4.9.) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ ve $ad-bc=1$ matrislerinin grup oluşturduğunu gösterelim

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kümenin bir elemanıdır. Öyleyse birim eleman bulunur.
- $A \in G$ kümenin herhangi bir elemanı olsun.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\det A}_{=1}} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

olduğundan $A^{-1} \in G$'dir. Her elemanın tersi bulunur.

- $A, B \in G$ kümenin herhangi iki elemanı olsunlar.

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \; B=\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}, \; a,b,c,d,k,l,m,n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow A.B=\begin{pmatrix} ak+bm & al+bn \\ ck+dm & cl+dn \end{pmatrix}$$

ve

$$B.A=\begin{pmatrix} ka+mc & kb+ld \\ ma+nc & mb+nd \end{pmatrix}$$

olup yine elemanları tamsayılardan oluşan matrislerdir. Kapalılık sağlanıyor.

- Matris çarpımı asosyatiftir.

$\therefore$ Öyleyse yukarıdaki küme bir gruptur.

İkinci durak şu elemanların mertebelerini kontrol edelim:

- $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

  $A^4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^5=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=5$

- $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^2=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B|=3$

- $AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^3=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow (AB)^4=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots (AB)^n=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow |AB| \to \infty$

- $BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (BA)^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (BA)^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots$

  $\Rightarrow |BA| \to \infty$

5.1.) $\mathbb{Z}_4=\{0,1,2,3\}$ grubunun alt gruplarını bulunuz.

$\langle 0\rangle=\{0\}, \ \langle 1\rangle=\langle 3\rangle=\mathbb{Z}_4, \ \langle 2\rangle=\{0,2\}$

$\mathbb{Z}_7=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ grubunun alt grupları:

$\langle 0\rangle=\{0\}, \langle 1\rangle=\langle 2\rangle=\langle 3\rangle=\langle 4\rangle=\langle 5\rangle=\langle 6\rangle=\mathbb{Z}_7$

$\mathbb{Z}_{12}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ grubunun alt grupları:

$\langle 0\rangle=\{0\}$

$\langle 6\rangle=\{0,6\}$

$\langle 4\rangle=\langle 8\rangle=\{0,4,8\}$

$\langle 3\rangle=\langle 9\rangle=\{0,3,6,9\}$

$\langle 2\rangle=\langle 10\rangle=\{0,2,4,6,8,10\}$

$\langle 1\rangle=\langle 5\rangle=\langle 7\rangle=\langle 11\rangle=\mathbb{Z}_{12}$

$D_4=\{e,r,r^2,r^3,s,rs,r^2s,r^3s\}$ grubunun alt grupları:

$\langle e\rangle=\{e\}$, $\langle r,s\rangle=\langle rs,s\rangle=\langle r^2s,s\rangle=\langle r^3s,s\rangle=D_4$

$\langle r^2\rangle=\{e,r^2\}$, $\langle s\rangle=\{e,s\}$, $\langle rs\rangle=\{e,rs\}$,

$\langle r^2s\rangle=\{e,r^2s\}$, $\langle r^3s\rangle=\{e,r^3s\}$

$\langle r\rangle=\langle r^3\rangle=\{e,r,r^2,r^3\}$, $\langle r^2,s\rangle=\{e,r^2,s,r^2s\}$, $\langle r^2,rs\rangle=\{e,r^2,rs,r^3s\}$

$D_5=\{e,r,r^2,r^3,r^4,s,rs,r^2s,r^3s,r^4s\}$ grubunun alt grupları:

$\langle e\rangle=\{e\}$

$\langle s\rangle=\{e,s\}$, $\langle rs\rangle=\{e,rs\}$, $\langle r^2s\rangle=\{e,r^2s\}$, $\langle r^3s\rangle=\{e,r^3s\}$, $\langle r^4s\rangle=\{e,r^4s\}$

$\langle r\rangle=\langle r^2\rangle=\langle r^3\rangle=\langle r^4\rangle=\{e,r,r^2,r^3,r^4\}$

$\langle r,s\rangle=\langle rs,s\rangle=\cdots=D_5$

5.3.) rs ve r^2s-in birlikte D_n'i ürettiğini gösteriniz.

