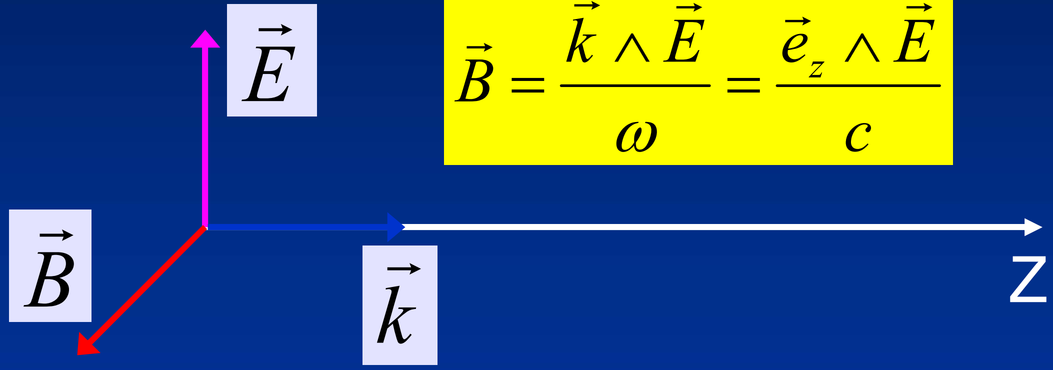
CHAPITRE IV

La polarisation de la lumière

I - Introduction

La lumière est une Onde Electromagnétique (onde transverse)

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{e}_z \wedge \vec{E}}{c}$$



$$(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}) \ \ est\ un\ trièdre\ direct$$

$$\vec{E} \perp \vec{B} \ \ à \ \ tout\ instant$$

Comme toute onde transverse, la lumière peut présenter différents états de polarisation

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{0x}\cos(\omega t - k z - \varphi_x) \\ E_{0y}\cos(\omega t - k z - \varphi_y) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Onde qui se propage suivant l'axe Z'Z

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{0x}\cos(\omega t - k z) \\ E_{0y}\cos(\omega t - k z - \varphi) \\ 0 \end{vmatrix} \qquad avec : \varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

Si on choisi φ_x comme origine des phases

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_{0x} e^{i(\omega t - k z)} \\ E_{0y} e^{i(\omega t - k z - \varphi)} \\ 0 \end{vmatrix}$$

En représentation complexe

II. Les différents états de polarisation

Dans une lumière naturelle (soleil, bougie, lampe, etc.) $\vec{E}$ peut prendre aléatoirement toutes les directions du plan $\perp$ $à$ $\vec{k}$ (lumière non polarisée)

Si $\vec{E}$ prend une direction bien définie en fonction du temps, alors la lumière est dite polarisée.

1. Polarisation rectiligne

Si $\vec{E}$ garde une direction fixe dans le temps, alors la lumière est dite polarisée rectiligne.

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\,\vec{u}$$

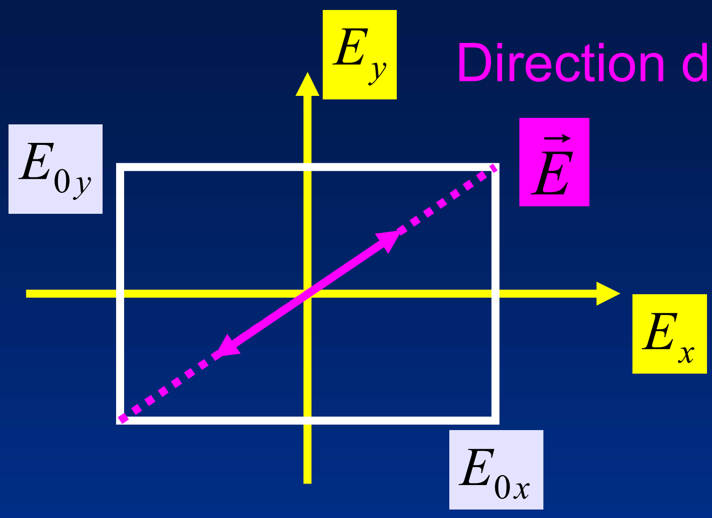
$$\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$$

