_0 \in \mathbb{R}$$



$$r = \frac{1}{-\ell \frac{\mu}{C^2} + A' \cos(\theta - \theta_0)}$$

En posant :

$$p = \frac{C^2}{\mu} \quad p \text{ étant nommé le paramètre de la conique,}$$

$$v = \theta - \theta_0 \quad : v \text{ étant nommé l'anomalie vraie.}$$

On obtient l'équation d'une conique en coordonnée polaire dont l'origine O est l'un des foyers, p est le paramètre, e est l'excentricité:

$$r(v) = r(\theta) = \frac{p}{-\ell + e \cos v}$$

Les grandeurs e et θ_0 seront déterminées par les conditions initiales.

* Cas sans accélération : $\ell = 0$

Droite

L'équation de la trajectoire est : $r = \frac{p}{e \cos(\theta - \theta_o)} = \frac{C}{V} \frac{1}{\cos(\theta - \theta_o)}$

La valeur de l'excentricité est : $e = \frac{CV}{\mu}$

Le produit $(r \cos(\theta - \theta_o))$ est constant : c'est l'équation d'une droite en coordonnées polaires. La trajectoire d'un point qui n'est soumis à aucune action est bien une droite parcourue à vitesse constante.

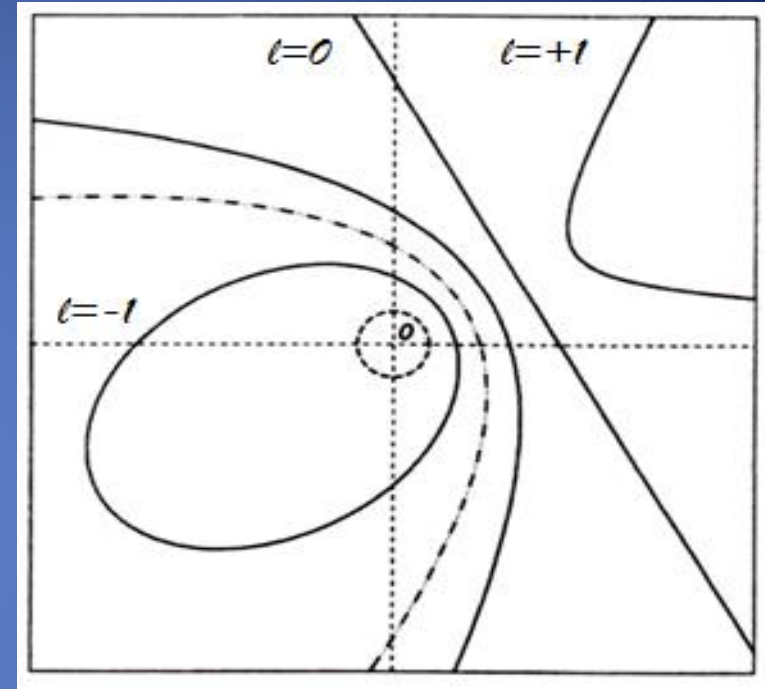
* Cas répulsif : $\ell = +1$

hyperbole – branche convexe.

L'équation de la trajectoire est : $r = \frac{p}{-1 + e \cos(\theta - \theta_o)}$

La valeur de l'excentricité est : $e^2 = 1 + \frac{C^2}{\mu^2} \left(V^2 + \frac{2\mu}{r} \right)$

$e > 1$ puisque la quantité $V^2 + \frac{2\mu}{r}$ est dans ce cas toujours positive. r peut atteindre une valeur infinie car son dénominateur peut s'annuler. La vitesse est suffisamment grande, de sorte que l'objet céleste sera dévié par le champ de force sur **une hyperbole** de foyer O et poursuivra sa route sur une des droites asymptotiques. Il s'agit ici de la branche qui tourne sa concavité vers l'origine. Ce cas ne se rencontre pas avec les interactions gravitationnelles.



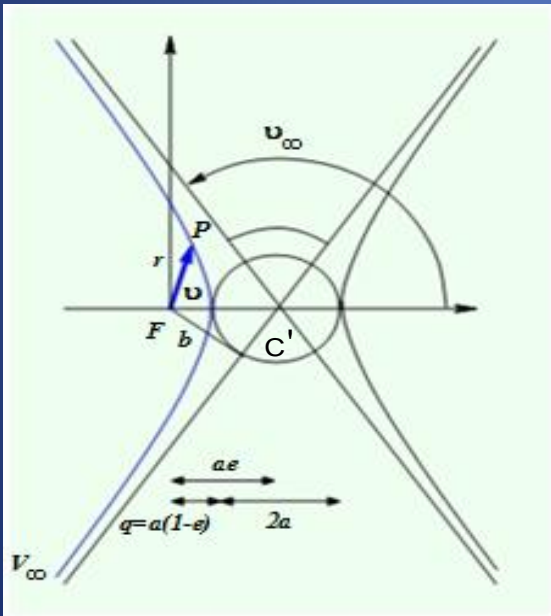
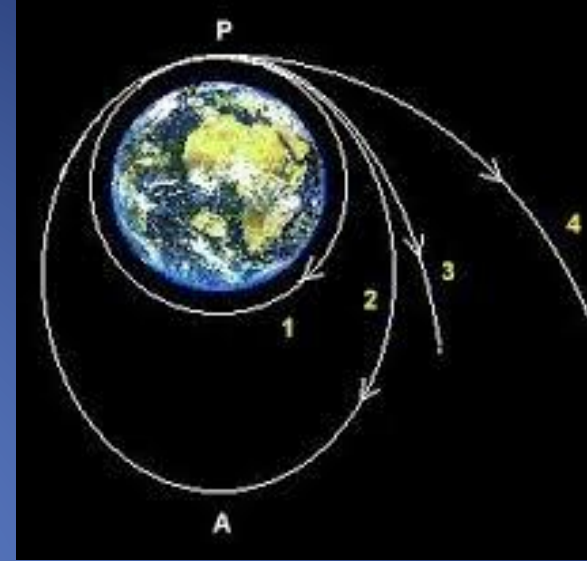
* Cas attractif : $e = -1$

Hyperbole – Branche concave, parabole, ellipse, cercle, dans cet ordre en se rapprochant de O.

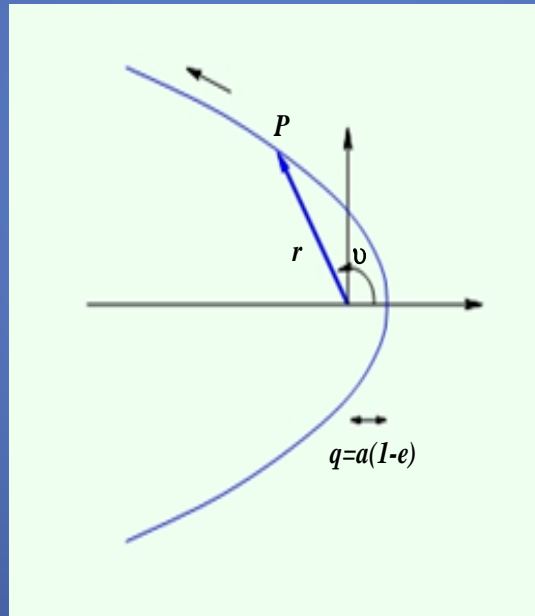
L'équation de la trajectoire est :
$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

La valeur de l'excentricité est :
$$e^2 = 1 + \frac{C^2}{\mu^2} \left(V^2 - \frac{2\mu}{r} \right)$$

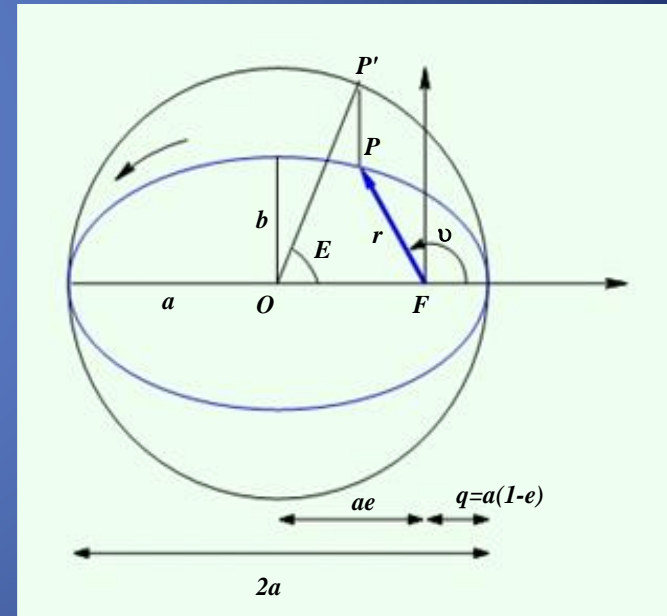
$$V_l = \sqrt{2 \frac{\mu}{r}}$$
 : vitesse de libération (ou vitesse d'évasion)



Si $V > V_l$, alors $e > 1$: **hyperbole** de foyer F. Il s'agit ici de la branche qui tourne sa concavité vers l'origine O, puisque la force est attractive.



Si $V = V_l$, alors $e = 1$: la vitesse de l'objet céleste n'est pas assez grande ; il s'écrasera sur l'astre au foyer en décrivant une **parabole**.



Si $V < V_l$, alors $e < 1$: L'objet céleste entrera en orbite sur une **ellipse** autour de l'astre au foyer sa vitesse déterminera les valeurs de a et b de l'ellipse.