$(rs)(rs)=r.r^{n-1}.s.s=r^n.s^2=e \in \langle rs,r^2s\rangle$

$(r^2s)(rs)=r^2.r^{n-1}.s.s=r^{n+1}.s^2=r \in \langle rs,r^2s\rangle$

$(rs).r=r.r^{n-1}s=r^n.s=s \in \langle rs,r^2s\rangle$

r ve s-in $\langle rs,r^2s\rangle$ tarafından üretilen alt grubun içinde bulunduğunu gösterdik.

∴ Biliyoruz ki r ve s birlikte D_n-i üretirler çünkü

$$\langle r\rangle=\{e,r,r^2,\dots,r^{n-1}\}$$

$$\Rightarrow \langle r,s\rangle=\{e,r,r^2,\dots,r^{n-1},s,rs,r^2s,\dots,r^{n-1}s\}$$

5.4.) D_n-in r^2 ve r^2s tarafından üretilen alt gruplarını bulunuz. n-in tek ve çift olduğu durumları kontrol ediniz.

$n=2m$ çift olsun:

r^2, m kere kendisiyle çarpılırsa, $(r^2)^m=r^{2m}=e$ bulunur.

Öyleyse;

$$\langle r^2\rangle=\{e,r^2,r^4,\dots,r^{2m-2}\}$$

ve

$(r^2s)(r^2s)=r^2\cdot r^{2m-2}\cdot s^2=e$ olduğundan $|r^2s|=2$'dir.

Öyleyse;

$$\langle r^2s\rangle=\{e,r^2s\}$$

$n=2m-1$ tek ise:

r^2, m kere kendisiyle çarpılırsa

$$(r^2)^m=r^{2m}=r^{2m-1}\cdot r=r$$

$$\Rightarrow \langle r^2\rangle=\{e,r,r^2,\dots,r^{2m-2}\}$$

ve

$$(r^2s)\cdot(r^2s)=r^2\cdot(r^2)^{-1}\cdot s^2=e$$

$$\Rightarrow \langle r^2s\rangle=\{e,r^2s\}$$

ikisinin birlikte ürettiği alt grup:

n=2m çift ise:

$(r^2 s).r^2 = r^2.(r^2)^{-1}s = s$

ve yukarıda gördük ki r^2 nin ürettiği terimler $\{e, r^2, r^4, \ldots, r^{2m-2}\}$ olduğundan bunların s ile çarpımı da kümede bulunur.

$\Rightarrow \langle r^2, r^2 s\rangle = \{e, r^2, r^4, \ldots, r^{2m-2}, s, r^2 s, r^4 s, \ldots, r^{2m-2}s\}$

n=2m-1 tek ise:

Bu durumda ise r^2 tarafından üretilen küme $\{e, r, r^2, \ldots, r^{2m-2}\}$ olduğundan ve $(r^2 s).r^2 = s$ sağlandığından

$\langle r^2, r^2 s\rangle = \{e, r, r^2, \ldots, r^{2m-2}, s, rs, r^2 s, \ldots, r^{2m-2}s\} = D_n$

elde edilir.

6.1.) $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ çarpım tablosu

	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
e	e	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
(12)	(12)	e	(132)	(123)	(23)	(13)
(13)	(13)	(123)	e	(132)	(12)	(23)
(23)	(23)	(132)	(123)	e	(13)	(12)
(123)	(123)	(13)	(23)	(12)	(132)	e
(132)	(132)	(23)	(12)	(123)	e	(123)

6.2.) S_8'in aşağıdaki elemanlarını ayrık döngülerin çarpımı olarak ve makasların çarpımı olarak yazın

a.) $\begin{bmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 7&6&4&1&8&2&3&5 \end{bmatrix} = (1734)(26)(58)$

$= (14)(13)(17)(26)(58) \notin A_8$ çünkü tek permütasyondur.

b.) $(4568)(1245) = (125)(468)$

$= (15)(12)(48)(46) \in A_8$ çift permütasyondur.

c.) $(624)(253)(876)(45) = (25687)(34)$

$= (27)(28)(26)(25)(34) \notin A_8$ tektir.