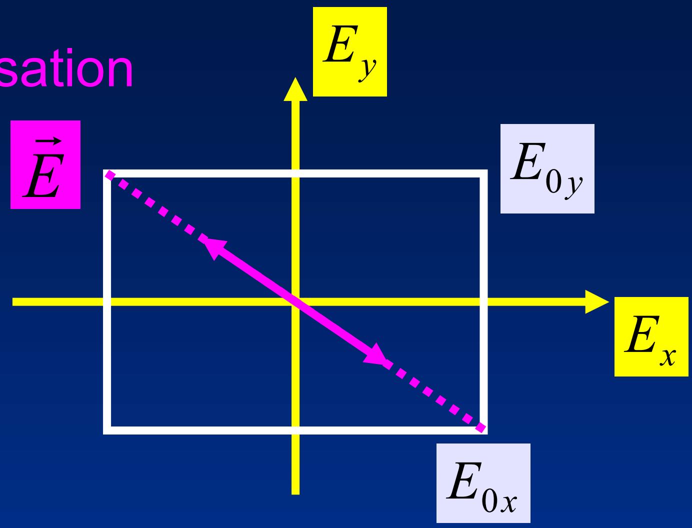
$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0 \cos\alpha \cos(\omega t - kz)\,\vec{i} + E_0 \sin\alpha \cos(\omega t - kz)\,\vec{j} \\ &= \pm E_{0x} \cos(\omega t - kz)\vec{i} \pm E_{0y} \cos(\omega t - kz)\vec{j} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j}\end{aligned}$$

$$E_{0x} = E_0 \left|\cos\alpha\right|$$

$$E_{0y} = E_0 \left|\sin\alpha\right|$$

Direction de polarisation





$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \frac{E_y}{E_{0y}} \Rightarrow E_y = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x$$

$\varphi = 0$

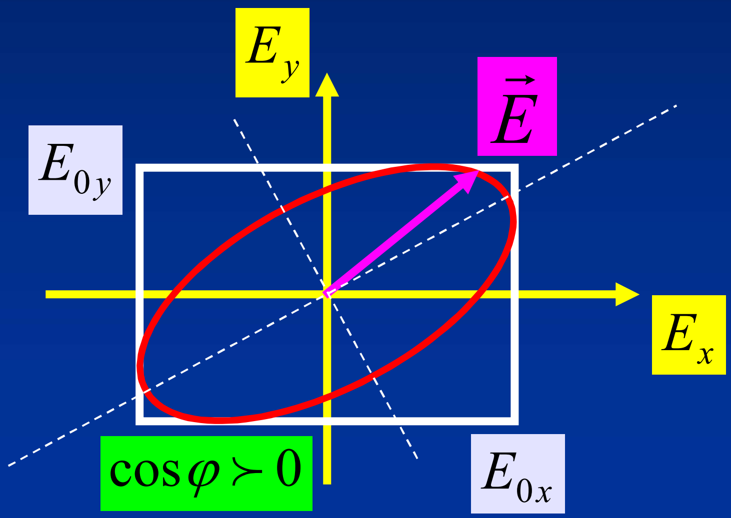
$$\frac{E_x}{E_{0x}} = -\frac{E_y}{E_{0y}} \Rightarrow E_y = -\frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x$$

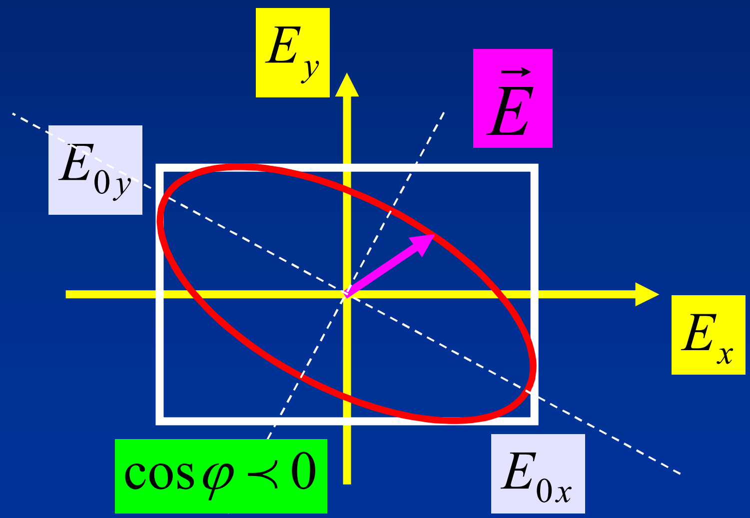
$\varphi = \pi$

$$\vec{E} = \left| \begin{array}{l} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - k z) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - k z - \varphi) \\ E_z = 0 \end{array} \right. \qquad avec : \varphi = 0 \quad ou \quad \varphi = \pi$$

2. Polarisation elliptique

Si $\vec{E}$ tourne dans le temps et son extrémité décrit une ellipse alors la lumière est dite polarisée elliptique.