Etude énergétique

Considérons un objet céleste soumis à l'action d'une force attractive \vec{F} tel que :

$$\vec{F} = - \left(G \frac{m M}{r^2} \right) \vec{u} = -\overrightarrow{\text{grad}U}$$

On peut écrire l'énergie potentielle E_p du système (potentiel gravitationnel U) comme :

$$E_p = U = -G m \frac{M}{r} = -\frac{m \mu}{r}$$

$$E_t = E_c + E_p = \frac{1}{2} m V^2 - \mu \frac{m}{r} = \frac{m}{2} \left(V^2 - \frac{2\mu}{r} \right)$$

En tenant compte de l'expression de l'excentricité dans le cas attractif ($\ell = -1$), on montre que :

$$E_t = m \frac{\mu^2}{2C^2} (e^2 - 1) = \text{constante}$$

Malgré que l'énergie totale est constant, il dépend de l'excentricité e :

- Si $e > 1$ alors $E_t > 0$, la trajectoire est une hyperbole.
- Si $e = 1$ alors $E_t = 0$, la trajectoire est une parabole
- Si $e < 1$ alors $E_t < 0$, la trajectoire est une ellipse
- Si $e = 0$ alors la trajectoire est un **cercle (cas particulier d'une ellipse)**.

Objet céleste en mouvement elliptique

La vitesse:

$$V = \left[\frac{e^2 c^2}{p^2} \sin^2 \nu + \frac{c^2}{p^2} (1 + e \cos \nu)^2 \right]^{1/2} = \frac{c}{p} \sqrt{1 + 2e \cos \nu + e^2}$$

Le rayon :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu}$$

Au périastre :

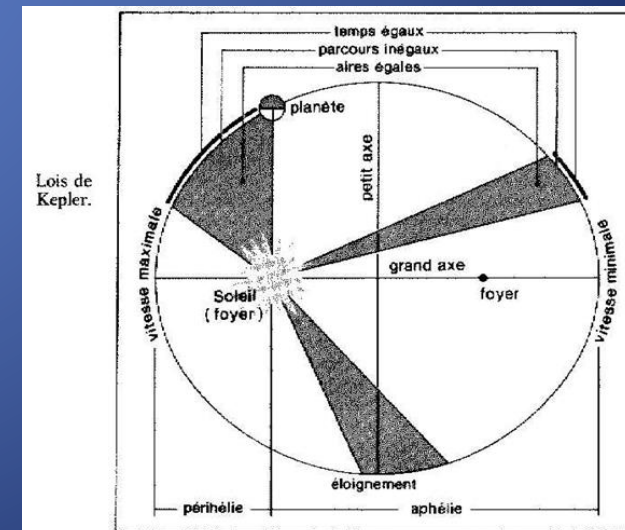
$$\nu = 0^\circ \quad r_p = a(1-e) \quad V_p = \frac{C}{a(1-e)} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1+e)$$

A l'apoastre :

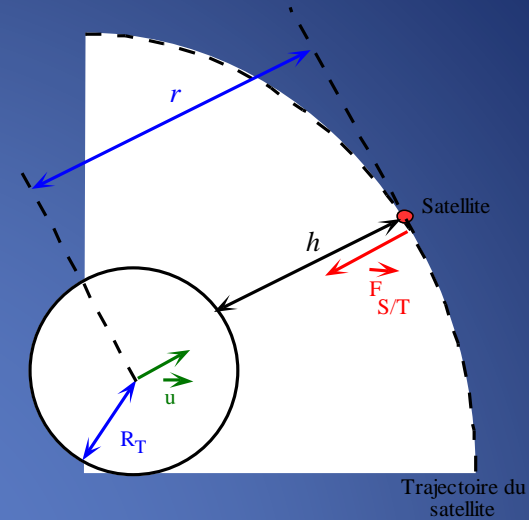
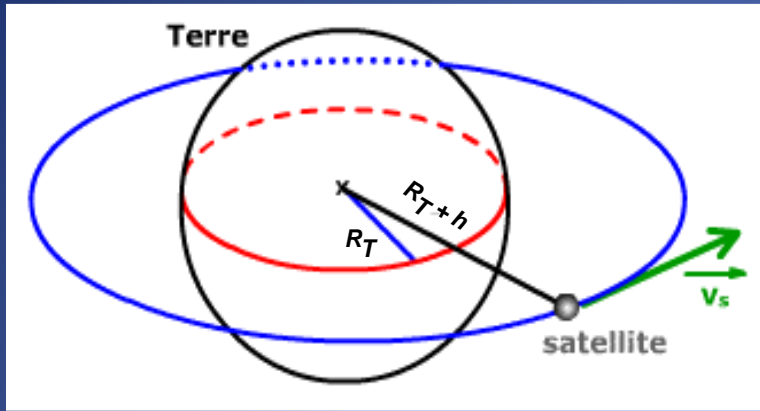
$$\nu = 180^\circ \quad r_a = a(1+e) \quad V_a = \frac{C}{a(1+e)} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1-e)$$

On en déduit les relations :

$$r_p V_p = r_a V_a = \sqrt{\frac{\mu}{p}} a(1-e^2) = \sqrt{\mu p} = C$$



Orbites circulaires – Applications aux satellites



La vitesse v tel que :

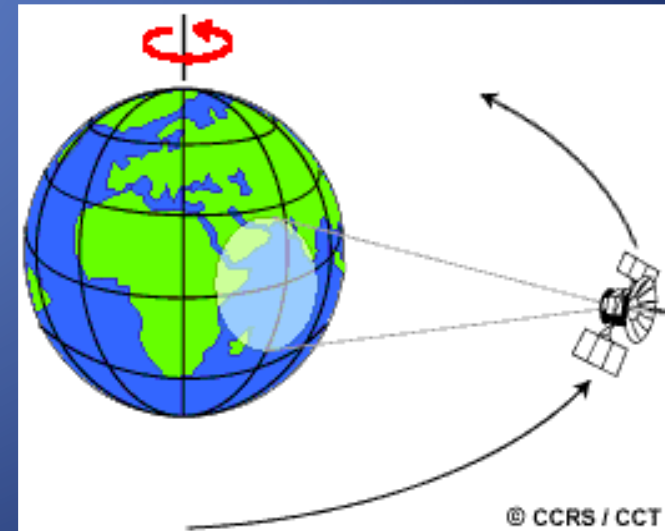
$$a_N = \frac{v^2}{(R_T+h)} = G \frac{M_T}{(R_T+h)^2} \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{M_T}{(R_T+h)}}$$

La période T tel que :

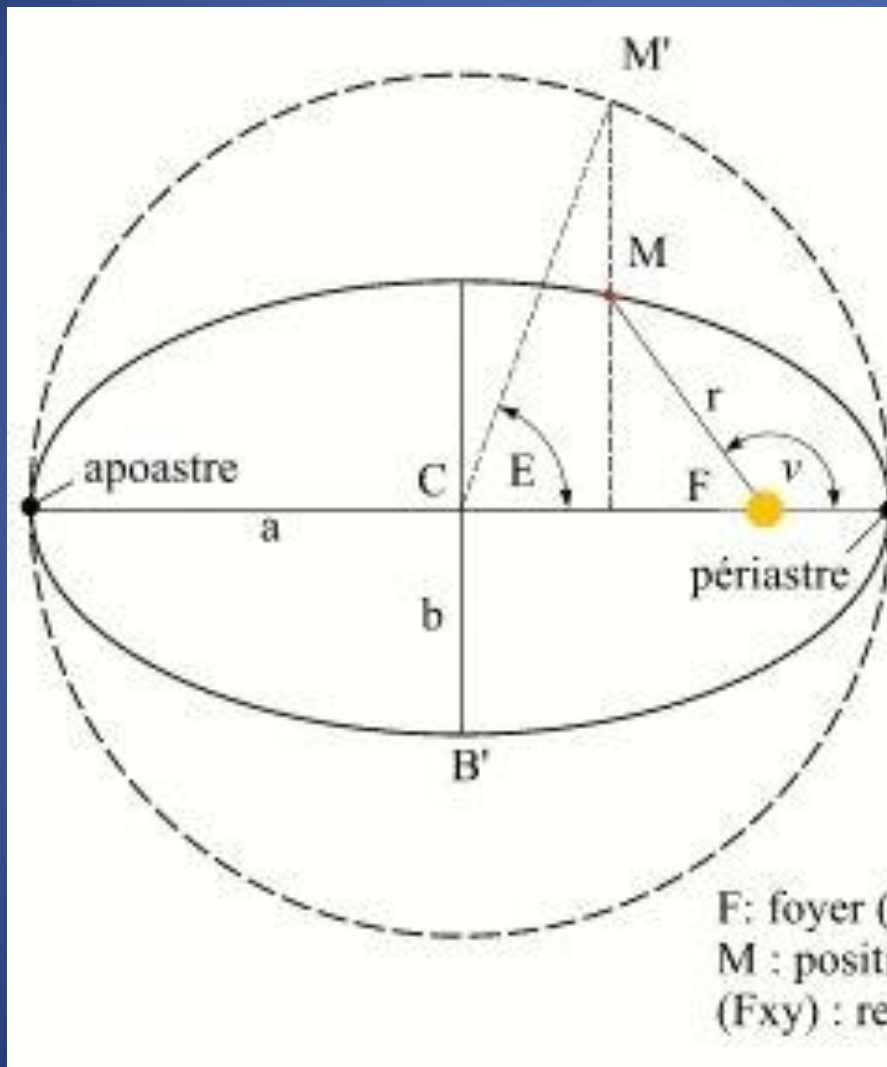
$$T = \frac{2\pi(R_T+h)}{v} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}$$

Conditions pour que le satellite soit géostationnaire

- Le mouvement du satellite doit se faire sur une trajectoire circulaire de centre celui de la Terre. Le plan de la trajectoire est l'équateur céleste.
- La période du satellite géostationnaire doit coïncider avec celle de la rotation de la Terre sur elle-même, (jour sidéral). Pour que cette dernière condition soit réalisée, il faut que le satellite évolue à une altitude bien déterminée : $h = 36000$ km.
- Le sens du mouvement doit être le même que celui de la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.