6.8.) $\alpha, \beta \in S_n$ ise $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$-in her zaman A_n'de bulunduğunu gösteriniz ve β çift permütasyon olduğunda $\alpha\beta\alpha^{-1}$-in A_n'de bulunduğunu gösteriniz.

$\alpha \in S_n$ tek permütasyon ise $\alpha^{-1} \in S_n$ de tek permütasyondur.
$\alpha \in S_n$ çift " ise $\alpha^{-1} \in S_n$ de çift " .

α bir m-döngü ve β bir n-döngü olsun. O halde $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ bir $2(m+n)$-döngü olur. Dolayısıyla bir çift permütasyondur ve A_n-in içindedir.

Benzer şekilde β bir çift permütasyon ve α bir m-döngü ise, $\alpha\beta\alpha^{-1} = 2m + |\beta|$ olur ve dolayısıyla yine bir çift permütasyondur. Sonuç olarak

$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \in A_n$ ve $\alpha\beta\alpha^{-1} \in A_n$ //

$n=4$ ve $\alpha=(2143)$, $\beta=(423)$ alırsak

$$\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}=(2143)(423)(2341)(432)$$
$$=\underbrace{(23)(24)(21)(43)(42)(21)(24)(23)(42)(43)}_{\text{çift}}\in A_4$$

ve

$$\alpha\beta\alpha^{-1}=(2143)(423)(2341)$$
$$=\underbrace{(23)(24)(21)(43)(42)(21)(24)(23)}_{\text{çift}}\in A_4$$

6.11.) 6.2'deki permütasyonların mertebesini bulunuz.

- $S_1=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&6&4&1&8&2&3&5\end{bmatrix}=(1734)(26)(58)$

(1734) 4. mertebe, $(26)(58)$ 2. mertebe

olduklarından yukarıdaki çarpımın mertebesi

$$|S_1|=\text{okek}(4,2)=4$$

- $S_2=(4568)(1245)=(125)(468) \Rightarrow |S_2|=\text{okek}(3,3)=3$

- $S_3=(624)(253)(876)(45)=(25687)(34)$

$$\Rightarrow |S_4|=\text{okek}(5,2)=10$$

7.1.) $\{1,2,4,5,7,8\}$ kümesinin mod(9)'a göre çarpma altında bir grup oluşturduğunu ve $\mathbb{Z}_6$-ya izomorf olduklarını gösteriniz.

$\cdot_{mod(9)}$	1	2	4	5	7	8
1	1	2	4	5	7	8
2	2	4	8	1	5	7
4	4	8	7	2	1	5
5	5	1	2	7	8	4
7	7	5	1	8	4	2
8	8	7	5	4	2	1

çarpım tablosundan kapalılık, birim eleman ve ters eleman bulunma koşullarının sağlandığı görülür.

$\mathbb{Z}_6=\{0,1,2,3,4,5\}$

$+_{(mod 6)}$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$2^{-1}=7,\ 7^{-1}=2$

$e=1 \to e=0$, $2 \to 1$, $4 \to 2$, $5 \to 5$, $7 \to 4$, $8 \to 3$

$1^{-1}=4,\ 4^{-1}=1$

İzomorfizm birim elemanları birbirine yollar.!

Her iki grupta da kendisinin tersi olan tek eleman.

Birinci grupta 2 ve 7 birbirlerinin tersi ve 4 ve 5 birbirlerinin tersidir.

$\mathbb{Z}_6$'da da 1 ve 4 ile 2 ve 5 birbirlerinin tersleridir.

İzomorfizm tersleri terslere gönderir.