$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - k z) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - k z - \varphi) \\ E_z = 0 \end{vmatrix} \qquad avec : \varphi \neq 0 \quad et \quad \varphi \neq \pi$$

$$\begin{cases} \dfrac{E_x}{E_{0x}} = \cos(\omega t - k z) \\ \dfrac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\omega t - k z - \varphi) = \cos(\omega t - k z)\cos\varphi + \sin(\omega t - k z)\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{E_x}{E_{0x}} = \cos(\omega t - k z) & \textbf{(1)} \\ \dfrac{E_y}{E_{0y}\sin\varphi} - \dfrac{E_x}{E_{0x}} ctg\varphi = \sin(\omega t - k z) & \textbf{(2)} \end{cases}$$

(1)² + (2)²

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}\sin\varphi}\right)^2 - 2\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}} + \left(\frac{E_x}{E_{0x}} ctg\varphi\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{0y}\sin\varphi}\right)^2-2\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}+\left(\frac{E_x}{E_{0x}}ctg\varphi\right)^2=1$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\left(1+ctg^2\varphi\right)+\left(\frac{E_y}{E_{0y}\sin\varphi}\right)^2-2\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}=1$$

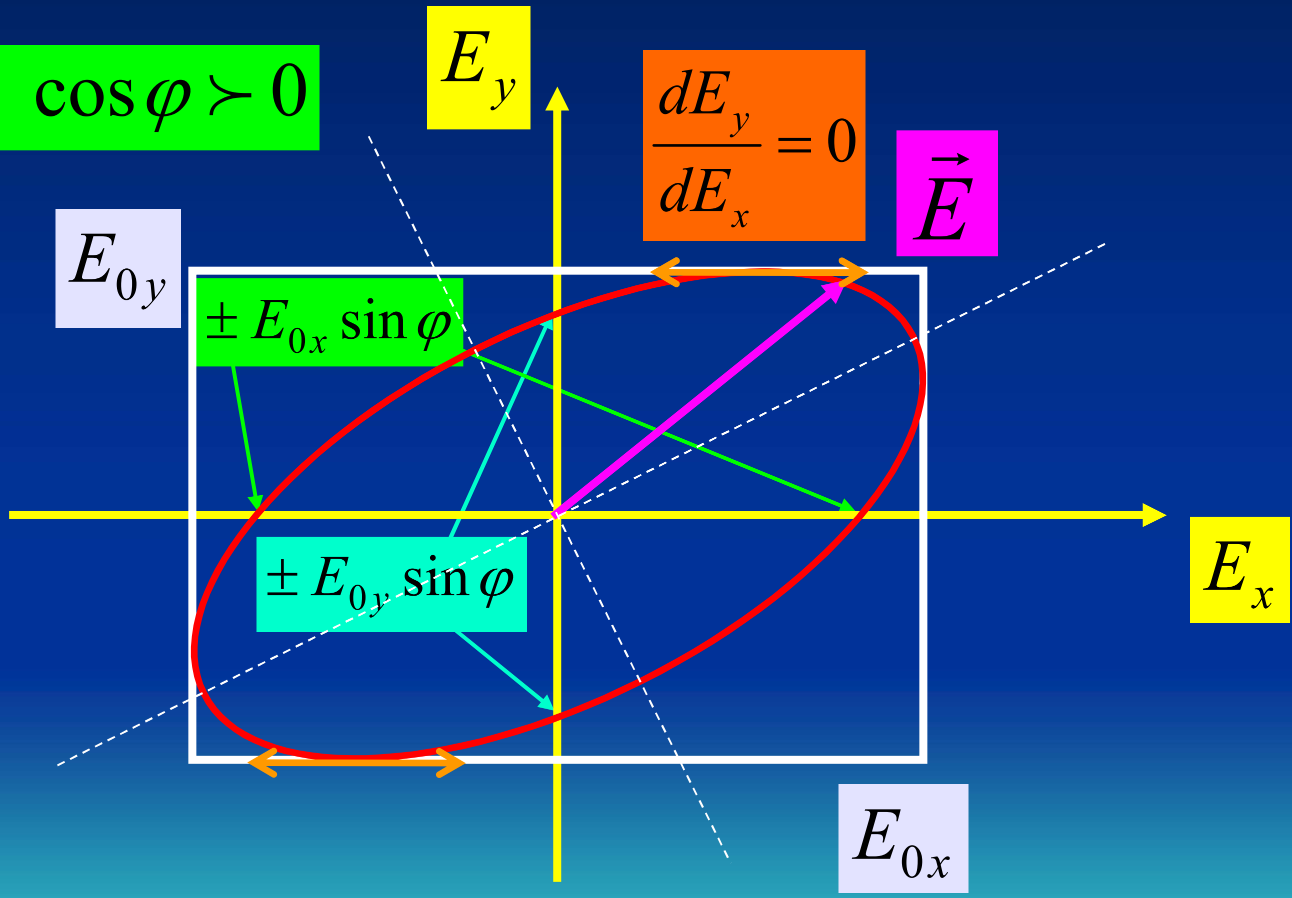
$$\Leftrightarrow\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}\right)+\left(\frac{E_y}{E_{0y}\sin\varphi}\right)^2-2\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}=1$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2-2\cos\varphi\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}=\sin^2\varphi$$

Équation d'une ellipse inscrite dans un rectangle de dimensions **$2E_{0x}$*$2E_{0y}$**

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2-2\cos\varphi\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}=\sin^2\varphi$$