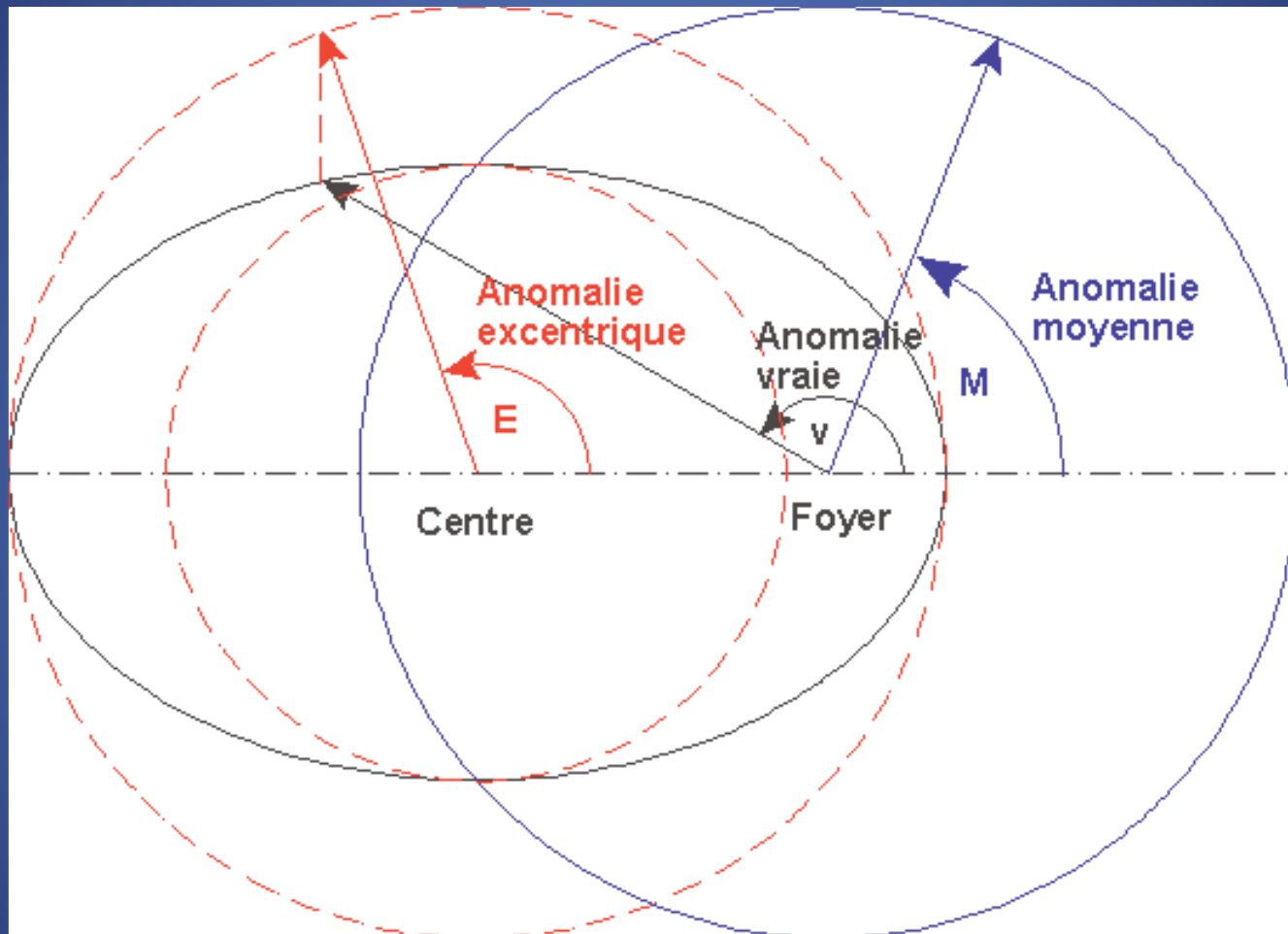


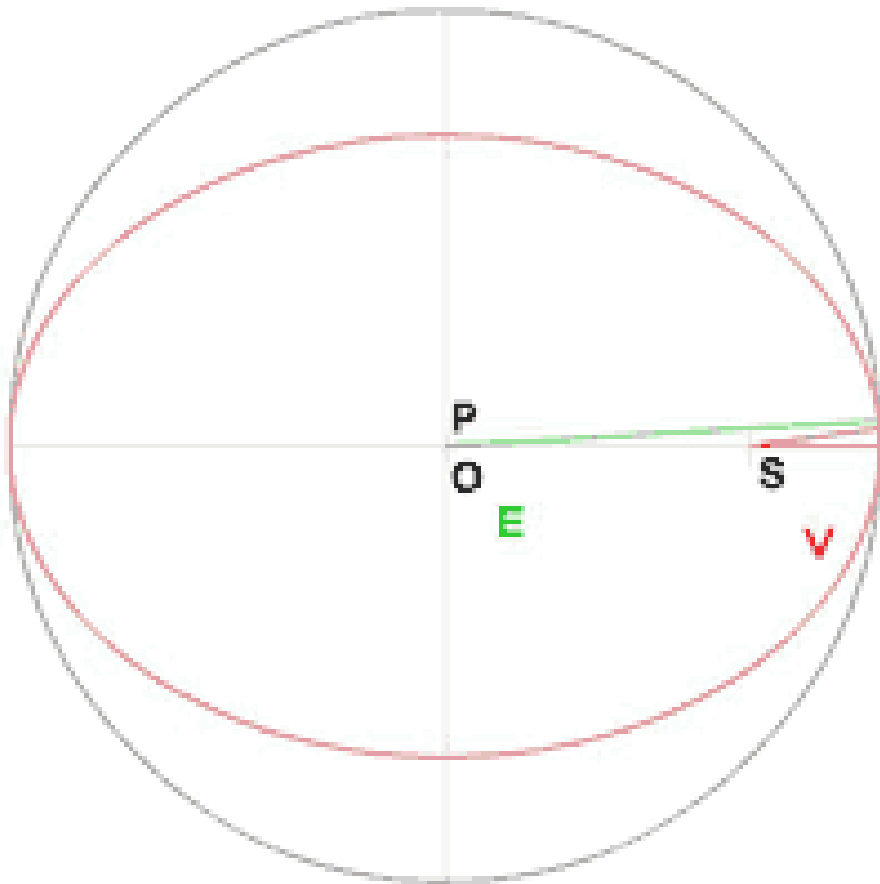
Equation de Kepler



e : excentricité
 a : le demi-grand axe
 v : anomalie vraie
 E : anomalie excentrique
 r : rayon vecteur FM
 n : le moyen mouvement

F : foyer (corps central S)
M : position du deuxième corps
($\bar{F}xy$) : repère orthonormé de centre F



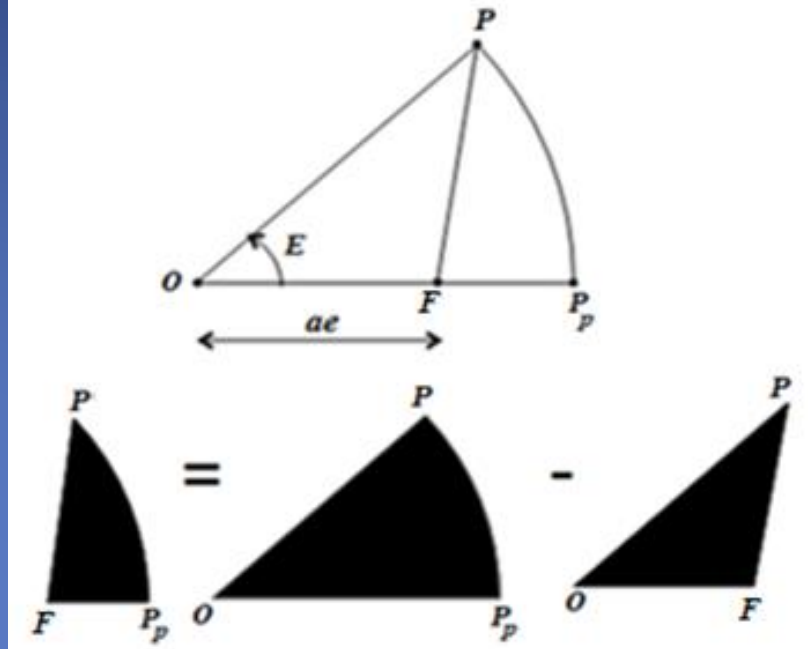
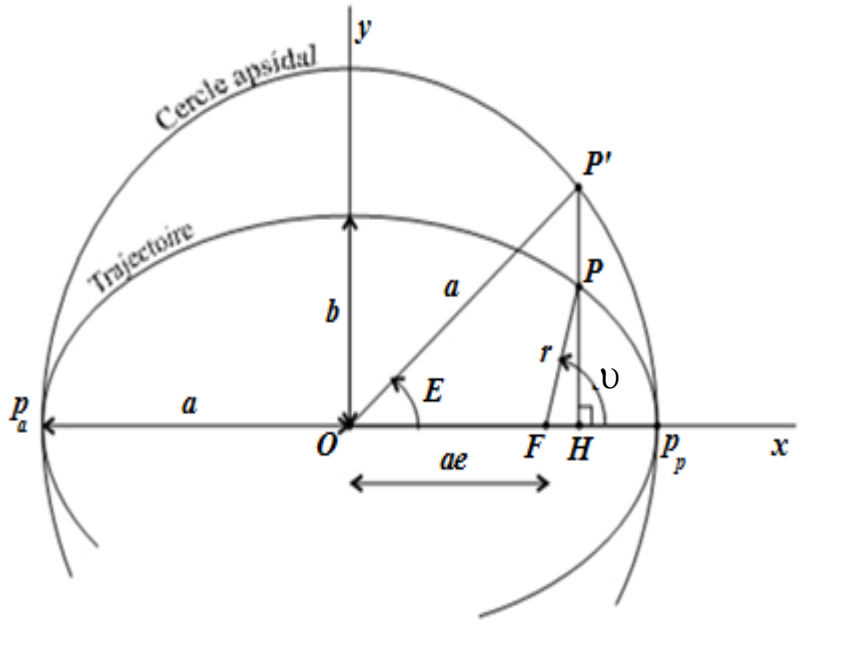


$$V = 7.92$$

$$E = 3.33$$

$$M = 1$$

$$e = 0.7$$



$$\begin{cases} x = r \cos v = a \cos E - ae \\ y = r \sin v = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

