How to include interactions to find integrable properties.

One-dimensional harmonic oscillator is integrable ODE.

Anharmonik ODE; $\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \Rightarrow$ Bu analitik olarak çözülebilirdir.

Buna λx^4 eklersek bu nonlinear dif. olur. Bu hala clasic olarak integrabledir. Ama QM'de bu closed formda çözülemez. Perturbation yöntemi kullanılabilir ama analitik olarak çözemeyiz. Klasik mekanikteki integrable problemler, QM'de integrable olmayabilir. Symmetry implies degeneracy in quantum mechanics. And we'll see this fact. Notion of symmetry in classical physics is different from the notion of symmetry in quantum mechanics.

In classical mechanics, in Kepler problem; Bu parçacığın $\vec{L}$'si sabittir.

$$L = m\vec{v}\times\vec{r} \neq 0 \text{ dır.}$$

Halbuki Bohr teoride $mvr = n\hbar$

Orbital momentum is the integer of Planck constants.

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{r^2} \text{ 'dir.}$$

$n = 1, 2, \ldots$

$E_n = -\frac{1}{n^2} \Rightarrow$ Bound statelerin enerjisi negatif ve böyle enerjiler doğuyor Bohr teoride.

n, $\vec{L}$'yi kuantize ediyor.

Schrödinger denklemini çözdüğümüzde $n=1$ (Ground statedir) ve

Ground state de $n=1$, $l=0$, $m=0$'dır.

Ve dalga fonksiyonu $\phi_{100} = (r,\theta,\phi) = e^{-r/a_0}$ Dolayısıyla açısal momentuma bağlı hiç terim olmadığından, açısal momentum açısından simetriktir.

Halbuki Bohr modelinde yörüngede dolaşan e⁻'nun açısal momentumu SIFIRDAN kesinlikle farklıdır. Bu durumda

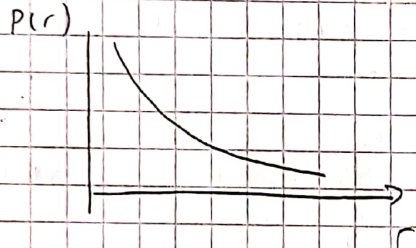
$$\vec{L} = mvr = n\hbar$$

ile $\phi_{100} = e^{-a_0/r_0}$ nasıl match olur. Bu iki farklı durum nasıl match olur? (Spini şimdilik ele almayalım), çünkü elektronun spininden bağımsız bir durumdur bu.

The problem is; if you have a particle orbiting in a circle orbit classically, açısal momentumu SIFIR değildir. QM'de ise ground state'de ise angular momentum "ZERO" dır. Bu nasıl olabilir?

Probability that electron r and r+dr distance from the nucleus;

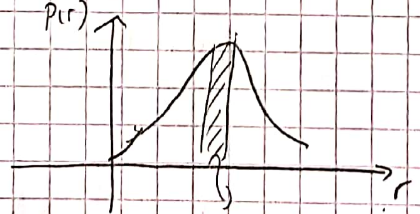
$$\text{Probability} = |\phi_{100}(r)|^2 dr = ce^{-2r/a_0} dr$$



Böyle olsaydı elektronun nucleusta olma ihtimali çok yüksek çıkıyor.

Oysaki $\text{Probability} = |\phi_{100}(r)|^2 r^2 dr$ olmalıdır.

$$\text{Probability} = ce^{-2r/a_0} \cdot r^2 \cdot dr$$



Yani probability paraboly benzer.

elektronu bir noktada bulma ihtimali diğer bölgelerde bulma ihtimalinden fazladır. Still it does not give the answer how its angular momentum be ZERO. Çünkü bu ancak electron tam orijinden geçerse mümkün olur. Quantum mechanically the particle does not have a trajectory! We cannot know it's position and momentum at the same time. Açısal momentumu belirleyecek şey ne ise; angular momentumu düzenleyecek şeyde odur. Parçacığın hareket ettiği düzlemi düzeltirsek, açısal momentumu değiştirebiliriz.

02.07.2024
10:30-12:15
Bilgisayar Lab.

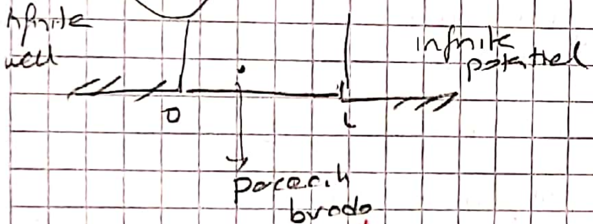
01.07.2024 509
13:30-15:15 54
fizik 2

Classically, the initial symmetry of the force will determine forever the direction of the orbit. That is what conservation of angular momentum means. If an orbit is permitted in this plane, you can rotate the coordinate axis. In that case, one possible solution can be found by rotation transformation. Since hamiltonian is invariant under rotation transformations, you can go from one possible solution to another possible solution.

Once you fixed the coordinate system, and once you specify the initial conditions the orbit is fixed. This is the meaning of symmetry in classical mechanics.

In QM, superposition is valid; solution is superposition of all positions. This is the crucial role of symmetry in quantum mechanics.

If you take the all possible planes in orbit, and if you add up all possible angular momentums, you'll get ZERO momentum.



What are the possible energy states of the system?

$$\phi'' + k_n^2 \phi - V(x)\phi = 0$$

0 ve L'de finite discontinuity var V(x)'te.

25.'ci'dan itibaren bak;

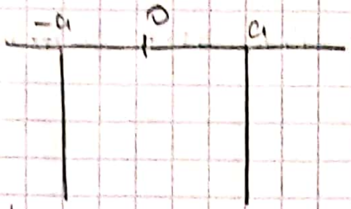
Attractive δ- Delta potential -

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi(x) + V(x)\phi(x) = E\phi(x) \qquad V(x) = -\lambda\delta(x) \quad (\lambda > 0)$$

Date: ..../..../......
Subject:

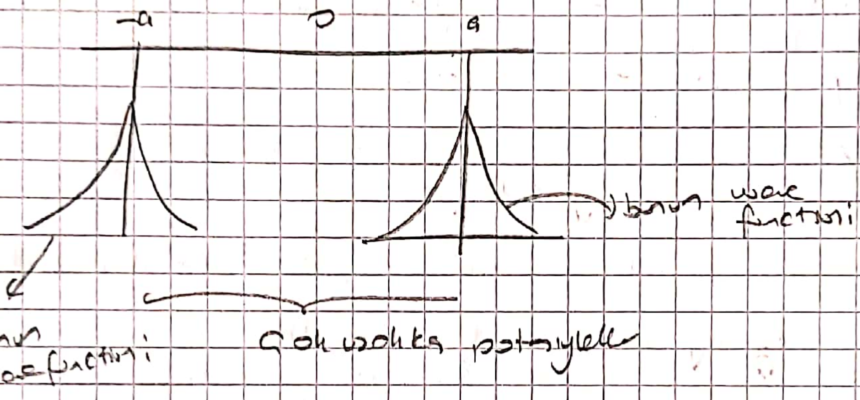
What would happen if we take two delta functions?

Put two attractive delta function.



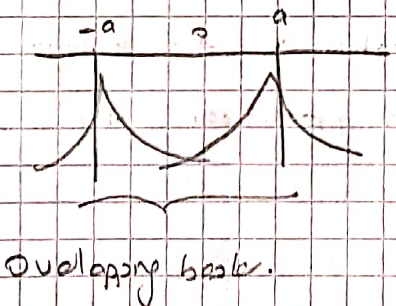
$$V(x) = -\lambda\left[\delta(x+a) + \delta(x-a)\right]$$

Bu durumda superpozisyon nasıl olur? Eğer potansiyellerden biri diğerine çok uzak olursa; dalga fonksiyonlarına kesinlikle gelen enerjiler biri diğerinin aynısı olacaktır. Yani potansiyeller birbirinden uzak olduğunda, sistemler aynı enerji seviyelerine sahip olur yani dejenere olur.



Ve bu iki ayrı durumun enerjileri aynıdır.

Peki bu potansiyelleri yaklaştırırsak ne olur? Dalga fonksiyonları overlap olmaya başlar.



If you have independent two states, then the vector space of this 2D-Hamiltonian will look like this;

$$H = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$$

Ancak iki potansiyel birbirini görmeye başladığında; yani Hamiltonyen şöyle olur.

$$H = \begin{bmatrix} E-\lambda & \varepsilon \\ \varepsilon & E-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \text{özdeğerleri;} \quad \cancel{E^2 - \varepsilon^2 = 0}$$

$$\det\left[A - \lambda\right] = 0$$

$$(E-\lambda)^2 - \varepsilon^2 = 0$$

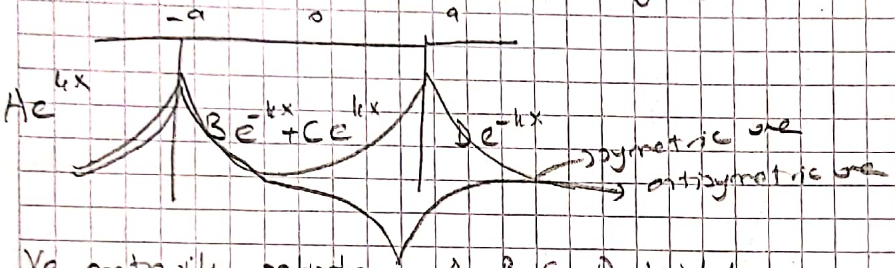
$$(E-\lambda)^2 = \varepsilon^2$$

$$E - \lambda = \varepsilon$$

$$\lambda = E \mp \varepsilon \text{ olur.}$$

Yani üç enerjiler artık $\hat{E}$ olmaz; öncede aynı da üç enerji artık; $\mp\varepsilon$ kadar birbirinden farklıdır. Yani dejenerasyon ortadan kalkmıştır. Dolayısıyla state ground state ve excited state olarak yine 2'ye yarılır.

Bu iki delta potansiyelinde yaklaştırdığımızda bu durum.

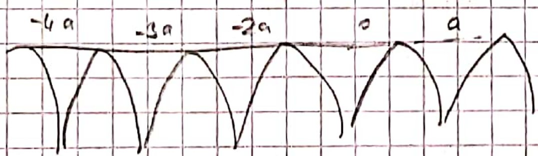


Ve continuity şartından A, B, C, D yi buluruz.

Bu durumda 2 enerji seviyesi vardır. Biri ground state, diğeri excited statedir.

You could do for infinite array of delta function potentials

Remember by Fourier analysis, an infinite array of delta functions potentials is equal to infinite array of exponentials, and that problem is called Dirac Comb.