$Cas\ \ \cos\varphi \succ 0$



$$2\left(\frac{E_x}{(E_{0x})^2}\right)dE_x + 2\left(\frac{E_y}{(E_{0y})^2}\right)dE_y - 2\cos\varphi \frac{dE_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}} - 2\cos\varphi \frac{E_x}{E_{0x}}\frac{dE_y}{E_{0y}} = 0$$

$$\left(\frac{E_x}{(E_{0x})^2}\right) + \left(\frac{E_y}{(E_{0y})^2}\right)\frac{dE_y}{dE_x} - \cos\varphi \frac{1}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}} - \cos\varphi \frac{E_x}{E_{0x}E_{0y}}\frac{dE_y}{dE_x} = 0$$

$$\left[\left(\frac{E_y}{(E_{0y})^2}\right) - \cos\varphi \frac{E_x}{E_{0x}E_{0y}}\right]\frac{dE_y}{dE_x} + \left(\frac{E_x}{(E_{0x})^2}\right) - \cos\varphi \frac{1}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}} = 0$$

$$\frac{dE_y}{dE_x} = 0 \Leftrightarrow \frac{E_x}{(E_{0x})^2} - \cos\varphi \frac{1}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}} = 0 \Leftrightarrow \frac{E_x}{E_{0x}} - \cos\varphi \frac{E_y}{E_{0y}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\varphi \succ 0 \; et \; (E_x \;\; et \;\; E_y) \;\; de \;\; même \; signe \\ ou \;\; \cos\varphi \prec 0 \; et \; (E_x \;\; et \;\; E_y) \;\; de \; signes \; opposés \end{cases}$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2-2\cos\varphi\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}=\sin^2\varphi$$

Pour $\varphi = 0$ $$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2-2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}=0\Leftrightarrow\frac{E_x}{E_{0x}}-\frac{E_y}{E_{0y}}=0$$

Pour $\varphi = \pi$ $$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2+2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}=0\Leftrightarrow\frac{E_x}{E_{0x}}+\frac{E_y}{E_{0y}}=0$$

On retrouve les deux cas particuliers de polarisation rectiligne

$$Pour\quad \varphi=\pm\frac{\pi}{2}$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2=1$$

Ellipse droite

La polarisation elliptique peut être gauche ou droite selon le sens de parcours de l'ellipse

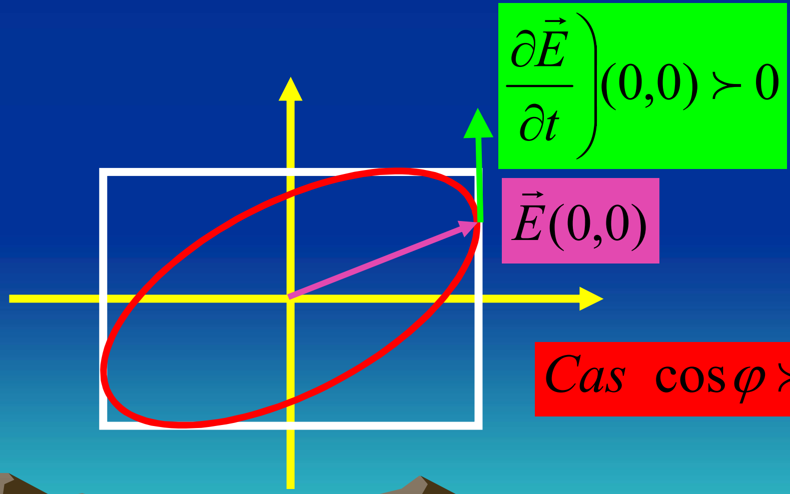
$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - k z) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - k z - \varphi) \end{vmatrix} \longrightarrow \vec{E}(0,0) = \begin{vmatrix} E_{0x} \\ E_{0y}\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)(0,0) = \begin{vmatrix} -E_{0x}\omega\sin(\omega t - k z) = 0 \\ -E_{0y}\omega\sin(\omega t - k z - \varphi) = E_{0y}\omega\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$Si \quad \sin\varphi \succ 0 \Leftrightarrow \varphi \in \left]0, \pi\right[$$

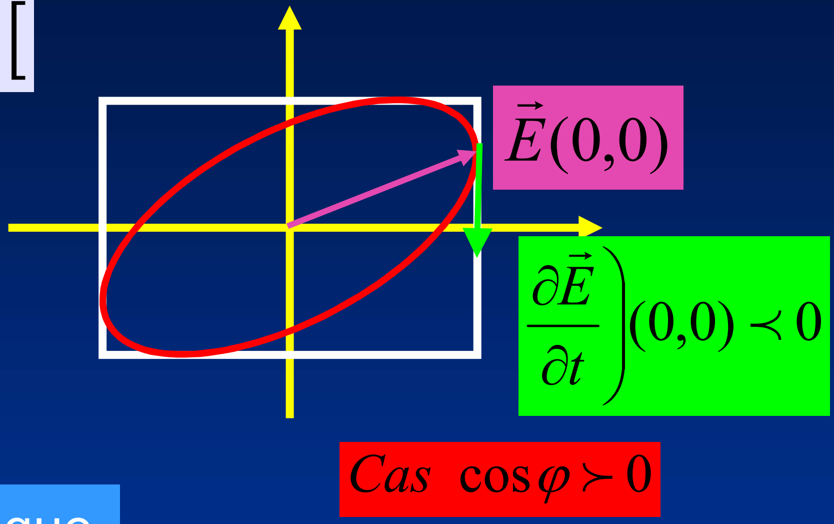
Le champ tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre

Polarisation elliptique gauche



$Cas \quad \cos\varphi \succ 0$

$$Si\ \ \sin\varphi \prec 0 \Leftrightarrow \varphi \in \left]\pi, 2\pi\right[$$



Le champ tourne dans le sens des aiguilles d'une montre

Polarisation elliptique droite

3. Polarisation circulaire

Si $\vec{E}$ tourne dans le temps et son extrémité décrit un cercle alors la lumière est dite polarisée circulaire.

C'est le cas particulier d'une ellipse droite avec : $E_{0x} = E_{0y}$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2-2\cos\varphi\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}=\sin^2\varphi$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2=1$$

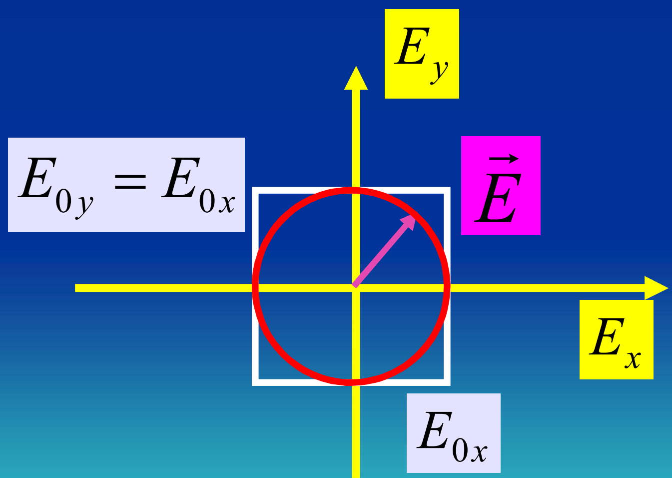
$$Pour\quad \varphi=\frac{\pi}{2}\quad ou\quad \varphi=\frac{3\pi}{2}$$

Ellipse droite

$$E_x^{\,2}+E_y^{\,2}=E_{0x}^{\,2}=R^2$$

$$Si\quad E_{0x}=E_{0y}=R$$

Cercle de rayon R



$$\varphi=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow \sin\varphi\succ 0$$

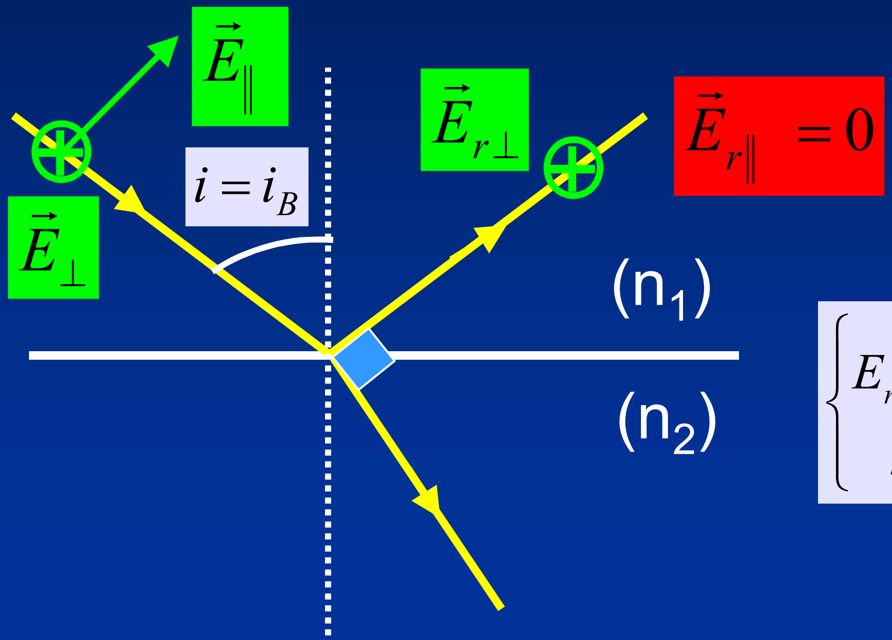
Polarisation Circulaire gauche

$$\varphi=\frac{3\pi}{2}\ \Rightarrow \sin\varphi\prec 0$$

Polarisation Circulaire droite

III. Production d'une lumière polarisée

1. Polarisation par réflexion



$\vec{E}_{\parallel}$: $\parallel$ au plan d'incidence

$\vec{E}_{\perp}$: $\perp$ au plan d'incidence

$$\begin{cases} E_{r\parallel} = 0 \Rightarrow i_1 + i_2 = \dfrac{\pi}{2} \\ n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \end{cases} \Rightarrow tg i_B = \frac{n_2}{n_1}$$