Equation de Kepler dans le cas d'un mouvement elliptique:

$$\text{Aire balayée} = \text{Aire}(FP_pP) = \text{Aire}(OP_pP) - \text{Aire}(OFP) = ab\pi \frac{E}{2\pi} - \frac{\vec{OP} \wedge \vec{OF}}{2} = \frac{1}{2}C(t - t_p)$$

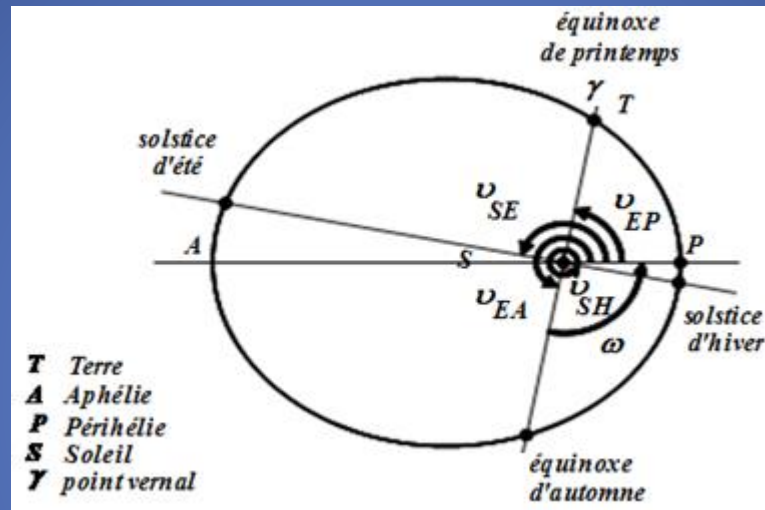
$$\text{Aire}_{\text{ellipse}} = \frac{1}{2}CT = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \pi C \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

$$\frac{\text{Aire balayée}}{\text{Aire}_{\text{ellipse}}} = \frac{\frac{1}{2}a^2 \sqrt{1 - e^2} (E - e \sin E)}{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}} = \frac{\frac{1}{2}C(t - t_p)}{\frac{1}{2}CT}$$

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{T} (t - t_p) = \frac{360^\circ}{T} (t - t_p) = n(t - t_p) = M$$

1^{ère} Application : Positions des équinoxes et des solstices. Durée des saisons

Pour la terre tout est simple, à l'équinoxe, le soleil est au point γ et l'on connaît la position du périhélie



Equinoxe du printemps	$v_{EP} = 180^\circ - \omega$
Solstice d'été	$v_{SE} = v_{EP} + 90^\circ$
Equinoxe d'automne	$v_{EA} = v_{SE} + 90^\circ$
Solstice d'hiver	$v_{SH} = v_{EA} + \omega$

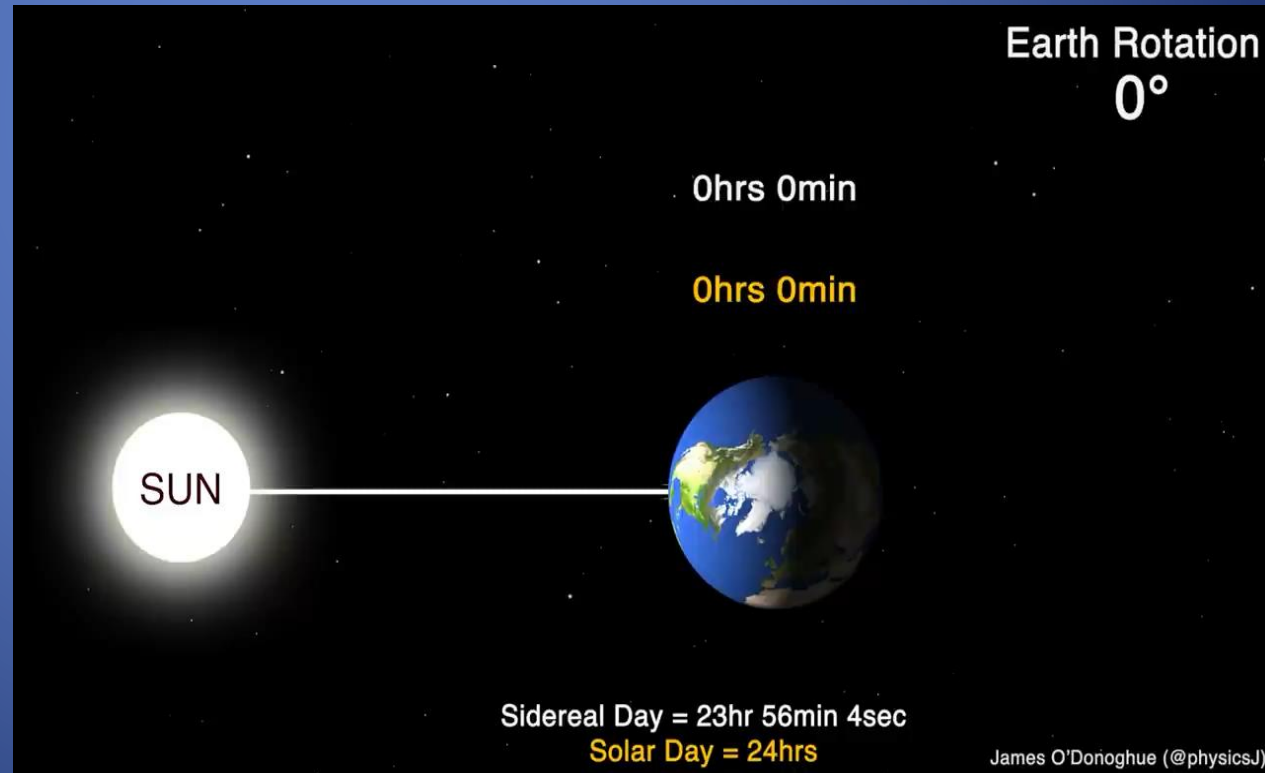
Pour chaque position, à partir de $v_{EP}, v_{SE}, v_{EA}, v_{SH}$ on calcule E, M et les temps $t_{EP}, t_{SE}, t_{EA}, t_{SH}$ qui sont les temps de passage aux quatre positions remarquables.

La durée des saisons se fait par différences. Si celle-ci est négative, on ajoute 365,25 j pour rendre la valeur positive.

2^{ème} Application :

Temps solaire vrai	Temps indiqué par un cadran solaire
Temps solaire moyen	Temps solaire vrai corrigé avec l'équation du temps pour tenir compte du fait que le jour solaire n'est pas constant
Temps universel UT	Temps solaire moyen tenant compte de la correction due à la longitude (4 minutes par degré de longitude)
Temps légal	Temps universel prenant en compte le décalage dû aux heures d'hiver (+1 h) ou d'été (2h)

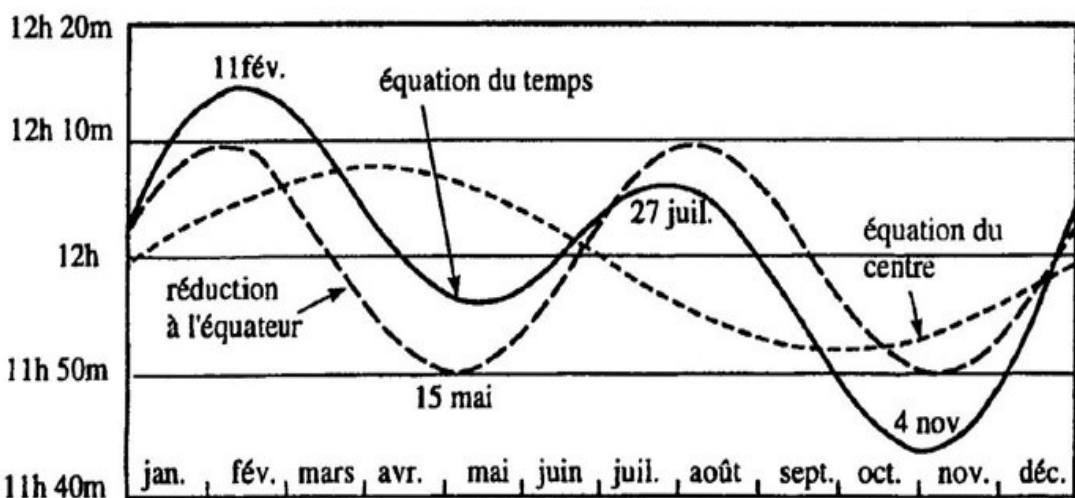
En astronomie, on s'intéresse à la durée de rotation de la terre relativement aux étoiles fixes et non pas au soleil. Il est mesuré en jours sidéraux, qui séparent deux passages consécutifs d'une même étoile au même méridien. Un jour sidéral est à peu près 4 minutes (3mn 56s) plus court qu'un jour solaire, à cause de 1° de rotation terrestre supplémentaire dans le jour solaire. La terre orbite autour du soleil et au cours d'une journée, elle parcourt 1° ($360^\circ/365,25 \approx 1^\circ/\text{jour}$). Donc en 24h la direction face au soleil change d'environ 1° . La terre doit effectuer $361^\circ/24\text{h}$ pour que le soleil semble avoir parcouru 360° dans le ciel.