The task is to solve a system N identical potentials with a periodic spacing of a

$$V(x+a) = V(x)$$

Define the displacement operator D, since the displacement operator and the hamiltonian commute, it's possible to define common eigenfunctions called Bloch functions.

$$D(f(x)) = f(x+a)$$

$$\psi(x+a) = e^{iqa}\psi(x)$$

Subject :

Date : ..../......./.......

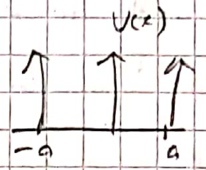
$$\psi(x+N) = \psi(x)$$

$e^{iNqa} = 1$ olmalıdır. Yani $q = \frac{2\pi n}{Na}$, $n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$ olmalı yani kuantize olmalıdır.

Solve the Dirac comb problem using Bloch's theorem;

The potential can be written as a sum of delta functions;

$$V(x) = \alpha \sum_{j=0}^{N-1} \delta(x - ja)$$



In the region $0 < x < a$ we have

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi \Rightarrow$ Bu durumda çözümler;

$$\psi = A\sin(kx) + B\cos(kx) \quad (0 < x < a)$$

Boundary conditionı ele alıyorum;

ve Bloch function olduğu için;

$$\psi(x) = e^{-iqa}\left[A\sin k(x+a) + B\cos k(x+a)\right] \quad (-a < x < 0)$$

continuity at $x=0$ gives;

Ayrıca wavefunction'ın I. türevinde discontinuity vardır.

Dirac Comb solution;

$$\boxed{\cos(qa) = f(z) = \cos(z) + \beta\frac{\sin(z)}{z}} \text{ olur.}$$

Dalgayı Dirac comb'da parçacığın ne kadarı yansır, ne kadarı geçer mantıklı bir problemdir.

Dalgayla karşı bir pertürbasyon, dejenerasyonu kaldırır ve birbirini kesen statler birbirini itmeye başlar. Dalgayla aynı simetriye sahip olan bantlar birbirini ile. Bu bound level repetition birdir ve bunun resmini Bransden kitabından göster. Bu Dirac'ın combination sayesinde farkında bağlamda olur.

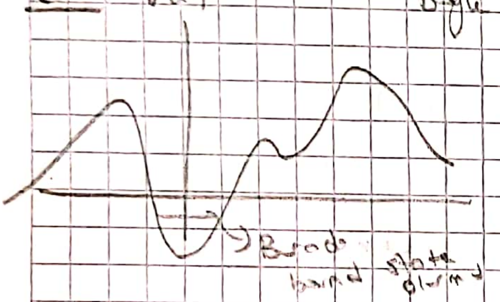
Şimdi harmonik osilatör problemine bakalım; Bu problemi normal ODE gibi çözmeye geçersek, special fonksiyonlara ihtiyaç duyarız. Onun yerine bu problemi Dirac'ın operatör yöntemi ile çözeceğiz.

Ama hem Dirac çözümü hem de, normal ODE çözümü tamamıyla eşittir.

Schrödinger equation'da second derivative term contributes significantly and the large of the number of nodes, the more the contribution.

Dolayısıyla energy eigenvalue'ların sayısı arttıkça, dalga fonksiyonundaki nod sayısı artar.

Ex V(x)



Böyle bir potansiyel fonksiyonumuz olsun, Bu durumda Hamiltonian nasıl olur? Eğer bound state'se, normalizable olmalıdır. This means a wavefunction must vanish at the end sufficiently.

Ve genel potansiyelde çok alt noktalarda eigenvalues sahip olacağız.

$$\left[\frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{x})\right]\Phi(x) = E\,\Phi(x) \text{ dır.}$$

Bu eigenvalue problemini çözeceğiz. $\hat{X}$ ve $\hat{P}$ birbiriyle komüte etmediği için, kinetik enerji ile potansiyel enerji komüte etmez.

Therefore this particle cannot have a definite value of its kinetic energy simultaneously or in the same state as the one in which it has a definite value of it's potential energy.

In general, the eigenstates of the Hamiltonian are not eigenstates of the kinetic energy or the potential energy separately.

Klasik fizikte toplam enerjinin ne kadarı potansiyel enerji ne kadarı kinetik enerji söyleyebildiğimiz ortamda yerde Hamiltonian, potansiyel ve kinetik enerjinin toplamı olmasına rağmen, please remember in a stationary state of the system, the particle does not have a definite value of either its kinetic energy or its potential energy but only of the sum of the two. This is simply because X and P don't commute with each other.

Expectation value of kinetic energy;

$$\langle \psi | \hat{P}^2 | \psi \rangle = \| \hat{P} \psi \|^2 \Rightarrow$$ Because $\hat{P}$ is a hermitian operator.

Therefore $P^2 = P^{\dagger} P$ şeklinde yazılabilir.

$$\underbrace{\langle \psi | P^{\dagger}}_{\text{Bunu}} \underbrace{P^{\dagger} | \psi \rangle}_{\text{bunun eşleniği}} = \| \hat{P} \psi \|^2$$ olur.

Ve state vektörün normu negatif olamayacağı için, kinetic energy'nin beklenen değeri negatif olamaz. Ne zaman kinetic energy'nin beklenen değeri sıfır olabilir; ancak state vector ψ null vektör olduğunda mümkün olur bu. Dolayısıyla bu kinetik enerjinin beklenen değeri her zaman pozitiftir. Dolayısıyla Potansiyel'den daha aşağılarda enerjiye sahip olamayız, çünkü kinetik enerjinin beklenen değeri her zaman pozitiftir.

Ayrıca parçacık şu konumdaydı, enerjisi nedir sorusu cevapsız mı kalacak? Çünkü pozisyon operatörü, Hamiltonian ile komüte etmez.

The particle is actually everywhere. There is a probability amplitude for the particle to be anywhere on the axis.

Parçacık tünelleme ihtimali olacaktır ki bu eder ve ayrıca buna bağlı olarak, parçacık tünelleyebileceği için, bound state olamaz. Yani normalize edilebilir bir state elde edemeyiz. Yeterince uzun beklenirse, parçacık tünellenir.

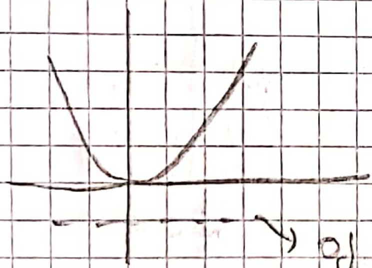
E gets bigger; infinite yükseklikte ve sonlu genişlikte olsa, tünelleme olasılığı sıfır olur, then there is no possibility to tunnel. It then has to

really overcome an infinite barrier. So the tunneling probability depends on the range, the width as well as the height of the barrier, and it decreases exponentially in the height of the barrier.
So if the height goes to infinity, the tunneling probability goes to zero.

Eğer barrier, delta function olsa, parçacık hala tunnelyebilir mi? Evet, tunnelyebilir, width goes to zero. If the width is finite and the height is infinite, then it's not possible for it to tunnel.
If the width is infinite, then you could have definite state between those infinite width barriers, because it can not tunnel through.

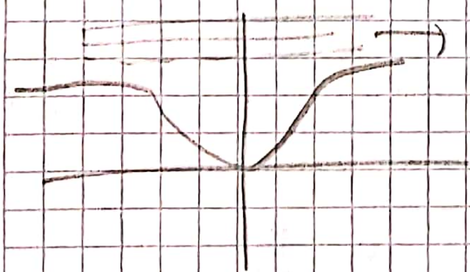
Ex What happens when the potential has a certain symmetry as in the case of harmonic oscillator? How it's reflected in the eigenstates and eigenvalues of the system?

$V(x) = V(-x)$ symmetric potential.



What kind of energy values we can expect?

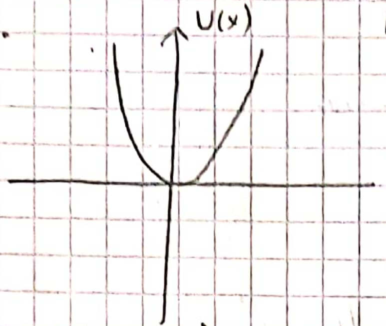
Of course, eigenvalues can not be the lower than expectation value of the potential. Because kinetic energy can not be negative.



parçacık burada continuous statelere sahip olur ama statele non-normalizable dir. Bu non-normalizable wavefunctions correspond to a free particle.

Fakat potansiyelin içinde discrete energy eigenvalues yani normalizable wavefunctionlara (bound state) sahip olur.

Sadece bound state olan durumu yani infinite piden potansiyelle bakalım. Bu durumda parçacık tünelleyemeyeceği için bound stateler oluşur.



Bu durumda hamiltonian'ın eigenfunctionlarının tamamı normalize edilebilir. They all correspond to bound states and you have a pure discrete spectrum.

$$V(x) = V(-x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + V(x)\phi(x) = E\phi(x) \qquad \text{Let } x = -x \text{ or } x = -x'$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi(-x')}{dx'^2} + V(-x')\phi(-x) = E\phi(-x)$$

$V(-x') = V(x')$'dir.

Bu iki ODE'nin çözümü aynıdır. Yani aynı $\phi(x)$ iki ODE'yi de sağlar.

There is no degeneracy in 1D. Therefore every eigenvalue must have a unique eigenfunction.

Dolayısıyla $\phi(-x)$ should be linearly dependent on $\phi(x)$.

Yani $\phi(-x) = c\phi(x)$ olmalıdır. Bu durumda $c = \pm 1$ olmalıdır.

$\phi(-x) = \pm \phi(x)$

$\phi(-x) = -\phi(x)$ olanlar odd function

$\phi(-x) = \phi(x)$ olanlar even " 'dir.

That proves that if the potential has reflection symmetry or parity symmetry invariance, the solutions have definite parity. If the potential is even function, the wavefunction must be even or odd but cannot be a mixed function.

Ground state'de node yoktur.

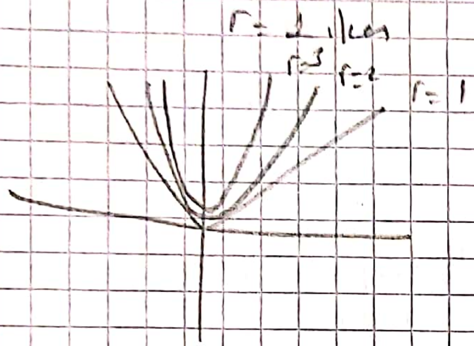
So Hamiltonian commute with Parity operator. $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$

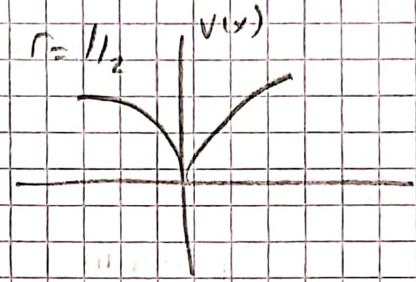
Doğayla Hamiltonian'ın eigenfunctionları aynı zamanda parity operatorunun eigenfunctionlarıdır.