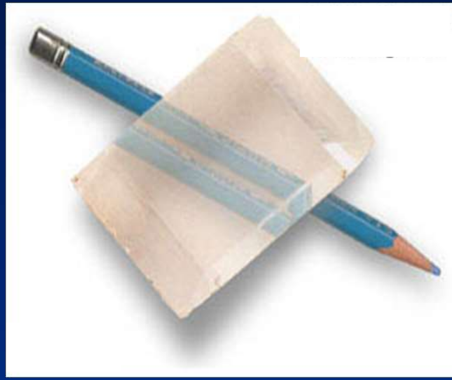
i_B est appelé angle d'incidence de Brewster

La lumière réfléchie en incidence Brewstérienne est polarisée dans la direction $\perp$ au plan d'incidence

L'incidence est dite Brewstérienne

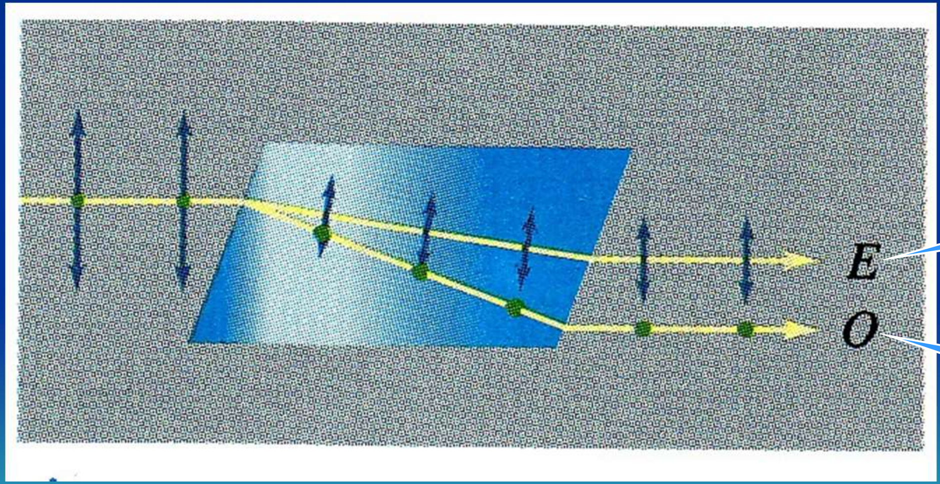
2. Polarisation par double réfraction

Double réfraction (ou biréfringence) : deux rayons réfractés pour un rayon incident.



Cas des cristaux anisotropes : un indice de réfraction pour chacune des 2 directions de polarisations.

Les deux composantes du champs sont alors séparées.



Rayon extraordinaire (ne suit pas les lois de Descartes)

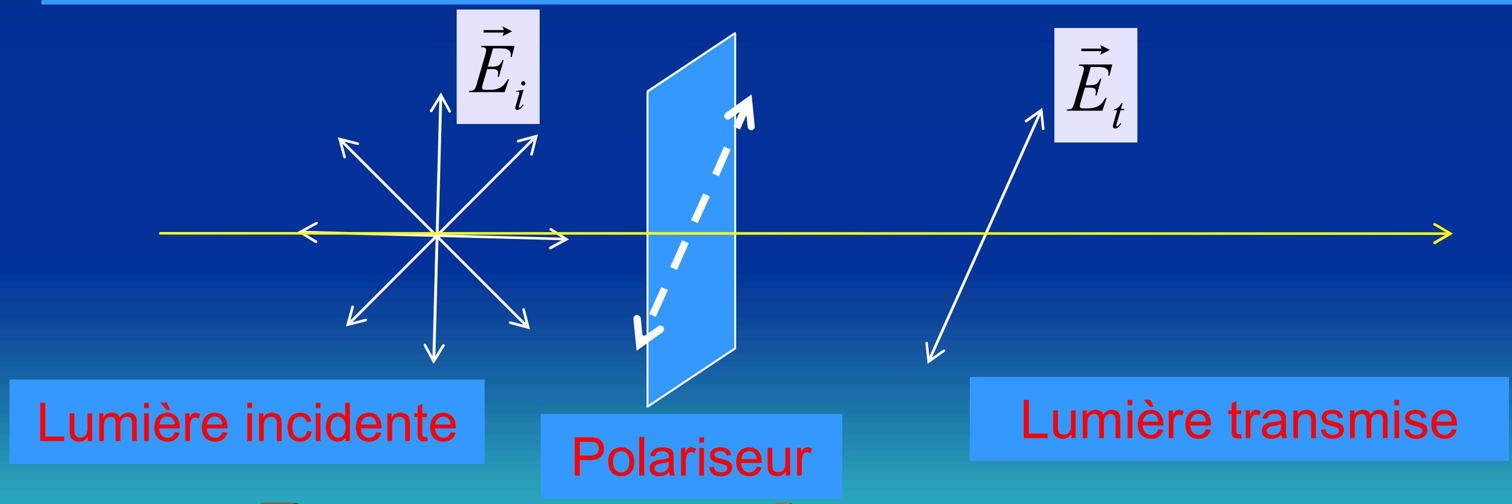
Rayon ordinaire (suit les lois de Descartes)