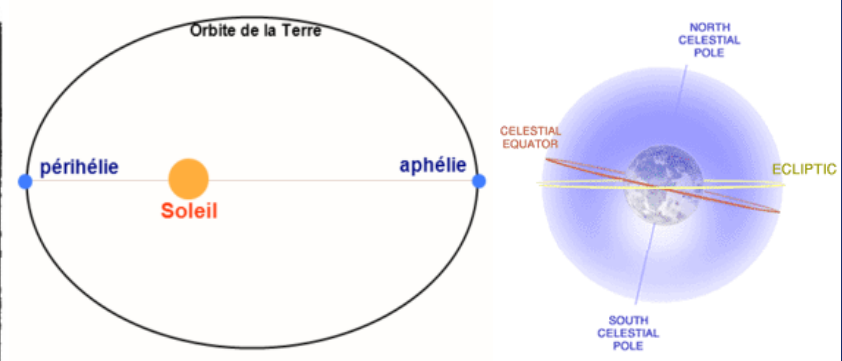
2^{ème} Application : Equation du temps



$$E(t) = TSM - TSV$$



Équation du Temps = équation du centre + réduction à l'équateur

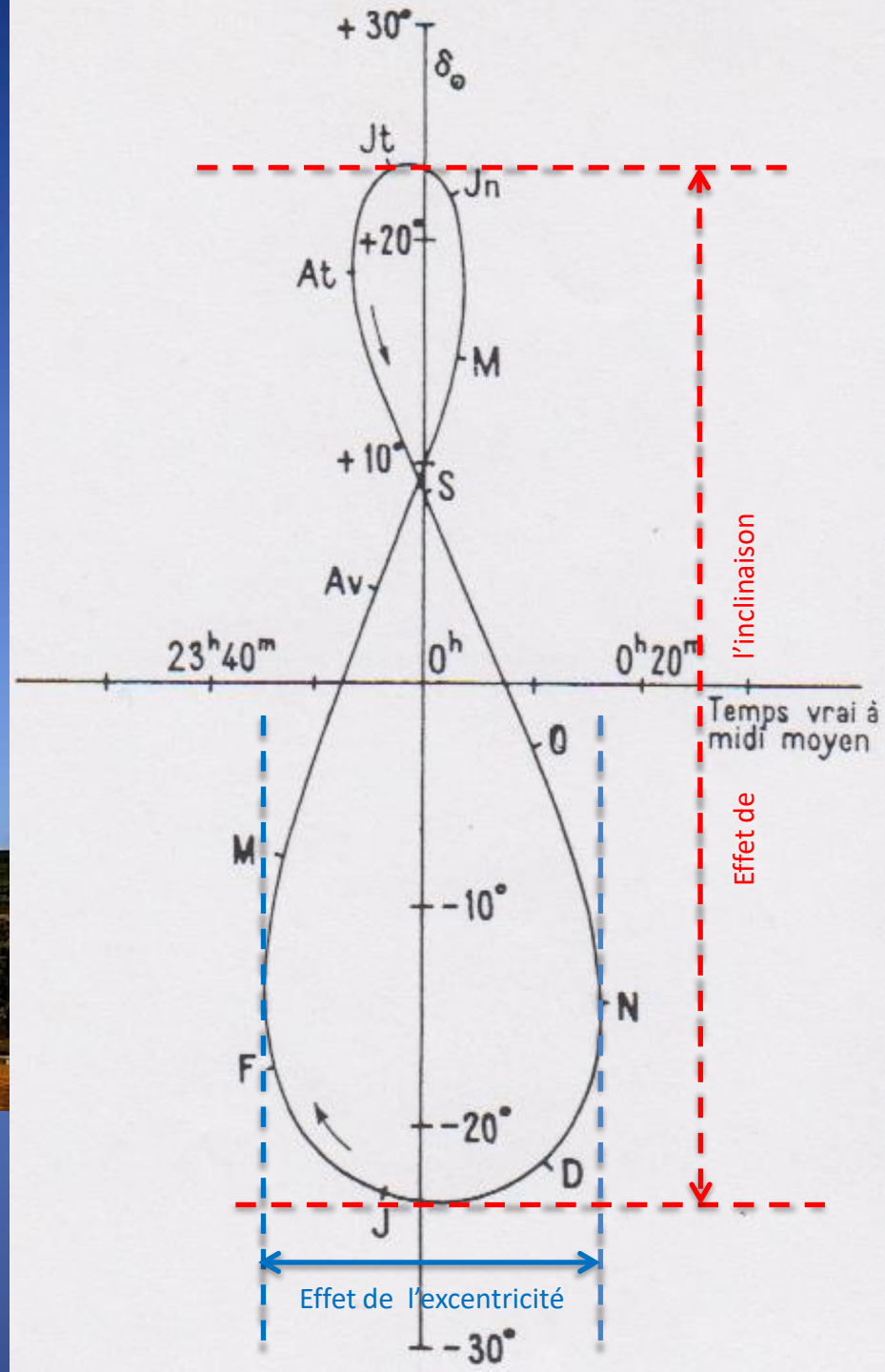


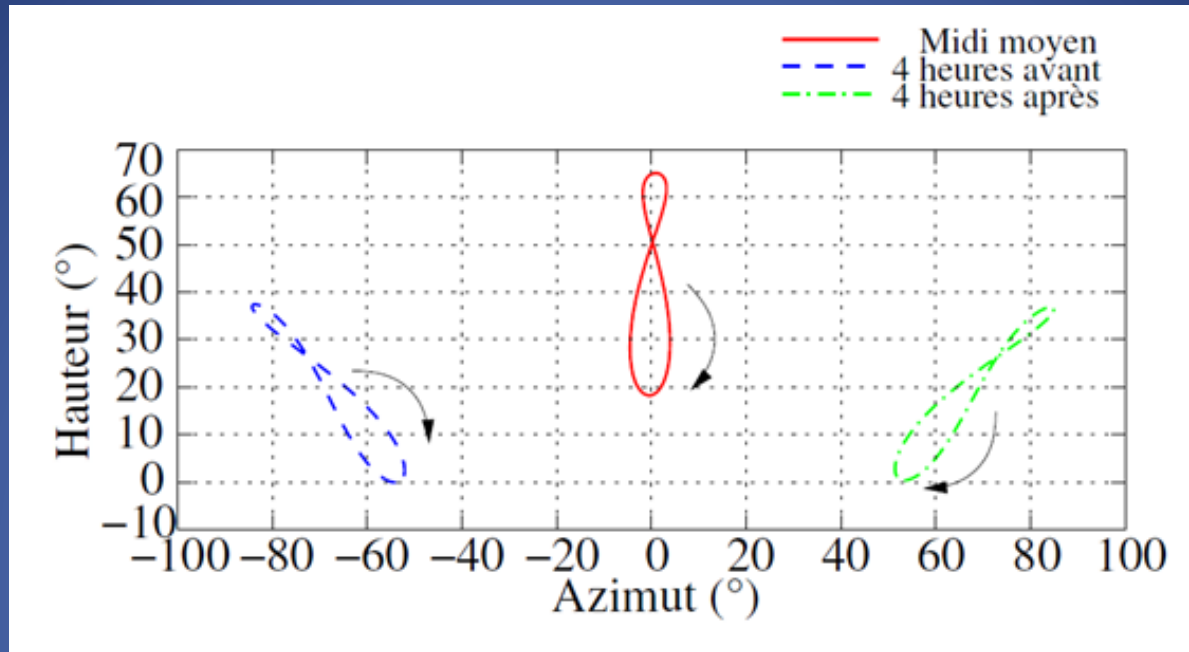
L'équation du temps est la combinaison de deux effets:

- Ellipticité de l'orbite terrestre (équation du centre)
- Inclinaison de l'axe de rotation de la Terre sur le plan de l'orbite (réduction à l'équateur)



Concrétisation de l'équation du temps dans le ciel. La courbe en huit (droite) montre l'effet de l'équation du temps. Des images du Soleil superposés prises le matin à la même heure (gauche). Analemme photographié par Anthony Ayiomamitis à Athènes, du 7 janvier au 20 décembre 2003.