Şimdi $V(x) = x^2$ olduğu durum için bakalım;

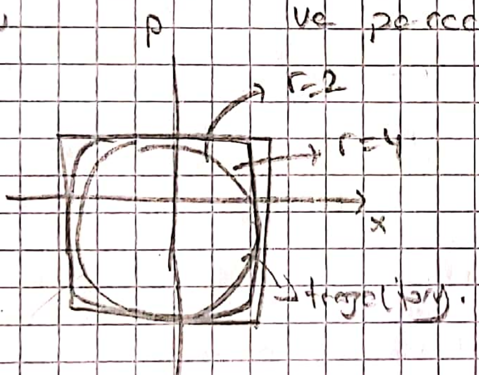
$$\frac{p^2}{2m} + \lambda |x|^r$$

How about $r = 1/2$?





Classically parçacık nasıl davranırdı? r=2 olmadığı sürece kapalı yörüngeler olurdu. p ve parçacık closed curve'lerde hareket ederdi.



If r=2, trajectory will be an elipse. r=4 olduğunda daha flat kapalı eğriler olur parçacığın trajectorysi.

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2mE}$$

$$\int p\,dx$$

$$= \int \sqrt{E} \quad dx$$

Prove

The eigenvalues are independent what basis you choose. The eigenvalues do not change depending on the basis you choose. So the problem is like to choose a proper coordinate system to describe an abstract vector but the eigenvalues and state vectors (eigenvectors that correspond to those eigenvalues) are independent of what basis you chose to solve the problem. You could solve it in any basis and transform to whatever basis you like. This is what Dirac found.
He found an operator method of solving these equations. Bu tensplerayı finite dimensional matrixlerle yapabiliriz. Because this commutation relations are minkus kile ki, represent this system in terms of a finite dimensional space. (Bunu topoloji derslerinde kısmen göstereceğiz)
However, the Hilbert space is infinite. You cannot express these operators as finite dimensional matrices and those immediately true.
When we write $xp - px = i\hbar I$ (unit matrix)
Since trace AB = trace BA olduğundan

$$AB \neq BA \text{'dır}$$

Ancak trace AB = trace BA 'dır.

$$\underbrace{\text{trace}(xp) - \text{trace}(px)}_{0} = \text{trace}(i\hbar I)$$

$$0 \neq 1 \quad \text{bu olamaz;}$$

Bu bir contradictiondır, it's not possible write x and p in terms of finite dimensional matrices.
So if you choose to work with matrices representation, you should use infinite dimensional matrices.
But if you choose to work differential operator representation, no need to use matrice representation.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\phi(x) = E\phi(x)$$

Subject : Date : ..../..../.......

Power series ile seri polinom gibi x, x^2, x^3 şeklinde gider.

We already know that since $[x, p]$ do not commute,

kinetik

$$\langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle = \| \hat{p}\psi \|^2 \Rightarrow$$ Enerjinin beklenen değeri negatif olmaz.

Does this equation have solutions? Put the boundary conditions.

Bu denklemin çözümünü Frobenius metodu ile yapabiliriz çünkü constant coefficientli bir ODE olduğu için seri çözüm yönteminden biri olan Frobenius metodu ile çözebiliriz.

<u>Frobenius Theorem</u>

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$ şeklindeki ODE'yi

Eğer $x = x_0$ civarında bir regular singular point verse;

Bu ODE'nin $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$ şeklinde bir çözümü vardır. y'nin türevlerini alıp ODE'de yerine yazarak, power serisinin c_n katsayılarını buluruz.

Yani harmonic oscillator Dif denkleminde; sabit katsayılı olduğundan ve $x = 0$ civarında regular singular point olduğundan Bu ODE'yi Frobenius metodu ile çözebiliriz.

Yine aynı ODE'yi, Dirac'ın operator yöntemi ile de çözebiliriz.

Dirac'ın operator metodu çok daha basit bir yöntemdir.

Dirac notasyonunda

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} \rightarrow$$ second order differential operator acts on the wave function

All direct observables in QM are hermitian operators. If the operators are not hermitian, then these observables are not direct observables.

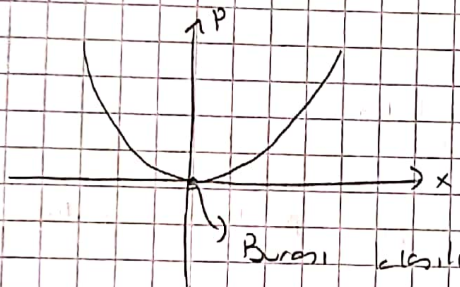
Hermitian operatörlerin özdeğerleri reeldir.

If N = hermitian operator then;

$$N|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

real eigenvalues N hermitian

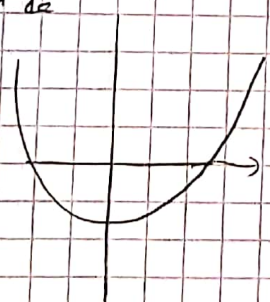
Ground state $|0\rangle$ ile gösterilir ama bu NULL vektör demek değildir. Quantum field theory'ye göre, operatörler annihilate the vacuum. Ground state'deki vektör nasıl bir şeydir? Bunu bulmalıyız; Ground state, null vektör demek değildir. Klasik fizikte;



Burası klasik fizikte ground state'dir. Çünkü hem potansiyel enerji hem de kinetik enerji sıfırdır.

Ancak QM'de ground state; pozisyonu böyle lokalize tutamayız çünkü konum böyle çok kesin olduğunda momentumdaki belirsizlik neredeyse sonsuz olur.

QM'de



Bu eigenstate'teki yani wavefunction'ları bulmalıyız ground state için.

Ground state $|0\rangle$ ile gösterilir ve $\langle 0|0\rangle = 1$ 'dir.

$|1\rangle \rightarrow$ excited state'i nasıl buluruz;

$|1\rangle = a^{+}|0\rangle$ ile bulabiliriz. Bunu normalize etmek için bir sabit lazımdır.

CamScanner ile tarandı

$|1\rangle = c a^{\dagger}|0\rangle$

Dolayısıyla $|n+1\rangle = c_n\, a^{\dagger}|n\rangle$ şeklinde yazılabilir.

C_n'i nasıl buluruz; Bra vektörünü kullanalım.

$$\langle n+1|n+1\rangle = 1 = |c_n|^2 \langle n|aa^{\dagger}|n\rangle$$

Bunun için komutasyon bağıntısını kullanırsak;

$$aa^{\dagger} - a^{\dagger}a = 1$$

$aa^{\dagger} = N+1$ olur. $N \rightarrow$ düzey operatörü.

$$\langle n+1|n+1\rangle = 1 = |c_n|^2 \langle n|N+1|n\rangle = |c_n|^2 (n+1)$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{(n+1)}}$$

$$|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\, a^{\dagger}|n\rangle \text{ olarak bulunur.}$$

Dolayısıyla ground state vektörünü bulduktan sonra, düzey operatörünü uygulayarak diğer state vektörlerini bulabiliriz.

Aynı şekilde;

$|n-1\rangle = b_n\, a|n\rangle$ şeklinde yazılabilir. $b_n \rightarrow$ normalizasyon katsayısı

$$\langle n-1|n-1\rangle = |b_n|^2 \langle n|\underbrace{a^{\dagger}a}_{N}|n\rangle$$

$$1 = |b_n|^2 n \langle n|n\rangle$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$|n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\, a|n\rangle \text{ olur.}$$

If $|n\rangle = |0\rangle \Rightarrow$ ground state ise; there is no $|n-1\rangle$ state.

Because ondan (ground state'den) daha aşağı state olamaz.

Subject : Date : ..../......./.......

Bu sayfadaki bilgileri yeterlidir. $a|0\rangle = 0$

What is a? in terms of x and $\hat{p}$ = ?

$$a = \left(\frac{x}{\sqrt{2\hbar/m\omega}} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \right) |0\rangle = 0$$

Şöyle de yazabiliriz;

$$\left(m\omega x + ip \right) |0\rangle = 0$$

What is the ground state $|0\rangle$? Yani $\phi_0(x) = ?$ nedir? Yani ground state dalga fonksiyonu nedir?

By definition $\phi_0(x) = \underbrace{\langle x|0\rangle}$'dır. → In the position basis, ground state wavefunction böyle yazılır.

→ Let's ket $\langle x|$ both sides!

$$\langle x| \left(m\omega x + ip \right) |0\rangle = 0$$

Yani $\frac{d}{dx}\phi_0(x) + \frac{m\omega x}{\hbar}\phi_0(x) = 0$ olur.

$$\boxed{\phi_0(x) = A_0 e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar^2}} \text{ olur.}}$$

Prove that Solution budur.

Bu Gaussian bir fonksiyondur. There is no nodes, bell shaped function. Zaten ground state'de node olmaz. Dolayısıyla second order equation'a gitmeden, ground state wave function'ı bulmuş olduk.

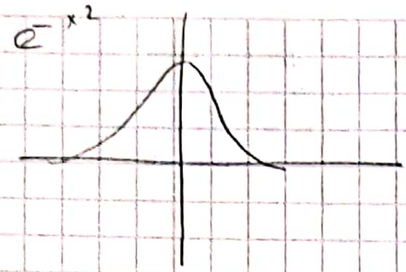
A_0'ı de normalizasyon ile bulurız.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_0(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} A_0^2 e^{-m\omega x^2/\hbar^2} dx \Rightarrow 1$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$A_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m\omega x^2/\hbar^2} dx = A_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{-x^2} dx}$$

Bu gaussian integraldir.



$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

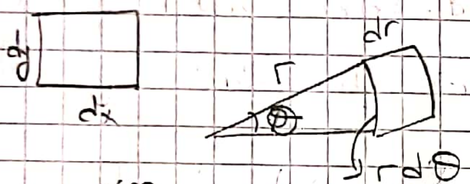
Bu integrali dolaylı için bu integrali $\int e^{-y^2}dy$ ile çarpalım;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy \quad \text{olur} = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \quad \text{olur.}$$

Bu durumda polar koordinatları kullanalım.

$x^2+y^2=r^2$

$-x^2-y^2=-r^2$ olur.