IV. Polariseurs et loi de Malus

Polariseur : film dont le coefficient de transmission pour l'une des directions de polarisation est nul

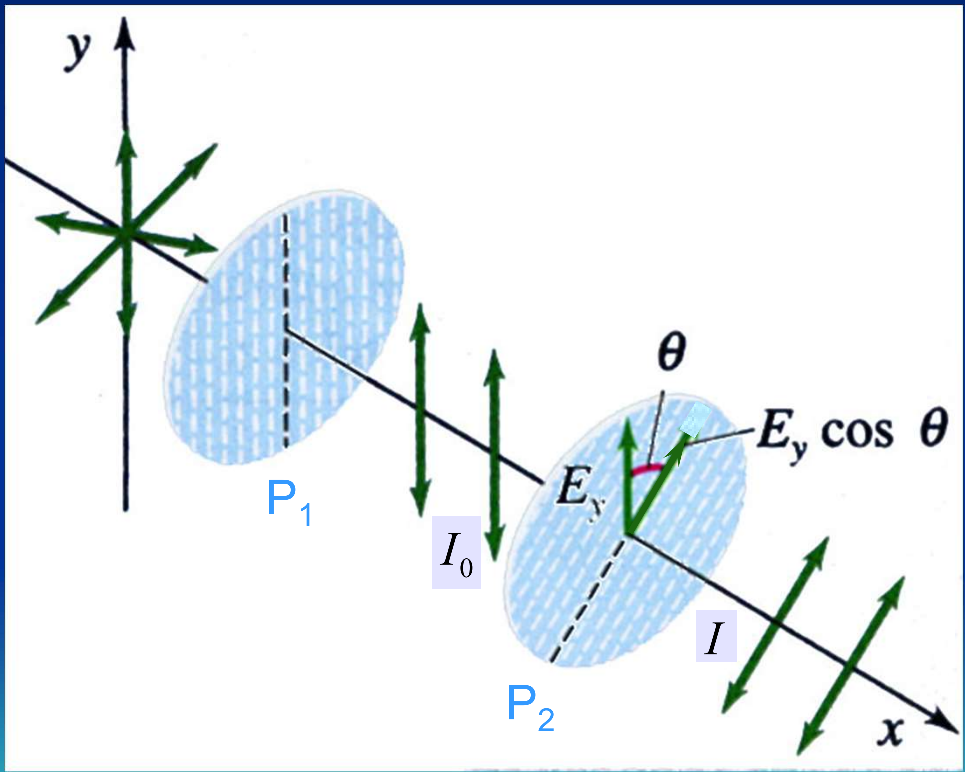
Polarisation par transmission

Un polariseur permet donc d'obtenir une lumière polarisée rectiligne à partir d'une lumière non polarisée



Loi de Malus

Un polariseur ne laisse passer que la projection du champ incident sur la direction de polarisation



$$I_0 \propto E_y^2$$

$$I \propto E_t^2 = \left(E_y \cos\theta\right)^2 = E_y^2 \cos^2\theta$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{E_y^2 \cos^2\theta}{E_y^2} = \cos^2\theta$$

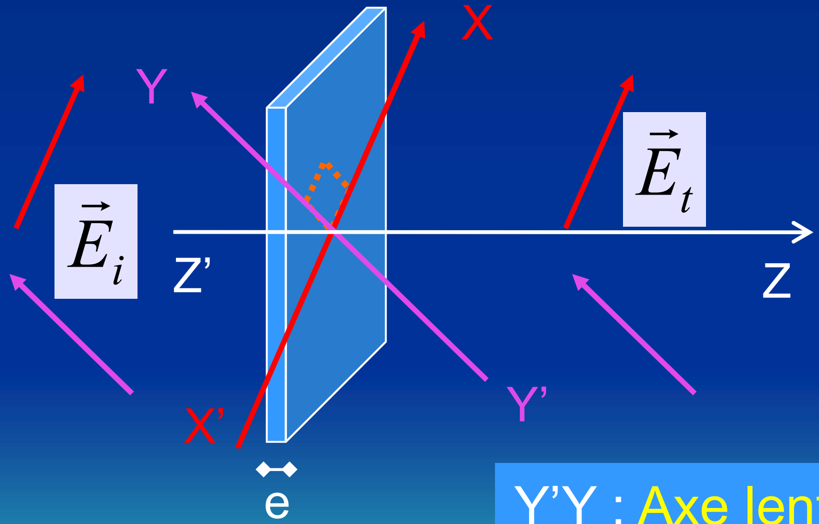
$$I = I_0 \cos^2\theta$$ **(Loi de Malus)**