Il est aussi possible de construire des analogues de l'analemme pour différents temps dans la journée. Son orientation dépend de l'heure locale à laquelle on la réalise, le matin elle est penchée vers la gauche, vers midi elle est complètement droite et elle penche vers la droite l'après-midi

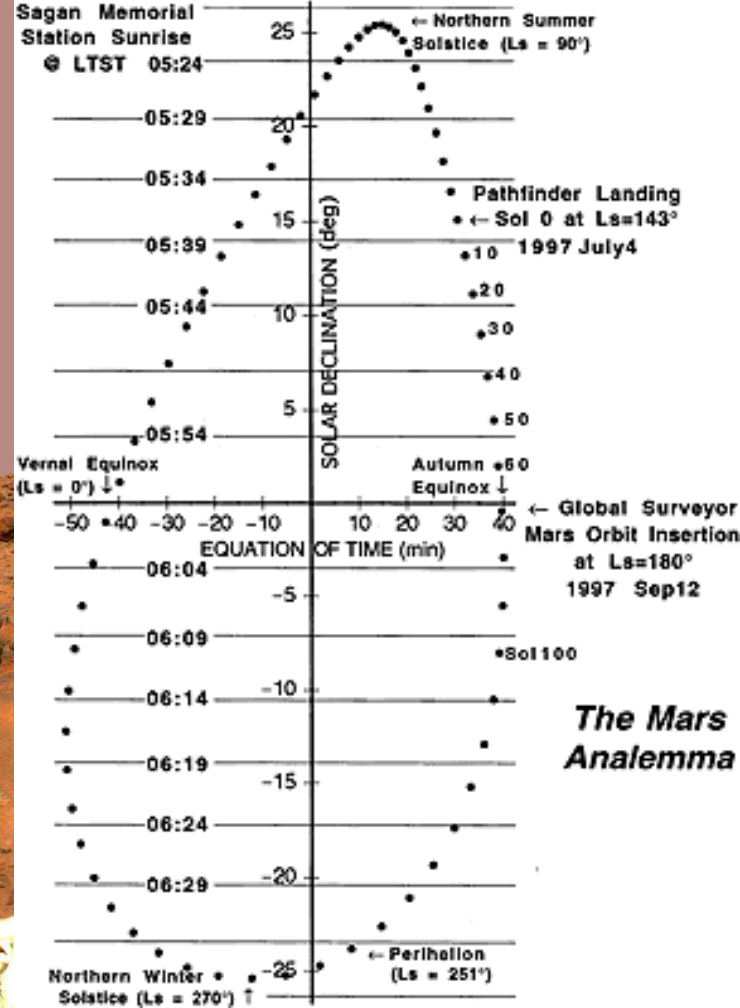
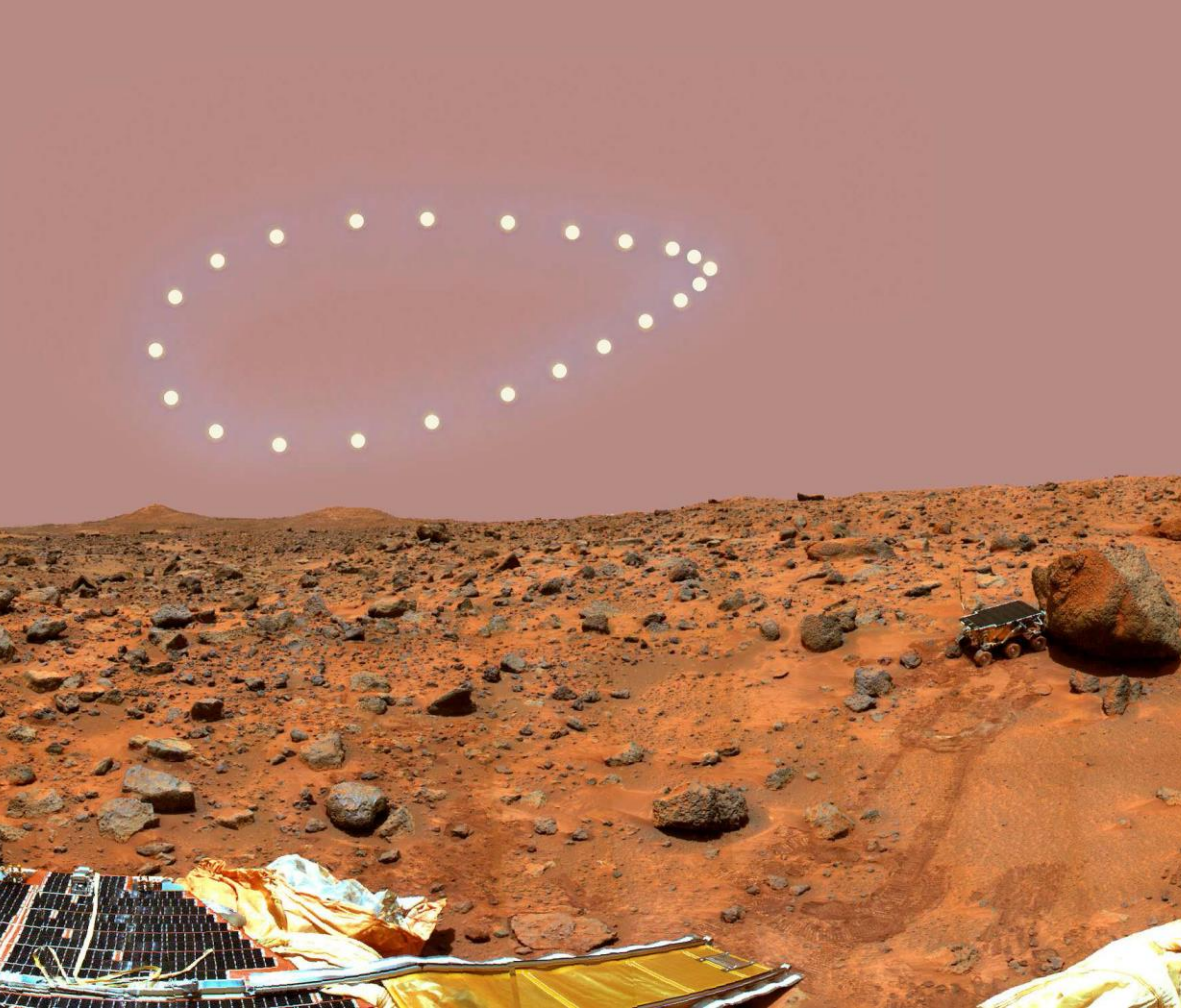
Les variations à très long terme - induites par la précession et autres mouvements connus de très longue période affectant la rotation de la Terre - sont susceptibles de faire changer la forme de l'analemme.

Le Soleil revient-il tous les jours au même endroit dans le ciel ? Non.

Une réponse meilleure et plus visuelle à cette question est un analemme, une image composite prise du même endroit au même moment au cours d'une année. L'analemme hebdomadaire présenté a été pris malgré des températures froides et des vents violents près de la station Concordia en Antarctique.

La position du Soleil à 16 heures a été capturée sur plusieurs jours dans l'image composite numérique, considérée comme le premier analemme construit à partir de l'Antarctique. La raison pour laquelle l'image ne montre le Soleil que de septembre à mars est que le Soleil était sous l'horizon pendant une grande partie du reste de l'année. En fait, à l'équinoxe, le Soleil se lève au pôle Sud après une absence de six mois et ne se couche pas avant l'équinoxe suivant en mars. Inversement, le Soleil se couche au pôle Nord après six mois de lumière du jour continue.





Analemmes sur Mars, observé par la sonde Mars Pathfinder.

Sources : image de V. Rumyantsev, Crimean Astronomical Observatory. Mars : 30 décembre 2006.

Sur Mars il faut prendre une photo tous les jours pendant presque deux ans pour obtenir cet analemme du soleil en forme de poire ou de goutte d'eau : Mars possède une inclinaison de son axe et une période de rotation similaires à celles de la Terre et connaît donc quatre saisons et une durée du jour similaire. Son année en revanche est presque deux fois plus longue que celle de la Terre et son excentricité est considérablement plus grande : la durée des différentes saisons martiennes est donc complètement différente et le temps solaire apparent est plus susceptible de diverger du temps solaire moyen que sur Terre.

Depuis Neptune, Uranus et Saturne, les analemmes sont aussi des figures de 8 comme sur la Terre, une des boucles de celle de Saturne étant tellement petite qu'elle ressemble plus à une goutte d'eau.

Sur Jupiter on obtient une ellipse toute simple, de même que sur Vénus.

Application : 2- Equation du temps (Suite)

Equation de Kepler reliant l'anomalie excentrique E et l'anomalie moyenne M : $E = M + e \sin E$

Correction du à l'excentricité

La correction due à l'excentricité (souvent notée C) est donc :

$$C = v - M = \left(2e - \frac{e^3}{4}\right) \sin M + \left(\frac{5}{4}\right) e^2 \sin 2M + \left(\frac{13}{12}\right) e^3 \sin 3M$$

Soit encore, en remplaçant l'excentricité par sa valeur ($e = 0.01671$), on trouve des coefficients en radian que l'on convertit en degré en multipliant par

$$C = v - M = 1.9148 \sin M + 0.020 \sin 2M + 0.0003 \sin 3M$$

$$\text{Avec : } M(t) = n(t - t_p)$$

Correction du à l'obliquité

La correction due à l'inclinaison est aussi appelé réduction à l'équateur. Elle exprime le décalage entre la longitude écliptique du Soleil et son ascension droite. Son intensité dépend de l'écart du soleil au point vernal. Il est également possible – en utilisant les développements limités des fonctions trigonométriques – d'obtenir une relation exprimant l'amplitude R de cette correction, en fonction de la longitude écliptique du soleil $l = u + \omega$ et l'obliquité ε .