$dx\,dy = r\,d\theta\,dr$ 'dir.

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2}\, r\,d\theta\,dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\,dr \quad \text{olur.}$$

$-r^2 = u$

$-2r\,dr = du$

$r\,dr = -du/2$

$u(0) = 0$

$u(\infty) = -\infty$

$$2\pi \int_0^{-\infty} e^u \left(-\frac{du}{2}\right)$$

$$= 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot \int_0^{-\infty} e^u\,du = e^u\Big|_0^{-\infty} = (0-1) = -1$$

$$= 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1) = \pi \quad \text{olur.}$$

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right]^2 = \pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \quad \text{olur.}$$

Dolayısıyla $A_0^2 \int e^{-m\omega x^2/\hbar^2} dx = A_0^2 \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m\omega}}$

$$-\frac{m\omega}{\hbar^2} r^2 = u$$

$$-\frac{2m\omega}{\hbar^2} r\,dr = du \Rightarrow r\,dr = -\frac{du\,\hbar^2}{2m\omega}$$

Sonuç $A_0^2 \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m\omega}} = 1 \Rightarrow A_0 = \left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar^2}\right)^{1/4}$ olur.

That is, the ground state wavefunction;

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar^2}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/\hbar^2}$$ olarak bulunur.

Now how do I find the first excited state without solving any differential equation?

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{1}} a^\dagger |0\rangle \text{ idi;}$$

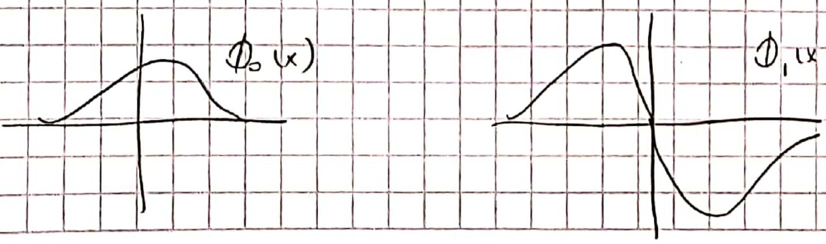
$$\phi_1(x) = \langle x|1\rangle \text{'dır} = \frac{1}{\sqrt{1}} \langle x|a^\dagger|0\rangle \text{'dır.}$$

Burası sadece sayı verir.

$$= \langle x \left| \frac{x}{\sqrt{2\hbar/m\omega}} + \frac{ip}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \right| 0\rangle \text{'dır.}$$

$$= \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\, x\, \phi_0(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \frac{d}{dx}\phi_0(x)$$

Burada ϕ_0'ı koyarsak; direkt normalized first excited state'i bulmuş oluruz. Yani first excited state'i bir daha normalize etmeye gerek yoktur. So $|1\rangle$ is already normalized eigenstate. Dolayısıyla bu yöntemle normalize eigenstate'ler tek bir hamlede bulunmuş olur.



$\phi_1(x)$ böyle olur.

Bunu çizdir; mathematica.wolfram da.

Lecture 12 Harmonik osilatörün öz fonksiyonları şöyle idi;

$$\phi_n(x) = \underbrace{A_n e^{-x^2 m\omega/2\hbar}}_{\text{Gaussian function}} \cdot H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\right)$$

→ hermite polynomials

$H_n(x)$ = Hermite polynomials of order n.

Hermite polinomları makes a complete set of mutually orthogonal functions, It's a family of orthogonal polynomials.

So you have relation,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = \dots \delta_{mn}(x)$$

There's also generating function for these $H_n(x)$. Laguerre Polynomials, Legendre polinomials, these are like unit vectors in function space.

e^{-x^2} de bu polinomların weight factorudur.

Legendre ve Laguerre polinomların weightleri farklıdır.

$H_n(x)$ ⇒ Rodrigues formula ile bulunur ve Rodrigues formulü, bütün bu ortogonal set equationları verir.

$$H_n(x) = e^{-x^2} \cdot \left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{x^2} \text{ dir.}$$

Generating function,

$$e^{2tx - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \text{ dir.}$$

→ Bunun power serisinin katsayıları hermite polinomlarıdır.

Yani Hermite polinomların özelliklerini bilirsek, bu harmonik osilatörün özelliklerini biliriz.

Date : ....../....../...... Subject :

— Polynomial functions — (Basis for Hilbert space)

Any element of Hilbert space (cont or not); Hilbert space is an integrable function space. Any element of Hilbert space can be approximated by a continuous function.

Hilbert uzayındaki herhangi bir eleman polinomlarla approximate edilebilir.

$P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ approximate $f(x)$; Buradaki her eleman linearly independent olur, but they're not orthogonal, Bunlar Gram-Schmidt yöntemiyle orthogonalleştirebiliriz.

Example Find the solution of $f'(x) = f^{-1}(x)$.

Yani türevi, tersine eşit olan fonksiyonu bulmalıyız.

Örneğin $f'(x) = f(x)$ olan $f(x) = Ce^x$ şeklindedir.

$f'(x) = -f(x)$ olanlar ise $A\sin x + B\cos x$ şeklinde lineer kombinasyonudur Sin ve Cos'un.

Dolayısıyla biz bir fonksiyon ailesi arıyoruz. Find $f(x)$ where $f^{-1}(x)$, $f'(x)$, and $f(x)$ are all in the same class.

$f(x) = Ax^r$ olsun $y = Ax^r \Rightarrow f^{-1}(x) = ?$

$x = Ay^r \Rightarrow y^r = \frac{x}{A}$

$y = \left(\frac{x}{A}\right)^{1/r}$

$f^{-1}(x) = \left(\frac{x}{A}\right)^{1/r}$ olur.

$f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{A}\right)^{1/r} x^{1/r}$ şeklinde bulmuş olduk tersini.

$f'(x) = rAx^{r-1}$

$f'(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow$

$rAx^{r-1} = \left(\frac{1}{A}\right)^{1/r} x^{1/r}$

Subject : Date : ....../....../......

$$\underbrace{x^{r-1-\frac{1}{r}}}_{\text{Bu sabit}} = \underbrace{\left(\frac{1}{A}\right)^{1/r} \cdot \frac{1}{rA} - \frac{1}{r}\left(\frac{1}{A}\right)^{1+\frac{1}{r}}}_{\text{Bu da sabit}}$$

Olmalı,

Yani $r-1-\frac{1}{r} = 0$ olmalı,

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$r = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2} \text{, Golden ratio; } = \phi$$

$$f(x) = \sqrt[\phi]{\frac{1}{\phi}}\, x^{\phi} \quad \text{olarak bulunur.}$$

Hermite Polynomials $\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = ?$

$$\frac{d}{dx} e^{-x^2} = -2x e^{-x^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = (4x^2-2)e^{-x^2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3} e^{-x^2} = 8x e^{-x^2} + (-2x)(4x^2-2)e^{-x^2} = -(8x^3 - 12x)e^{-x^2}$$

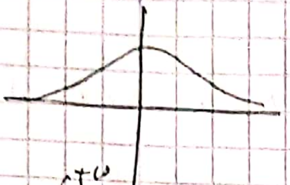
So $\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^n} = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}$

e^{-x^2}'nin önündeki polinomlar Hermit polinomlarıdır.

Dolayısıyla $H_n = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$

Gaussian function

$f(x) = Ae^{-ax^2}$ ⇒ Gaussian fonksiyonu



$f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$

What is the area under this curve?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax} dx = ?$$

Bunu çözmek için $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax} dx\right)^2$ 'ini polar koordinatlarda çözeriz.

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy$$ şeklinde yazarız.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = ?$$ Gaussian'ın merkezi göre sıfırdır, ama gaussian

bir even monomial ile çarpılmış durumda.

Leibniz kuralına göre bu integrali doğrularız. Bu bir Gaussian integralleri Leibniz kuralına göre deliniz.

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} F(a,x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha, x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{x^{2n} e^{-ax^2}} dx =$$

Burası aslında e^{-ax^2}'in a'ya göre n. kez türevi alınacaktır;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{d^n}{da^n} e^{-ax^2} dx$$ 'dir.

$$= (-1)^n \frac{d^n}{da^n} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx}_{} \longrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$ 'dır.

$$= (-1)^n \frac{d^n}{da^n}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)$$ 'dır.

— Harmonic Oscillator Devam —

$$\phi_n(x) = A_n e^{-m\omega x^2/2\hbar} H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\right)$$

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Bu eigenfunctiondan başlayıp, uniquely diğer eigenfunctionları bulabiliriz.

Bu problemin hamiltonyeni;

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega x^2$$ idi. Ve bu hamiltonian hem x hem de P bakımından kuadratiktir.

Position bazında şöyle yazabiliriz.

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega x^2$$

Momentum uzayında ise; şöyle yazılır.

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2} m \omega^2 \hbar^2 \frac{d^2}{dp^2}$$ olarak yazılır.

$\phi_n(p) \Rightarrow$ Momentum uzayında wavefunction $= B_n e^{-p^2/2m\omega\hbar} H_n\left(\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\right)$

Konum uzayında;

$\phi_n(x) = A_n e^{-m\omega^2 x^2/2\hbar} H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\right)$ olarak yazılır.

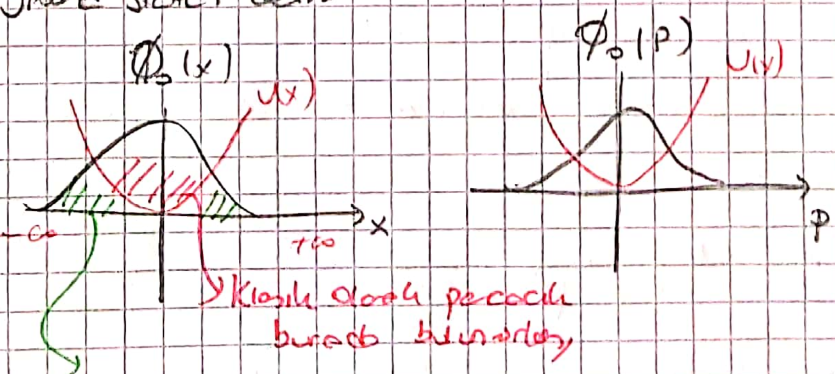
$n=0$ olduğunda ground state $H_0\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\right) = 1$'dir.

$\phi_0(x) = A_0 e^{-m\omega^2 x^2/2\hbar}$ sadece gaussian bir fonksiyondur.

Yine ground state P uzayında yine gaussian fonksiyondur.

X ve P bazları birbirine Fourier transformu ile bağlıdır.

Dolayısıyla bu ground state'in Fourier transformu, diğer bazdaki ground state'i verir.