V. Lames anisotropes

Lame anisotrope = Lame d'un cristal anisotrope (n_x,n_y)

1- lignes neutres d'une lame anisotrope

Axes X'X et Y'Y des deux directions de polarisation de la lame



Indices différents

Vitesses différentes

$$v_x = \frac{c}{n_x} \quad et \quad v_y = \frac{c}{n_y}$$

Y'Y : Axe lent (faible vitesse, grand indice)

X'X : Axe rapide (grande vitesse, faible indice)

2- Déphasage entre les ondes transmises

$$\Phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = \frac{2\pi(en_y - en_x)}{\lambda} = \frac{2\pi\, e\,(n_y - n_x)}{\lambda} = \frac{2\pi\, e\Delta n}{\lambda}$$

$$\Delta n = n_y - n_x$$

Est appelé : biréfringence de la lame

3- Action d'une lame anisotrope sur une onde

A l'entrée de la lame (z = 0)

$$\vec{E} = \left| \begin{array}{l} E_x = E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - \varphi) \end{array} \right.$$

A la sortie de la lame (z = e)

$$\vec{E} = \left| \begin{array}{l} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - k_x e) = E_{0x}\cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi\, n_x}{\lambda} e\right) \\ \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - \varphi - k_y e) = E_{0y}\cos\left(\omega t - \varphi - \dfrac{2\pi\, n_y}{\lambda} e\right) \end{array} \right.$$

Changement de l'origine des phases

$$\vec{E} = \left| \begin{aligned} E_x &= E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_y &= E_{0y}\cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi\, n_y}{\lambda} e + \frac{2\pi\, n_x}{\lambda} e\right) \\ &= E_{0y}\cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi(n_y - n_x)}{\lambda} e\right) \\ &= E_{0y}\cos\left(\omega t - \varphi - \frac{2\pi\Delta n}{\lambda} e\right) \\ &= E_{0y}\cos(\omega t - (\varphi + \Phi)) \end{aligned} \right.$$

4- Cas particuliers de lames anisotropes

Pour une longueur d'onde λ donnée :

Lame demi-onde $\delta = e\Delta n = \frac{\lambda}{2}$ ⇒ $\Phi = \frac{2\pi\, e\Delta n}{\lambda} = \frac{2\pi\lambda}{2\lambda} = \pi$

Lame quart d'onde $\delta = e\Delta n = \frac{\lambda}{4}$ ⇒ $\Phi = \frac{2\pi\, e\Delta n}{\lambda} = \frac{2\pi\lambda}{4\lambda} = \frac{\pi}{2}$

5- Exemple : Effet d'une lame demi onde sur une lumière polarisée rectiligne

A l'entrée de la lame (**z = 0**)

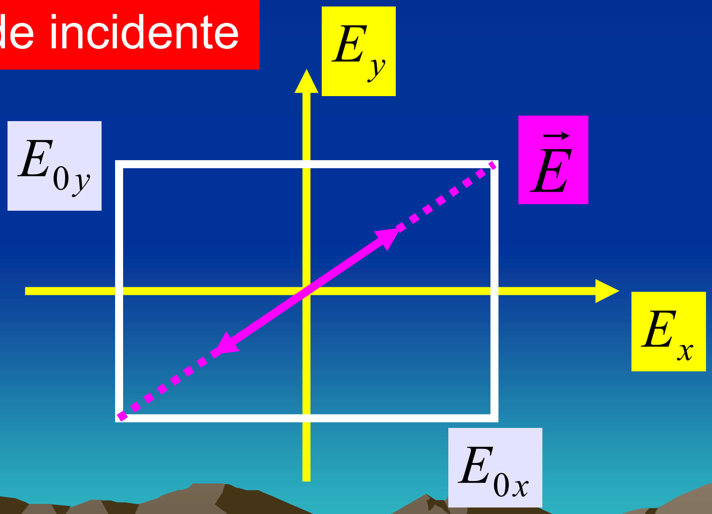
$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_x = E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t) \end{vmatrix}$$

A la sortie de la lame (**z = e**)

$$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_x = E_{0x}\cos(\omega t) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - \Phi) = E_{0y}\cos(\omega t - \pi) = -E_{0y}\cos(\omega t) \end{vmatrix}$$

Lumière rectiligne symétrique de la lumière incidente

Onde incidente



Onde transmise