L'expression obtenue est:

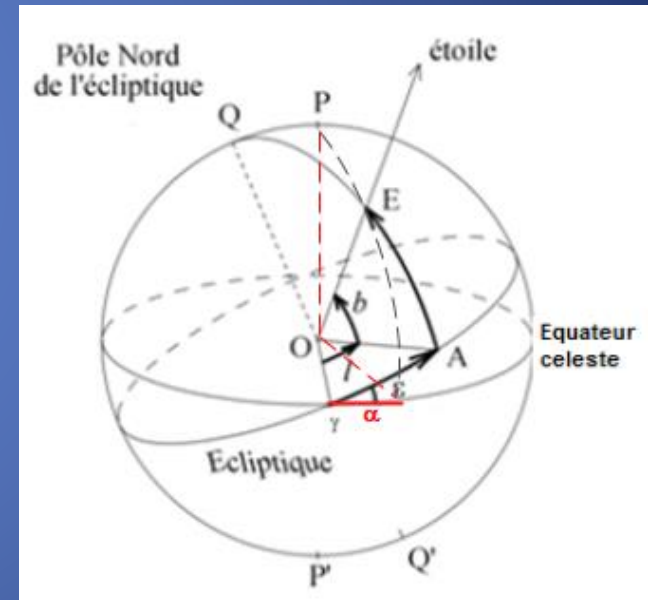
$$R = -tg^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2l + \left(\frac{1}{2}\right) tg^4 \frac{\varepsilon}{2} \sin 4l - \left(\frac{1}{3}\right) tg^6 \frac{\varepsilon}{2} \sin 6l$$

En tenant compte du fait que $\varepsilon = 23^\circ 27'$, il vient :

$$\text{Finalement on obtient: } R = -2.4680 \sin 2l + 0.0530 \sin 4l - 0.0014 \sin 6l$$

$$\text{Equation du temps} = C + R$$

où C et R sont exprimées en degré



•Mouvement perturbé

En vertu de la loi de Newton, chaque planète (i) subit de la part du soleil et des 7 autres planètes une force d'attraction de la forme :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{Keplerienne} + \vec{F}_{Perturbatrices} = \vec{F}_{i\odot} + \vec{F}_{ij} = GM_{\odot}m_i \frac{\vec{r}_{i\odot}}{r_{i\odot}^3} + Gm_i \sum_{j=1}^7 m_j \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3}$$

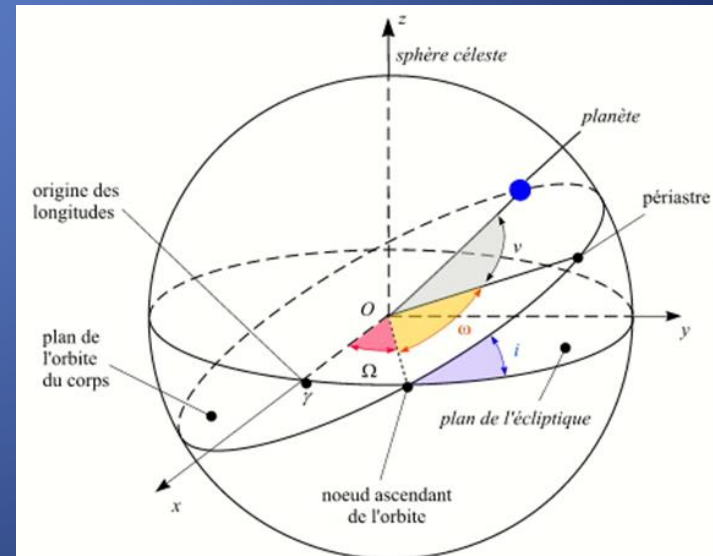
- Où m_i masse de la planète i, M_{\odot} masse du soleil, $r_{i\odot}$ la distance entre la planète i et le soleil et r_{ij} la distance entre les planètes i et j.
- Dans ces conditions le problème est séparé en 7 problèmes de 2 corps obéissant aux lois de Kepler. L'équation du mouvement elliptique s'écrit :

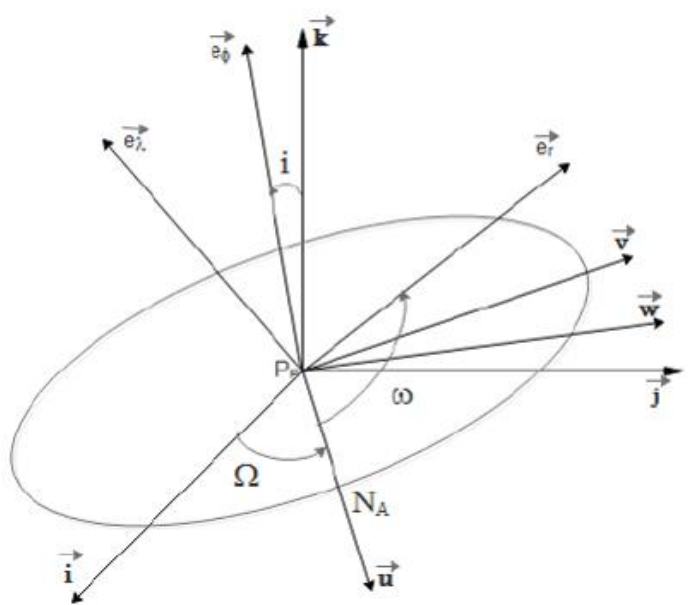
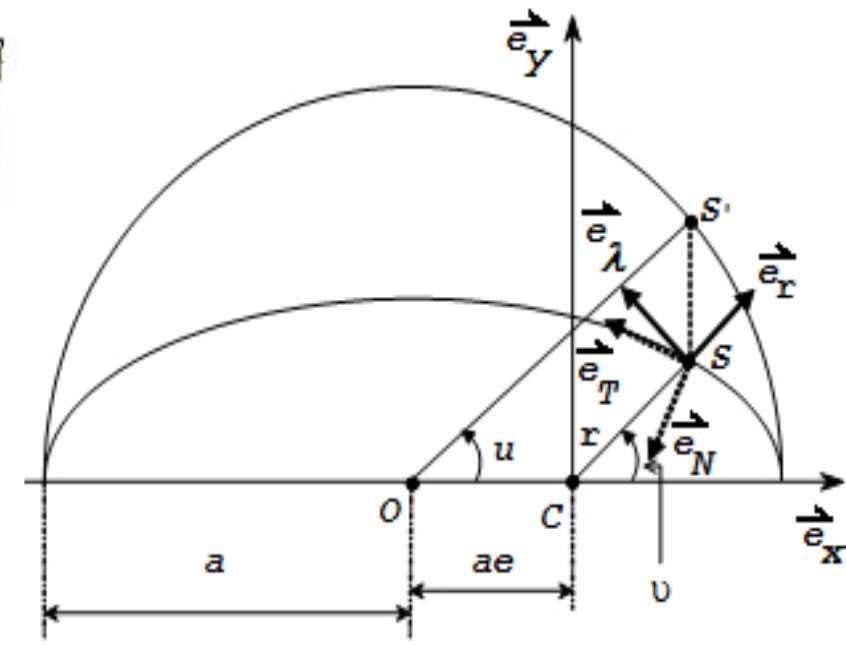
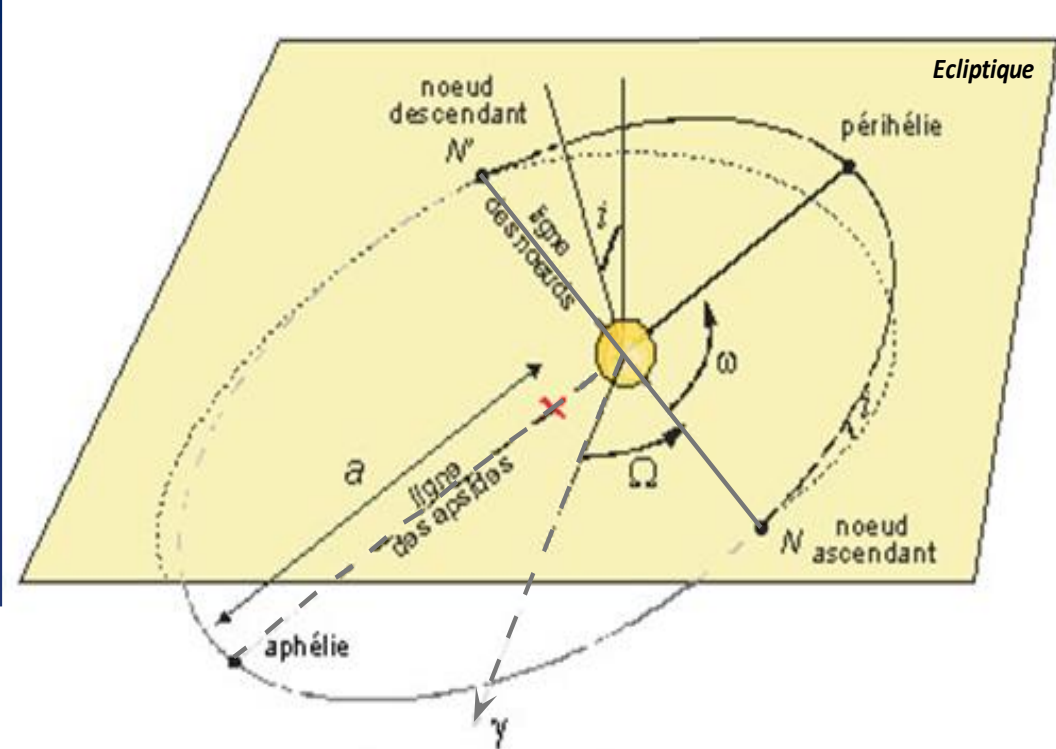
$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{\gamma}_{Keplerien} = -GM_{\odot} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

- Dans le cas de la planète terre, en plus de l'action des autres planètes il faut tenir compte de celle de la lune. Dans ce qui suit, on va étudier uniquement le cas d'une seule force perturbatrice. L'ajout d'accélération supplémentaire génère des perturbations de l'orbite elliptique et l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{\gamma}_{Keplerien} + \vec{\gamma}_{Perturbation} = -GM_{\odot} \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{F}_{Perturbatrice}$$

- Les éléments képlériens (a, e, i, ω, Ω et $n = \frac{dM}{dt}$) deviennent dépendants du temps sous la forme des équations de Gauss. On les appelle alors éléments osculateurs.