Ama işte parçacıklar burada da bulunabilir.

Parçacık ground state'de olası olarak potansiyelin ortasında bulunabilir.
Operatör yöntemiyle diğer state vektörlerini de bulabiliriz. Şimdi uncertainty'yi bulalım.

$$(\Delta x)_n = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle_n^{1/2} \qquad n \rightarrow \text{state number.}$$

nth wavefunction in the position basis is the Fourier transform of the wavefunction in the momentum basis. Dolayısıyla (Δx) ve (Δp) de simetrik olması beklenir.

$$\langle n | a | n \rangle \Rightarrow ? \qquad a = x\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} + \frac{ip}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$$

$$a^{+} = x\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} - \frac{ip}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$$

Hamiltonian ise şöyle yazılabilirdi $H = \hbar\omega\left(a^{+}a + \frac{1}{2}\right)$

$$a^{+}a|n\rangle = n|n\rangle$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$a^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$\langle n | a | n \rangle \Rightarrow \langle n | \sqrt{n}\,|n-1\rangle = \sqrt{n}\,\langle n | n-1 \rangle = 0$$

Bunlar birbirine dik statelerde olduğundan sonuç ZERO'dur.

Aynı şekilde

$$\langle n | a^{+} | n \rangle = \langle n | \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle = \sqrt{n+1}\,\langle n | n+1 \rangle = 0$$

$\langle n | n+1 \rangle$ stateleri birbirine dik olduğundan sonuç sıfırdır.

Tüm sabitleri kolaylık olsun diye 1 olarak alalım,

$$a = \frac{x+ip}{\sqrt{2}} \qquad x = \frac{a+a^{+}}{\sqrt{2}}, \quad p = \frac{a-a^{+}}{i\sqrt{2}}$$

$$a^{+} = \frac{x-ip}{\sqrt{2}}$$

x ve p hermityen operatörler ama a ve a^{+} hermityen değildir.

$\langle n | x | n \rangle = 0$ dır. Bunlar açık zaten.

$\langle n | p | x \rangle = 0$ dır

Yani parçacık back and forth kuyu içinde hareket ettiğinden ortalama x ve $\vec{p}$ sıfırdır.

Subject : Date : ....../....../......

$\langle n|x^2|n\rangle$ de aşağıdaki şekildedir.

$$\langle n|x^2|n\rangle = \langle n|\left(\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}\right)^2|n\rangle = \frac{1}{2}\langle n|a^2+aa^\dagger+a^\dagger a+a^{\dagger 2}|n\rangle$$

$(a+a^\dagger)^2 = a^2+aa^\dagger+a^\dagger a+a^{\dagger 2}$ çünkü a ve $a^\dagger$ do not commute.

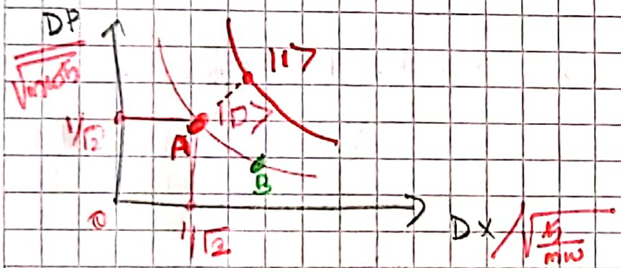
$$=\frac{1}{2}\langle n|a^2+\underbrace{aa^\dagger+a^\dagger a}+a^{\dagger 2}|n\rangle$$

Bu terimler katkı verir.

$$=\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\hbar}{m\omega} \text{ olur.}$$

$$\langle n|p^2|n\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right)m\omega\hbar$$

(Δx) ve (Δp) standard deviationlar olduğu için negatif olamaz.



$$(\Delta x)\cdot(\Delta p) = (n+1/2)\hbar$$

In the ground state;

$$\Delta x\cdot\Delta p = \frac{\hbar}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

So the ground state of the harmonic oscillator is the minimum uncertainty state'dir.

A noktasından daha aşağıdaki bir noktaya gidemeyiz uncertainty; Ancak excited state'lere çıkıldıkça, uncertainty artar. Ground state uncertaintynin en az olduğu durumdur.

• B noktasında ise konumdaki belirsizlik, momentumdaki belirsizlikten daha fazladır. Ölçümün gözlüğünde bu tür durumlarla bir değişkendeki belirsizlik düşürülüp de daha az olacak kadar optimum modifiye edilirler.

Dolayısıyla operatörlerle işlem yapmak daha kısa yoldur QM'de.

Harmonik osilatörde statelerin aşağı doğru equally space'dir. Harmonik osilatör quantum field theory'de de önemli bir rol oynar.

Eigenstates of a ve $a^\dagger$?

a ve $a^\dagger$ komüte etmiyorlar, şekil bunların eigenstateleri nedir? a ve $a^\dagger$ hermityen olmadığı için eigenvalues complex olabilir.

$$a^\dagger = \frac{x - ip}{\sqrt{2}} \quad (\text{sabitlerin hepsi } 1 \text{ alındı})$$

Pozisyon uzayında $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\cancel{\left(x + i\frac{d}{dx}\right)}$ 'dir. $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)$ 'dir.

$$a^\dagger \chi(x) = \lambda \chi(x) \Rightarrow \lambda \text{ could be complex;}$$

$$\left(x - \frac{d}{dx}\right)\chi(x) = \lambda\, \chi(x)$$

Bunu Dif denklemi olarak değilde, operatör olarak çözelim;

$$a^\dagger |\chi\rangle = \lambda |\chi\rangle$$

Bu bize normalizable state'leri verir.

$$|\chi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle = C_0|0\rangle + C_1|1\rangle + C_2|2\rangle + \dots$$

$$a^\dagger |\chi\rangle =$$

UNUTMA Sadece Normalizable stateler aşağıdaki unique bir expansion ile sahiptir.

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle$$

Schrödinger Dalga Denkleminde probability density leads to current.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{J} = 0 \quad (\text{Continuity equation})$$

Bu probability density'ye karşılık bir current vardır.

Position uzayında yazalım, for a particle moving in some potential $V(r)$.

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial t} = H\psi(r,t) = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(r,t) + V(r,t)\psi(r,t)$$

time-dependent Schrödinger equation in position representation.

Bu dalga fonksiyonunu ψ^* ile çarparak current'ı elde edebiliriz.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi^*\psi(r,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(r,t)^*\psi(r,t) + V(r)\psi^*(r,t)\psi(r,t)$$

Aynı denklemin kompleks conjugesini alalım;

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^*(r,t) + V(r)\psi^*(r,t)$$

Bu ilk denklemden çıkaralım; Birincisini ψ ile, ikincisini ψ^* ile çarpıp birbirinden çıkaralım;

$$① \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*\right)$$ (çıkardığımızda

potansiyel terimleri birbirini götürdü. Dolayısıyla potansiyelden bağımsız olarak ① nolu denklem her zaman doğrudur.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{\left(\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*\right)}_{\text{Burası diverjans şeklinde yazılabilir.}}$$

Çünkü $\nabla(\psi^* \nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) = \cancel{\nabla\psi^* \cdot \nabla\psi} + \psi^* \nabla^2\psi - \cancel{\nabla\psi \cdot \nabla\psi^*} - \psi\nabla^2\psi^*) = \psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*$

$$\rho = |\psi|^2$$

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2mi} \nabla(\vec{J})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{J} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\frac{\hbar}{2mi} \nabla (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)}_{\vec{J}} = 0$$

$\Downarrow$

$\vec{J}$ olur.

$$\boxed{J = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \text{ olur.}}$$

Probability current density. It's real quantity and scattering problemlerinde karşımıza çıkar.

Eğer bunu parçacığın yükü ile çarparsak, gerçek current density buluruz.
Ya da bunu $\vec{E}$ ile çarparsak current density'i buluruz. $\vec{E}$ (electric field)

Peki gaussian wave packet'le zaman geçtikçe ne olur?
Bir state olsun $\psi(t)$; position'ın mean value'sı zamanla nasıl değişir?
Gaussian'ın peak değerinin konumu, pozisyonun ortalama değerini verir.
Dalga paketi, dispersive durumda ya da dolayısıyla, pozisyonun ortalama değeride değişir.

$$\langle \psi(t) | x^2 | \psi(t) \rangle = ? = \langle x^2 \rangle (t)$$

$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ olsun;

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{d}{dt} \langle \psi | x^2 | \psi \rangle + \langle \psi | x^2 \frac{d}{dt} | \psi \rangle$$

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = H\psi \qquad H^{+} = H \text{ (hermitian)}$$

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi | = \langle \psi | H$$

$$\frac{d}{dt} \langle \psi | = \frac{\langle \psi | H |}{-i\hbar}$$

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{1}{-i\hbar} \langle \psi | x^2 H | \psi \rangle + \frac{\langle \psi | x^2 H | \psi \rangle}{i\hbar}$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \langle \psi | [x^2, H] | \psi \rangle \text{ 'dir.}$$

$$[x^2, H] = \frac{1}{2m} [x^2, p^2] = \frac{1}{2m} \{ x [x, p^2] + [x, p^2] x \}$$

x ile p komute etmediği için sıra önemli burada;

$$= \frac{1}{2m} \{ xp[x,p] + x[x,p]p + p[x,p]x + [x,p]px \}$$

Sıra çok önemli.

$$= \frac{2i\hbar}{2m} \{ xp + px \} = \frac{i\hbar}{m} (xp + px) =$$

$\Rightarrow$ Antikomutatör benim değeridir.

$$= \frac{1}{m} \langle (xp + px) \rangle$$

$= \frac{1}{m} \langle (xp + px) \rangle$ Bunu pozisyon bazında yapalım;

$= \frac{1}{m} \langle \psi(t) | xp + px | \psi(t) \rangle$

Bunu pozisyon uzayında yazalım; $p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

$$= \frac{-i\hbar}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi^*(x,t) \left\{ x \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}}_{p} \psi(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}(x\, \psi(x,t)) \right\}$$

$$= \frac{-i\hbar}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\psi^* x \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} x \psi \right) - \underbrace{\frac{i\hbar}{m} \psi^*(x,t)\, x\, \psi(x,t) \Big|_{-\infty}^{+\infty}}$$

$$\int v\,du = uv \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int u\,dv$$

$\frac{\partial}{\partial x} x \psi(x,t) = dv$

$v = x\psi(x,t)$ olur.

Ancak $-\infty, +\infty$'da dalga fonksiyonları hâlâ SIFIRA gittiğinden, sadece baştaki integralli terim kalır.