Kontrol edilebilir ki bu gönderim çarpımları korur;

yani $x,y \in G=\{1,2,4,5,7,8\}$ ise

$$\phi(x \cdot y)=\phi(x)\cdot\phi(y)$$

$$\rightarrow \phi(x \cdot_{mod(9)} y)=\phi(x)+_{mod(6)}\phi(y)$$

7.3.) $\{e,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}=G$ kümesi A_4-ün bir alt grubudur. Bunun satranç tahtasının simetri grubuna izomorf olduğunu gösteriniz.

G	e	$\overset{r}{(12)(34)}$	$\overset{g_1}{(13)(24)}$	$\overset{g_2}{(14)(23)}$
e	e	$(12)(34)^{r}$	$(13)(24)^{g_1}$	$(14)(23)^{g_2}$
$(12)(34)$	$\overset{r}{(12)(34)}$	e	$\overset{g_2}{(14)(23)}$	$\overset{g_1}{(13)(24)}$
$(13)(24)$	$\overset{g_1}{(13)(24)}$	$\overset{g_2}{(14)(23)}$	e	$\overset{r}{(12)(34)}$
$(14)(23)$	$\overset{g_2}{(14)(23)}$	$\overset{g_1}{(13)(24)}$	$\overset{r}{(12)(34)}$	e

G'	e	r	g_1	g_2
e	e	r	g_1	g_2
r	r	e	g_2	g_1
g_1	g_1	g_2	e	r
g_2	g_2	g_1	r	e

Görüldüğü gibi her iki grup da 4. mertebeden ve bütün elemanlarının mertebesi ise 2'dir. Öyleyse;

$e \rightarrow e$

$(12)(34) \rightarrow r$

$(13)(24) \rightarrow g_1$

$(14)(23) \rightarrow g_2$

gönderimi tanımlanırsa grup çarpımları korunur.

Gönderim 1-1 ve örten olma şartını sağladığından bir izomorfizmdir.

7.12.) S_4-ün (1234) ve (24) tarafından üretilen altgrubunun D_4-e izomorf olduğunu gösteriniz.

$\alpha=(1234) \Rightarrow \alpha^2=(13)(24)$, $\alpha^3=(1432)$ ve $\alpha^4=e$ //

$\therefore$ Öyleyse $\alpha^{-1}=\alpha^3$ olduğu sonucunu çıkarabiliriz çünkü

$$\alpha^4=e \Rightarrow \alpha^{-1}/\alpha\alpha^3=e \Rightarrow \alpha^3=\alpha^{-1}$$

$$\Rightarrow (1234)^{-1}=(1432)$$

$\beta=(24)$ bir mataş olduğundan mertebesi 2'dir; yani

$$\beta^2=e \,/\!/ \Rightarrow \beta=\beta^{-1}$$

$\therefore$ Öyleyse elimizde mertebesi 4 olan bir terim ile mertebesi 2 olan ikinci bir terim bulunuyor. Grubun toplam 8 elemanı bulunur:

$$G=\{e,\alpha,\alpha^2,\alpha^3,\beta,\alpha\beta,\alpha^2\beta,\alpha^3\beta\}$$

- $\beta\alpha=(24)(1234)=(14)(23)$ ve

  $(1423)(24)=(14)(23) \Rightarrow \beta\alpha=\alpha^3\beta \Rightarrow \boxed{\beta\alpha=\alpha^{-1}\beta}$

- $\beta\alpha^2=(24)(13)(24)=(13)=\alpha^2\beta \Rightarrow \boxed{\beta\alpha^2=(\alpha^2)^{-1}\beta}$

- $\beta\alpha^3=\alpha\beta \Rightarrow \boxed{\beta\alpha^3=(\alpha^3)^{-1}\beta}$

Bu tam olarak D_4 grubunun sağladığı özelliklerdi

$D_4 = \{e, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s\}$

$r^4 = e \quad , \quad s^2 = e \quad , \quad sr = r^{-1}s$

$\therefore$ Sonuç olarak $D_4 \cong G$ olduğunu söyleyebiliriz.