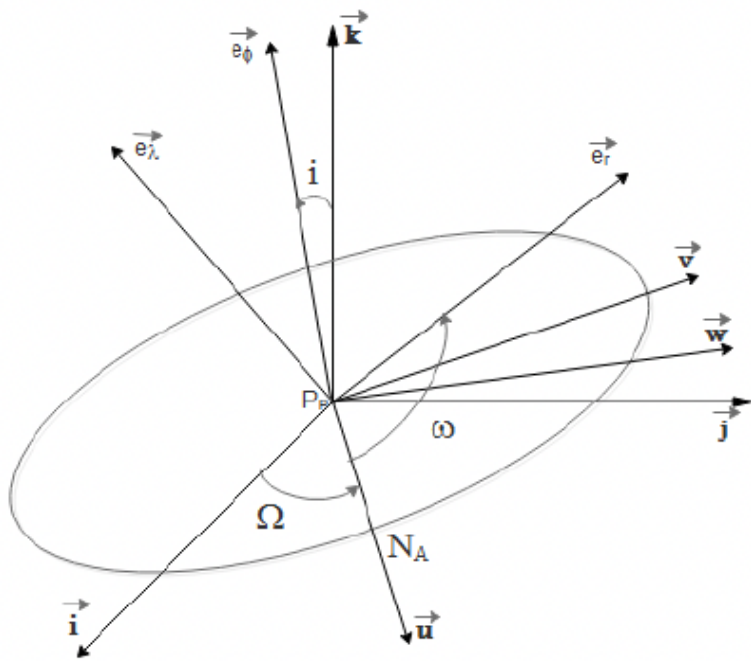




$$\vec{F} = R\vec{e}_r + S\vec{e}_\lambda + W\vec{e}_\phi$$

$$\vec{F} = T\vec{e}_T + N\vec{e}_N + W\vec{e}_\phi$$

- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \rightarrow$ rotation Ω \rightarrow $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$
autour de \vec{k}
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}) \rightarrow$ rotation i \rightarrow $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{e}_\phi)$
autour de \vec{u}
- $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{e}_\phi) \rightarrow$ rotation ω \rightarrow $(\vec{e}_r, \vec{e}_\lambda, \vec{e}_\phi)$
autour de \vec{e}_ϕ



$$\begin{aligned}
 (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) &\rightarrow \text{rotation } \Omega \rightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}) \\
 &\quad \text{autour de } \vec{k} \\
 (\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}) &\rightarrow \text{rotation } i \rightarrow (\vec{u}, \vec{w}, \vec{e}_\phi) \\
 &\quad \text{autour de } \vec{u} \\
 (\vec{u}, \vec{w}, \vec{e}_\phi) &\rightarrow \text{rotation } \omega \rightarrow (\vec{e}_r, \vec{e}_\lambda, \vec{e}_\phi) \\
 &\quad \text{autour de } \vec{e}_\phi
 \end{aligned}$$

On peut représenter chaque rotation par une matrice de rotation, et obtenir la matrice de passage comme produit des trois matrices de rotation, qui ne dépendent chacune que d'un angle :

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega + \nu) & -\sin(\omega + \nu) & 0 \\ \sin(\omega + \nu) & \cos(\omega + \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\quad \vec{e}_r \qquad \qquad \qquad \vec{e}_\lambda \qquad \qquad \qquad \vec{e}_\phi \\
 = &\begin{pmatrix} \cos(\omega + \nu)\cos \Omega - \sin(\omega + \nu)\sin \Omega \cos i & -\cos(\omega + \nu)\sin \Omega - \sin(\omega + \nu)\cos \Omega \cos i & \sin i \sin \Omega \\ \cos(\omega + \nu)\sin \Omega + \sin(\omega + \nu)\cos \Omega \cos i & -\sin(\omega + \nu)\sin \Omega + \cos(\omega + \nu)\cos \Omega \cos i & -\sin i \cos \Omega \\ \sin(\omega + \nu)\sin i & \cos(\omega + \nu)\sin i & \cos i \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}
 \end{aligned}$$

Equations de Gauss

Dans le repère $(\vec{e}_T, \vec{e}_N, \vec{e}_\varphi)$:

$$\vec{F} = T\vec{e}_T + N\vec{e}_N + W\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}\eta} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v} T$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{\eta^2}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}} \frac{\sin v}{1 + e \cos v} N + \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{2(e + \cos v)}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}} T$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 + e \cos v)} \cos(\omega + v) W$$

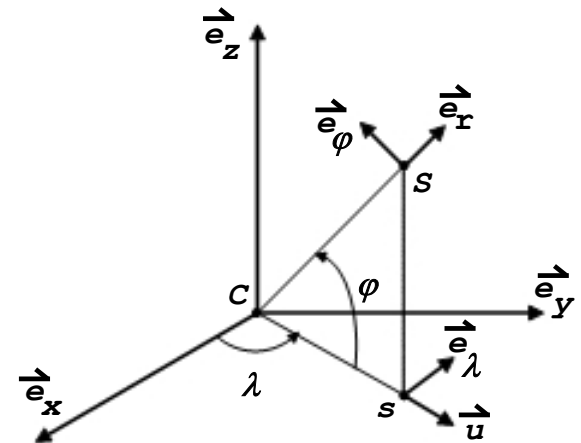
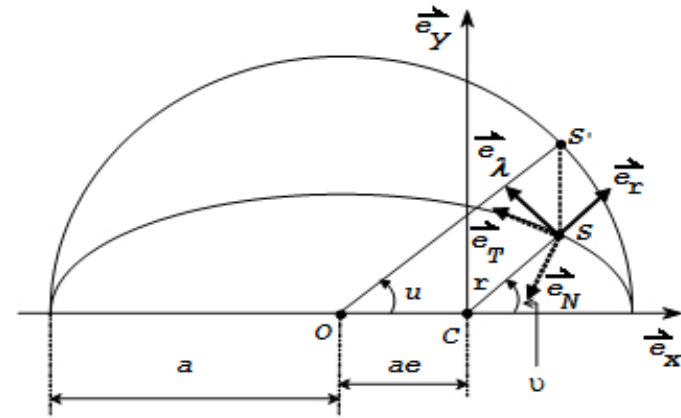
$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 + e \cos v)} \sin(\omega + v) W$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \frac{1}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}} \frac{2e + \cos v + e^2 \cos v}{1 + e \cos v} T + \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \frac{1}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}} 2 \sin v N$$

$$-\frac{\eta \cos i}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}(1 + e \cos v) \sin i} \sin(\omega + v) W$$

$$\frac{dM}{dt} - \bar{n} = -\frac{\eta^2}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \frac{1}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}} \frac{\eta^2 \cos v}{1 + e \cos v} T$$

$$-\frac{\eta^2}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}e} \frac{1}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos v}} 2 \sin v \left(1 + \frac{e^2}{1 + e \cos v} \right) N$$



Equations de Gauss

Dans le repère $(\vec{e}_r, \vec{e}_\lambda, \vec{e}_\varphi)$:

$$\vec{F} = R\vec{e}_r + S\vec{e}_\lambda + W\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{2ea \sin v}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta} R + \frac{2a(1 + e \cos v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} \eta} S$$

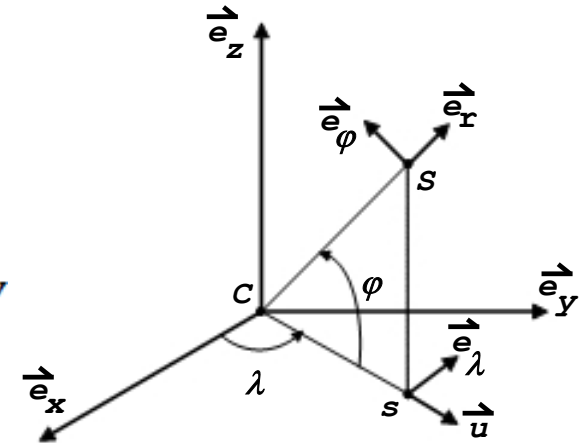
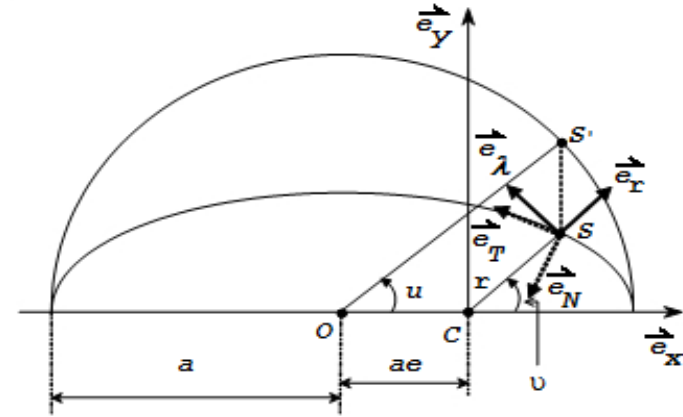
$$\frac{de}{dt} = \frac{\eta \sin v}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} R + \frac{\eta}{\sqrt{\frac{\mu}{a}}} \frac{e + 2 \cos v + e \cos^2 v}{1 + e \cos v} S$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\eta \cos(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} (1 + e \cos v)} W$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\eta \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} (1 + e \cos v) \sin i} W$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\eta \cos v}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} e} R + \frac{\eta \sin v}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} e} \left(1 + \frac{1}{1 + e \cos v}\right) S - \frac{\eta \cos i \sin(\omega + v)}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} (1 + e \cos v) \sin i} W$$

$$\frac{dM}{dt} - \bar{n} = \frac{\eta^2}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} e} \left(\frac{-2e}{1 + e \cos v} + \cos v\right) R - \frac{\eta^2 \sin v}{\sqrt{\frac{\mu}{a}} e} \left(1 + \frac{1}{1 + e \cos v}\right) S$$



**Merci pour
votre attention**