Buradaki x'leri dışarı alabiliriz:

$$= \frac{\hbar}{mi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot x \underbrace{\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right)}$$

$J(x,t)$'dir. Yani current density'dir.

$$= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot x\, J(x,t) \rightarrow \text{probability current density}$$

Şimdi bunu Heisenberg representation'da çözelim;

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{1}{m} \langle (xp + px) \rangle$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle = \frac{1}{mi\hbar} \left\langle \left[xp + px, \frac{p^2}{2m} + V(x) \right] \right\rangle$$

Heisenberg picture'da herhangi bir operatörün zamana türevi;

Subject : Date : ....../....../......

X, V ile 'de commute eder.

O operatörün Hamiltonyenle komutasyonuna eşittir.

Free particle olursa nasıl olur? $V(x)=0$;

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x^2\rangle = \langle [xp+px, \tfrac{p^2}{2m}]\rangle$$

In the case of free particle, momentum commutes with Hamiltonian;

So momentum eigenstates are also the eigenstates of the Hamiltonian.

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x^2\rangle = \frac{1}{2mi\hbar}\langle [x,p^2]p + p[x,p^2]\rangle$$

$$= \frac{2}{m^2}\langle p^2\rangle$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle x^2\rangle = \frac{2\langle p^2\rangle}{m}$$

Integralini alalım;

$$\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle = \frac{2\langle p^2\rangle}{m}t + \underbrace{\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle\Big|_{t=0}}_{\text{constant}=K_0}$$

$$\langle x^2\rangle(t) = \frac{\cancel{2}\langle p^2\rangle}{m}\frac{t^2}{\cancel{2}} + K_0 t + \langle x^2\rangle\Big|_{t=0}$$

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [x,H]\rangle \Rightarrow$$ Heisenberg picture'e göre.

$$= \frac{1}{2i\hbar m}\langle [x, p^2]\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \frac{1}{2i\hbar m}2i\hbar\langle p\rangle = \frac{\langle p\rangle}{m}$$

$$\boxed{\langle x\rangle(t) = \frac{\langle p\rangle}{m}t + \langle x\rangle\Big|_{t=0}}$$

Yani expectation value'nun zamanla değişimi, klasik fiziktekı harekete benzer.

QM'deki expectation values obey the classical equations of motion.

Date: ..../..../....

Subject:

CamScanner ile tarandı

That is the content of the Ehrenfest theorem.

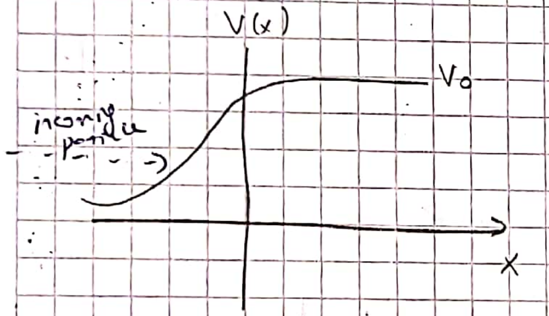
$$\Delta x = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle (t)$$
$$= \langle x^2 \rangle (t) - [\langle x \rangle (t)]^2 \quad \} \text{ ödev!}$$

Yani expectation value, t ile değişiyor. Yani packet disperse oluyor.

Uncertainty zamanla artar mı? Evet artar, yani dispersion var.

Yani wave packet increases with time.

- Scattering from a potential barrier - 1D -



Böyle bir potansiyele karşı parçacık ne yapar?

Total energy can not be negative.

If the total energy is less than V_0, a portion of wave function bariyeri geçer ve exponansiyel olarak azalır, ve wavefunction geri yansır.

Klasik olarak ise, parçacığın enerjisi V_0'dan büyükse, parçacık biraz hız kaybederek bariyerden geçer ve yoluna devam eder. Çünkü toplam enerji korunumludur ve parçacık kinetik enerjisinin bir kısmını potansiyel enerji olarak harcar.

QM'de ise parçacığın enerjisi V_0'dan büyükse ilginç bir şey olur. Parçacığın bir kısmı geçer, bir kısmı ise yansır.

$\underline{E > V_0}$ What wavefunction does here?

Burada parçacık sabit bir parçacıktır ve dalga fonksiyonu sinüzoidaldir.

Incident wave $\cong e^{ikx}$ olsun, where $\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$ 'dir.

Bu plane wave olduğundan, normalizable değildir. Yani plane wave normalizable olmadığı için $-\infty, +\infty$'a kadar extend olur. It's not a bound state because $E > 0$, so the particle is a free particle.

Sağ tarafta transmitted wave function $= Ae^{ik'x}$

$$k'^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}$$

k', is reduced from k when it transmits to the other side.

Reflected wave function $= Be^{-ikx}$; Parçacık başlangıçtaki bulunduğu bölgeye döndüğünde k yine $k = \frac{2mE}{\hbar^2}$ olur.

As $x \to -\infty$ $\quad \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

As $x \to \infty$ $\quad \psi(x) = Ae^{ik'x}$ olur.

What's the probability current?

$$J = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\right) \text{'dir.}$$

Current probability, for the incident wave,

$J \Rightarrow \psi = e^{ikx} \Rightarrow \psi^* = e^{-ikx}$

$\frac{\partial \psi}{\partial x} = ik e^{ikx}$ $\qquad \frac{\partial \psi^*}{\partial x} = -ik e^{ikx}$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$J = \frac{\hbar}{2mi}\left(e^{-ikx} \cdot ik \, e^{ikx} + e^{ikx} \, ik \, e^{ikx}\right)$$

$$= \frac{\hbar k}{\cancel{2}m} e^{ikx} \left(\frac{e^{-ikx} + e^{ikx}}{\cancel{2}}\right) \to \cos x$$

Transmittance coefficient $= \frac{\text{Transmitted Current}}{\text{Incident Current}}$ ile hesaplanır.

$J = \frac{\hbar k}{m} e^{ikx} \cdot \cos x \Rightarrow$ for the transmitted wave function.

Reflectance coefficient $= \frac{\text{Reflected Current probability}}{\text{Incident Current Probability}}$

Of course Transmittance coefficient + Reflectance Coefficient = 1

Date: ...../...../.......

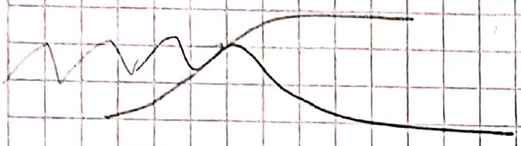
Subject:

Dalga fonksiyonun sürekli olması için $\psi'(0^-) = \psi'(0^+)$ olmalıdır.

Eğer $E < V_0$ ise; ilk kısımdaki çözüm aynıdır. Ama bariyer içerisinde

$$k' = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$$ olduğundan $E-V_0$ negatif olacağından

k' imaginary olur. Yani bariyerin içinde; dalga fonksiyonu dies off.

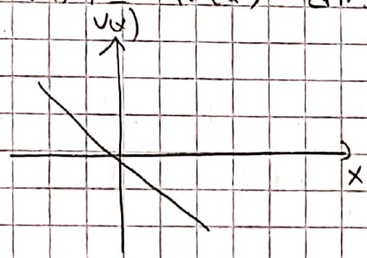


Eğer confining potential yoksa, bound state yoktur. Ve bound state yoksa bu statele normalizable değildir.

Particle in a constant force field;

Sabit bir $\vec{E}$ elektrik alan altında e ne yapar?

$V(x) = -F.(x)$ dir. Yani $V(x)$ böyle bir potansiyel olur.



$\vec{E}$ elektrik alan sabit ise, kuvvet'de sabittir.

Bu potansiyel $V(x) = -F.x$, confining bir potansiyel olmadığı için, bound state yoktur. Ve statele dolayısıyla normalizable değildir.

Potansiyel ötelenebilir değeri olabilir, tabiki $\vec{E}$ 'de öyle; Stationary state'ler aynı.

$$-\infty < E < \infty$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + V(x)\phi(x) = E\phi(x)$$

Stationary state corresponding to energy E, lar aynı. E has a continuous spectrum from -infinity to infinity.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} - Fx\,\phi(x) = E\phi(x)$$

n = 0 'dan başlayan hepsinde.

It's not a trivial equation due to $-Fx$ term; once $-$ (negatif işaretinden) kurtulalım;

$$+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi_E(x)}{dx^2} + Fx\,\phi_E(x) = -E\phi_E(x)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + Fx\,\phi_E(x) + E\phi_E(x) = 0$$

$$\phi''(x) + (E + Fx)\frac{2m}{\hbar^2}\,\phi_E(x) = 0$$

$$\xi = \frac{2m}{\hbar^2}(E + Fx) \text{ olsun;}$$

$$\phi''(\xi) + \xi\,\phi(\xi) = 0$$

Bu Airy's equation'dır.

– Power series solutions to ODE –

Find the general solution of $L(y) = 0$ when coefficients are not constant.
Bu durumda power serisini kullanabiliriz.

Key theorem: If p and q are analytic for $|x - x_0| < R$ then every solution of

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

Analytic demek; all derivatives are exists and represented by convergent power series. (That is the meaning of "analytic" in the real case). Yani analytic ise türevi vardır ve convergent bir seri şeklinde yazılabilir p ve q.
Bu durumda p ve q x'in tüm değerleri için ($x < R$ olmalı), power serisi şeklinde yazılabilir. Örneğin $x = 1$, $x = 2$ civarında power serisi şeklinde yazılabilir.

Örneğin e^x analitik olup, tanım kümesinin her noktasında Taylor serisi olarak açılabilir.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$; Bu seri tüm x değerleri için yakınsar, bu da

e^x'in analitik olduğunu gösterir.

Subject : Date : ..../..../....

e^x'in seri toplamında her bir seri terimi eklendikçe, e^x'e daha da yaklaşır. Bu nedenle e^x, yakınsak bir power series şeklinde yazılabilir. Bu nedenle bu e^x aynı zamanda her term için analitiktir.

Yani p ve q analitik olduğunda her general solution vardır handa, bu çözüm convergent power series şeklinde yazılabilir.

<u>Örnek</u> $y'' + y = 0$ Burda katsayılar sabit olduğundan bunu sabit katsayılı ODE gibi de çözebiliriz. Yani çözüm $y = A\sin x + B\cos x$ şeklindedir.

Ya da $p = 0$ ve $q = 1$ olduğunda yani analitik olduğundan, power series şeklinde de çözebiliriz. Yani çözüm;

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n \text{ şeklinde yazılabilir.} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a^n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \ldots \text{ şeklindedir.}$$

Seriler de polinomlar gibi integrallenebilir ayrı ayrı türevlenebilir v.s.

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \text{ olur.}$$

Bu serilerin hepsi convergent power series'dir.

Bunları ODE'de yerine yazalım;

Ama sekle oynuyor.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n} = 0 \text{ olur.}$$

Bunun için katsayılar sıfır olmalıdır. Ama önce sekle uymalıdır.

$n-2$'yi n yapmak için $+2$ eklemeliyiz.

O zaman $n=0$'dan başlar.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+2-1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \text{ olur.}$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n\right] x^n = 0 \text{ olur.}$$

Subject: Date: ....../....../......

CamScanner ile tarandı

Bu tür serilerde seri toplamı $n=0$'dan başlayacak hepsinde.

$$\boxed{a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}}$$ ⇒ Bu recursion equationdır.

∴ Pick a_0 and a_1 arbitrarily in the Recursion equation.

a_0 ve a_1 olacak şekilde a_n'de $n=0$ ve $n=1$ seçebiliriz.

$$a_2 = -\frac{a_0}{2.1} = -\frac{a_0}{2!} \qquad a_3 = -\frac{a_1}{3.2} = -\frac{a_1}{3!}$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{4.3} = \frac{a_0}{4!} \qquad a_5 = \frac{a_1}{5!}$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{6.5} = -\frac{a_0}{6!}$$

Şimdi tüm katsayıları biliyoruz. Dolayısıyla aşağıdaki;

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = (a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots)$$

$$+ (a_1 + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots)$$

$$= a_0 \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6} + \dots\right)}_{I} + a_1 \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)}_{II}$$

I ve II lineer bağımsız fonksiyonlar olduğundan general solution'ı bulduk.

$$y = a_0 h(x) + a_1 g(x) \text{ 'dir.}$$

$$I = h(x) = \cos x$$

$$II = g(x) = \sin x \text{ dir.}$$

General solution $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$ 'dir.

Date :......../......../........ Subject :

CamScanner ile tarandı

x non-constant

Example $y'' + xy = 0$ Power serisi olarak çözülemez-

Çünkü $q(x)$ not a constant değildir.

Bunu power serisiyle çözebiliriz, separation of variable ile çözemeyiz.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n . a_n . (n-1) x^{n-2}$$

Bunları yerine yazalım;

$$\sum_{n=2}^{\infty} n a_n (n-1) x^{n-2} + x . \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n . a_n (n-1) x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

x^{n+1} 'i x^{n-2} gibi yapmak için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$ 'de

-3 ekleriz;

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_{(n-3)} x^{n-2} \text{ olur;}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n . a_n . (n-1) x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} a_{(n-3)} x^{n-2} = 0 \text{ olur.}$$

Şimdi $\sum_{n=2}$ ile $\sum_{n=3}$ aynı değil.

$\sum_{n=2}^{\infty}$ 'li kısmı ilk terimi alıp ayrı ayrı yazabiliriz, o zaman geriye

$\sum_{n=3}$ 'den başlaması yeterli olur.

Yani $n=2$ iken;

$$2 . a_2 . (2-1) x^0 + \sum_{n=3}^{\infty} n a_n (n-1) x^{n-2} \text{ olur.}$$

Birayo ikinci kısmı da ekleodik;

$$2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n.(n-1)\, a_n\, x^{n-2} + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3}\, x^{n-2} = 0$$

Artık x üstler ile $\sum_{n=i}$ indisler aynı olduğundan tam by tam ekleyebiliriz.

$$2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[n(n-1)\, a_n + a_{n-3} \right] x^{n-2} = 0$$

Bunun doğru olması için polinomun tüm katsayıları sıfır olmalıdır.

Yani $2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

$$n.(n-1)\, a_n + a_{n-3} = 0$$

$$a_n = -\frac{a_{n-3}}{n(n-1)}$$ Recursion function bulunur.

$a_2 = 0$ ve for $n \geq 3$ için; Çünkü seri toplamı $n=3$'den başlıyor.

$\therefore$ Pick a_0 and a_1 at random;

$a_3 = \frac{-a_0}{3.2}$ $a_6 = \frac{-a_3}{6.5} = \frac{a_0}{6.5.3.2}$ $a_5 = \frac{-a_2}{5.4} = 0$

$a_4 = -\frac{a_1}{4.3}$ $a_7 = \frac{-a_4}{7.6} = \frac{a_1}{7.6.4.3}$ $a_8 = a_{11} = a_{14} = 0$

General solution (linear independent functionlardan oluşuyor)

$$y = (a_0 + a_3 x^3 + a_6 x^6 + \dots) + (a_1 x + a_4 x^4 + a_7 x^7 + \dots)$$

$$+ (a_2 x^2 + a_5 x^5 + a_8 x^8 + \dots)$$

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^3}{3.2} + \frac{x^6}{6.5.3.2} - \dots\right) + a_1 \left(x - \frac{x^4}{4.3} + \frac{x^7}{7.6.4.3} + \dots\right)$$

Diferansiyel equation değiştikçe, general solution'da bulunan power serisinin adı değişir.

Tekrar edelim Airy's equation'ı;

Bu ODE, sabit bir Elektrik alan altındaki parçacığın zamandan bağımsız Schrödinger equation'ını çözerken karşımıza çıkmıştı.

Example $y'' - xy = 0 \Rightarrow$ Bu ODE'nin katsayısı X sabit olmadığı için göre Power series yöntemi ile çözülür ve karşımıza Airy function 'lar çözüm olarak çıkar.

Bu defa bunu Fourier transform ile de çözebiliriz.

$y'' - xy = 0$ Bunun çözümü Airy function olarak verilir.

Yani Airy function bu ODE'yi sağlar.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0 \qquad A_i(x) \text{ satisfies this ODE.}$$

$$0 = \frac{d^2 A_i}{dx^2} - x A_i$$

Fourier transform için; $x \to i\frac{d}{dk}$ $\frac{d}{dx} \to ik$ yazalım;

$$0 = (ik)^2 A_i - i\frac{d}{dk} \cdot A_i$$ dır. Her yeri k ile çarpalım;

$$\frac{dA_i}{dk} - ik^2 A_i = 0 \quad \text{in the k-space.}$$

Şimdi: First order ODE'ye sahibiz ve bunu seperek edip integrali alalım.

$$\int \frac{dA_i}{A_i} = i\int k^2\, dk$$

$$\log A_i = \frac{ik^3}{3}$$

$$A_i(k) = e^{ik^3/3}$$

Şimdi $A_i(x)$'i bulmalıyız. Şimdi inverse fourier transform'u alacağız.

Fourier transform; $$f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \cdot e^{-ikx} f(x)$$

inverse fourier transform $= f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikx} f(k)$

Şimdi son bulduğumuz durumun inverse fourier transformunu uygulayalım;

$$A_i(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikx} e^{ik^3/3} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \underbrace{e^{i(kx + k^3/3)}}_{\text{Buraya Euler formülünü uygula}}$$

$$A_i(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk . \cos(kx + k^3/3) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk . i \sin(kx + k^3/3)$$

$-\infty +\infty$ aralığında sinüs'ün integrali $= 0$'dır.

$$A_i(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk . \cos(kx + k^3/3) \Rightarrow \text{Burası çift integraldir.}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ 2 \int_0^{\infty} dk . \cos(kx + k^3/3) \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk . \cos(kx + k^3/3)$$

$$A_i(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk . \cos(kx + k^3/3) \text{ olur.}$$

Bunu Dif'de yerine yazalım;

$$\frac{d^2 A_i}{dx^2} - x A_i = 0$$

$$\frac{dA_i}{dx} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk . k . \sin(kx + k^3/3)$$

$$\frac{d^2 A_i}{dx^2} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk . k^2 . \cos(kx + k^3/3)$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk . k^2 . \cos(kx + k^3/3) - x \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk . \cos(kx + k^3/3)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} dk . (k^2 + x) \cos(kx + k^3/3) \right]$$

$\cancel{k}x + \frac{k^3}{3} = u$

$x + \cancel{3}k^2 / \cancel{3} = du$

$(x + k^2)\, dk = du$

$dk = \frac{du}{k^2 + x}$

$$= -\frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} \frac{du}{\cancel{k^2+x}} . (\cancel{k^2+x}) . \cos u \right.$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty \sin u\right] = -\frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty \sin\left(kx + k^3/3\right)\right] =$$

Sinus oscillates between $-1, 1$ and average is ZERO, so that;

$$-\frac{1}{\pi}\left[\sin\left(kx + k^3/3\right)\Big|_0^\infty\right] = 0$$ olarak bulunur. Yani Airy functions satisfy the $y'' - xy = 0$ ODE.

Bu dalga fonksiyonları normalizable değildir, Bu nedenle spektrum discrete değildir, Ama momentum uzayında normalize edilebilirler.

A charged particle in magnetic field in time-independent Schrödinger equation –

Bu durumda $H = \dfrac{(\vec{p} - eA)^2}{2m}$ $\qquad A = \vec{A}(r)$

$\vec{A}$ doesn't commute with $\vec{p}$ (momentum)

Buradaki ifadeyi

$$H = \frac{(\vec{p} - eA)^2}{2m}$$ açarak yazmak gerekiyor.

$$\left(\vec{p}\vec{A} - \vec{A}\vec{p}\right) = -i\hbar\, \nabla\cdot\vec{A} \qquad \text{(Derive this)!}$$

Commute edebilmesi için Gauge invariance kullanmak gerekir.

Gauge invariance kullanırsak $[\vec{p}, \vec{A}] = 0$ commute eder.

Bu problemde uniform constant magnetic field var kabul ediyoruz sistemde.

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left(\vec{B} \times \vec{r}\right)$$ şeklinde yazalım

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$ 'yi vermeli

$\nabla \cdot (\vec{B}) = 0 \Rightarrow \quad \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ 'dır. (Matematiksel olarak)

$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{2} B_l \, \epsilon_{ijk} \, \epsilon_{ljk} = \vec{B}_i$ 'dır.

Manyetik alanı $\vec{B}_z$ z yönünde alalım; Bunun olabilmesi için vector potansiyelinin yani x ve y yönünde olmalıdır.

$$\vec{A} = \left(-\frac{1}{2} By, \frac{1}{2} Bx, 0\right)$$

Hatta $\vec{A}' = A + \nabla \chi$ şeklinde bile seçebiliriz.

Yani magnetic field eğer sabitse, vector potansiyelini istediğimiz transverse yönlerden birinde seçebiliriz. Örneğin manyetik alan z yönünde ise, vektör potansiyeli (x,y) yönünde olabilir.

Dolayısıyla vektör potansiyelini istediğimiz şekilde seçebiliriz, fizik değişmez. (Probability ve değişmez). Yani manyetik alan z yönünde ise, vektör potansiyelin z yönünde komponenti olmayacak şekilde seçebiliriz.

Şimdi pozisyon uzayında bu Schrödinger denklemini çözebiliriz.

Çünkü $\vec{P} = -i\hbar \nabla$ olarak yazılabilir konum uzayında.

Vektör potansiyelini $\vec{B}_y$ yönünde alalım;

$$H = \frac{(P_x + eB_y)^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{P_z^2}{2m} \quad \text{olur.}$$

P_x ile B_y commute eder.

z yönünde $\frac{P_z^2}{2m}$ sadece serbest parçacık gibi davranıyor.

$\frac{P_x^2}{2m}$ 'de serbest parçacık gibi. Ama B_y^2 'li terim,

$\frac{P_x^2}{2m}$ 'le karıştırılırsa, dalga fonksiyonları x ve y yönünde mix oluyor gibi düşünebiliriz.

Date : ...../...../.......   Subject :

Bu parçacığın hızı ne olur?

$$\vec{P} = m\vec{v} + e\vec{A} \quad \text{(Bu kanonikal momentumdur)}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{P} - e\vec{A}}{m} \quad \text{olur.}$$

$[v_x, v_y] = ?$ Ne olur. Eğer $\vec{A}$ olmasaydı v_x ve v_y komute ederlerdi birbirleriyle. Ama $\vec{A}$ olunca nasıl olur? Manyetik alanda QM'de farklı şeyler oluyor.

$$[v_x, v_y] = \frac{1}{m^2}[P_x - eA_x, P_y - eA_y] = \frac{1}{m^2}\{e[A_y, P_x]$$

$$- e[A_x, P_y]\}$$

En genel $\boxed{[f(x), P(x)] = i\hbar f'(x)}$ 'dir.

$$= \frac{e}{m^2}\left\{ i\hbar \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right\} \text{ olur.}$$

$$= \frac{e}{m^2}\left\{ i\hbar \underbrace{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y} \right)}_{B_z \text{'dir.}} \right\} = \frac{i\hbar}{m^2} e B_z \text{ olur.}$$

$$\boxed{[v_i, v_j] = \frac{i\hbar}{m^2} e\, \epsilon_{ijk} B_k}$$

v_i ve v_j commute etmediği için ikisini aynı anda ölçemeyiz.

) Manyetik alan yüklü bir parçacık koyduğumuzda v_x, v_y'yi aynı anda ölçemeyiz çünkü komute etmiyor.

And what happens to the hamiltonian?

Subject: Date: ....../....../......

CamScanner ile tarandı

Let $B \Rightarrow \vec{B_z}$; Hamiltonian şöyle olur

$$\mathcal{H} = \frac{\Pi_x^2 + \Pi_y^2}{2m} + \frac{P_z^2}{2m}$$

Yani B'ye transverse yöndeki momentum artık sadece P_x veya P_y' değildir. $\vec{B}$ ile aynı yönde e^-, serbest parçacık iken, $\vec{B}$'ye dik yönlerde momentum değişmiştir.

Bu Hamiltonian harmonic osilatör hamiltonyene benzemektedir.

Let $a = \frac{\Pi_x + i\Pi_y}{\sqrt{2eB\hbar}}$ olsun.

$\underbrace{mV = \bar{p} - e\bar{A} = \Pi}_{\text{hepsi hermitian operatör.}}$

$$a^+ = \frac{\Pi_x - i\Pi_y}{\sqrt{2eB\hbar}}$$

Π_x ve Π_y ide hermitian olduğundan; $a^+ = a$'nın kompleks konjugesidir.

$$aa^+ = \frac{1}{2eB\hbar}\left\{\Pi_x^2 + \Pi_y^2 + i\left(\Pi_x\Pi_y - \Pi_y\Pi_x\right)\right\}$$

$$[\Pi_i, \Pi_j] = i\hbar e\, \epsilon_{ijk} B_k \text{ idi}$$

$$aa^+ = \frac{\Pi_x^2 + \Pi_y^2}{2eB\hbar} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{eB\hbar}{m}\left(aa^+ + \frac{1}{2}\right) + \frac{P_z^2}{2m} = \mathcal{H}$$

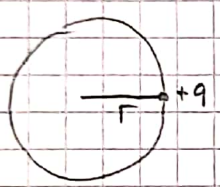
Dolayısıyla problemi harmonik osilatör problemine indirgenmiş oldu, parçacık z yönünde free particle iken, dönen x ve y yönünde harmonic oscillator yapar. Fakat bu hamiltonyeni kesikli pelken özdeğerleri hepsi quantizedir.

$$\mathcal{H} = \frac{eB\hbar}{m}\left(aa^{\dagger} + 1/2\right) + \frac{p_z^2}{2m}$$

Cyclotron frequency; $\frac{eB}{m}$'in dimensionu frekanstır.

Eğer parçacığın hızı, manyetik alana transverse yönde ise, paralel olan yönde ise hareketi yani doğan doğrusal hareket yapmaya devam ede. Cyclotron frekansı dahi bura.

Bu parçacığın açısal momentumu; $L = mr^2\omega$'dır.



$\mu = IA$'dır. $\Rightarrow I \cdot \pi r^2$

$I = \frac{e}{T}$'dir.

$$\mu = \frac{e}{T}\cdot\pi r^2 \Rightarrow \frac{e}{\cancel{2\pi}}\,\omega\,\cancel{\pi} r^2 = \frac{e}{2}\overbrace{r^2\omega\, m}^{L}\frac{1}{m}$$

$\mu = \frac{e}{2}\cdot\frac{\vec{L}}{m}$'dir. $\frac{\vec{\mu}}{L} = \frac{e}{2m}$ $g \rightarrow$ gyromagnetic ratio

Dolayısıyla herhangi bir quantum mechanical açısal momentum operatörü;

$$\boxed{\vec{J}\,\frac{g\,e}{2m} = \vec{\mu}}$$ 'dür $\Rightarrow$ Quantum mekaniksel $\vec{\mu}$.

g-factor

$\vec{J} \rightarrow$ spin operator for the electron

$\frac{\hbar}{2}\,g\,\frac{e}{2m_e} = \vec{\mu}_e \Rightarrow$ intrinsic magnetic moment of e^-

eigenvalues of $\vec{J}$

$g = 2$ bir elektron için;

$$\mu = \frac{\hbar}{2} \cdot 2 \cdot \frac{e}{2m_e} \Rightarrow \frac{\hbar e}{2m_e} \Rightarrow \mu_{Bohr} \Rightarrow \text{Bohr magnetonu}$$

g'nin tam olarak hesaplanması Quantum field theory ile mümkündür.

$\frac{eB}{m} \Rightarrow$ cyclotron frekansı olduğu için Hamiltonyeni yeniden yazabiliriz.

$$H = \hbar w_c \left(a^\dagger a + 1/2 \right) + \frac{P_z^2}{2m} \quad , \quad [a, a^\dagger] = 1$$

Şimdi özdeğeri bulabiliriz. Ancak özdeğerler $(a^\dagger a + 1/2)$ teriminden dolayı harmonik osilatör katkısı ve $\frac{P_z^2}{2m}$ teriminden dolayı free particle katkısı vardır. Parçacık z yönünde free parçacık gibi davranıyor.

Bir parçacığı z yönünde magnetik alanda hareket ederken, parçacık helical bir yörüngede hareket eder. Hareket, magnetik alan dik düzlemde bakıldığında dairesel iken, z yönündeki başlangıç hızından dolayı helical'dir. So it's a helix. Dolayısıyla bir eksende baktığımızda circular motion (cyclotron frekansı ile) yaparken, diğer eksende helical bir yörüngede hareket eder. Kuantum mekaniksel olarak, enerji seviyeleri bu free motion'ı içerirken aynı zamanda cyclotron frekanslı hareketi de içerir. Yani enerji seviyeleri

$$\boxed{E(n, k_z) = \hbar w_c \left(n + 1/2 \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}} \quad \text{olur.}$$

Harmonik osilatörde her enerji seviyesi n ile değiştiğinden, harmonik osilatörde özdeğerler dejenere değildir. Yani harmonik osilatörde every level is unique.

Fakat burada bulduğumuz özdeğerler dejenerate'dir. Landau Levels.

Şimdi bu hamiltonyen için dalga fonksiyonunu yazalım;

Single free particle'ın obaydı; $H = \frac{P^2}{2m}$;

$$H\psi = E\psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dy^2} = E\phi$$

$\Rightarrow \phi = Ae^{ikx}, Be^{-ikx}$ şeklindeydi. Yani parçacığın momentumunu biliyorsak ($p^2/2m$); parçacığın nerede olduğunu bilemeyiz ve çözümler dalga şeklinde olur. Dalga fonksiyonları k ile sürekli olarak değişir.

Dolayısıyla position is completely uncertain. Because the uncertainty in position for a plane wave is infinite, because wave function is a plane wave.

Bu dalga fonksiyonları, box'a koymadığımız sürece parçacığı, normalizable değildir.

Ne tür dalga fonksiyonları $E(n, k_z) = \hbar w_c\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$

şeklinde özdeğerleri verir.

Pozisyon uzayında bu yeni Schrödinger denklemini çözelim.

Ancak dalga fonksiyonunu açıkça yazabilmek için, vektör potansiyeline de açıkça yazmamız gerekiyor. Manyetik alan, cyclotron frekansı içerisinde yazılıyor $\left(\frac{eB}{m}\right)$ içerisinde.

$$H = \frac{(\vec{P} - eA)^2}{2m} \qquad \vec{A} = (-By, 0, 0)$$

What is the time-independent Schrödinger equation?

$$H = \frac{(P_x + eBy)^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{P_z^2}{2m}$$

$$= \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2m} + \frac{e.B.y.P_x}{m} + \frac{e^2B^2y^2}{2m}$$

Subject :

Date : ....../....../......

CamScanner ile tarandı

$\vec{P} = -i\hbar\nabla$ 'dir pozisyon uzayında.
y ile P_x komute etmez

$$H\phi(\vec{r}) = E\phi(\vec{r})$$

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{i\hbar e B y}{m}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e^2B^2y^2}{2m}\right)\phi(\vec{r}) = E\phi(\vec{r})$$

$$\phi(\vec{r}) = e^{ik_x x}\, e^{ik_z z} \cdot f(y)$$

Bunu Schrödinger'de yerine yazalım;

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}k_x^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2f}{dy^2} + \frac{\hbar k_x e B}{m}yf + \frac{e^2B^2}{2m}y^2 f\right) = Ef$$