GRUP KURAMI

Barış YAPIŞKAN

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi

TUBİTAK Temel Bilimler Araştırma Enstitüsü Teorik Parçacık Fiziği Yaz Okulu, 2024

İÇERİK

- Simetriler ve Grup Kavramı

İÇERİK

- Simetriler ve Grup Kavramı
- Grup Aksiyomları

İÇERİK

- Simetriler ve Grup Kavramı
- Grup Aksiyomları
- Sonlu Gruplar

İÇERİK

- Simetriler ve Grup Kavramı
- Grup Aksiyomları
- Sonlu Gruplar
- Lie Grupları ve Lie Cebirleri

İÇERİK

- Simetriler ve Grup Kavramı
- Grup Aksiyomları
- Sonlu Gruplar
- Lie Grupları ve Lie Cebirleri
- Lorentz ve Poincare Grupları

İÇERİK

- Simetriler ve Grup Kavramı
- Grup Aksiyomları
- Sonlu Gruplar
- Lie Grupları ve Lie Cebirleri
- Lorentz ve Poincare Grupları

Simetriler ve Gruplar

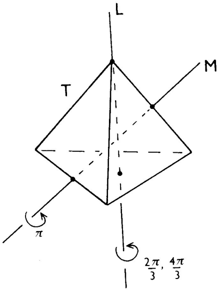
Grup Nedir?

Sayılar nicelikleri ölçer, gruplar ise simetrileri.

Grup Nedir?

Sayılar nicelikleri ölçer, gruplar ise simetrileri.

- Bir düzgün dört-yüzlünün (tetrahedron) dönme simetrilerine bakalım.

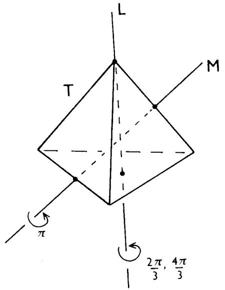


İki tip simetri ekseni bulunur.

Grup Nedir?

Sayılar nicelikleri ölçer, gruplar ise simetrileri.

- Bir düzgün dört-yüzlünün (tetrahedron) dönme simetrilerine bakalım.



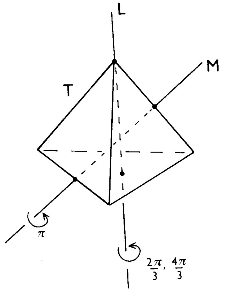
İki tip simetri ekseni bulunur.

- **L** : Bir köşeden ve karşısındaki yüzün orta noktasından geçen eksen (4 tane). Bu eksen etrafındaki $2\pi/3$ ve $4\pi/3$'lük dönmeler cismi simetrik bırakır.

Grup Nedir?

Sayılar nicelikleri ölçer, gruplar ise simetrileri.

- Bir düzgün dört-yüzlünün (tetrahedron) dönme simetrilerine bakalım. İki tip simetri ekseni bulunur.

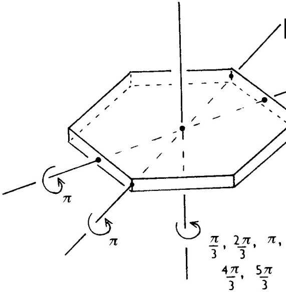


- **L** : Bir köşeden ve karşısındaki yüzün orta noktasından geçen eksen (4 tane). Bu eksen etrafındaki $2\pi/3$ ve $4\pi/3$'lük dönmeler cismi simetrik bırakır.
- **M** : Karşılıklı iki kenarın orta noktasından geçen eksen (3 tane). Bu eksen etrafındaki π kadarlık dönmeler altında cisim simetriktir.

Simetriler

Bir başka örnek: Düzgün altıgen kenarlı plaka

Bir başka örnek: Düzgün altıgen kenarlı plaka



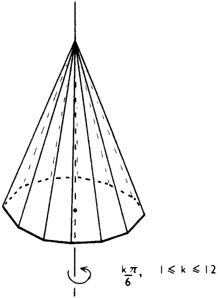
Burada üç farklı tipte simetri ekseni bulunur.

- **1. Tip** : Plakanın düzlemine dik ve merkezinden geçen eksen. (1 tane)
- **2. Tip** : Karşılıklı iki kenarın orta noktasından geçen eksen. (3 tane)
- **3. Tip** : Karşılıklı iki köşeden geçen eksen. (3 tane)

Simetriler

Son örneğimiz: Düzgün onikigen tabanlı piramit

Son örneğimiz: Düzgün onikigen tabanlı piramit



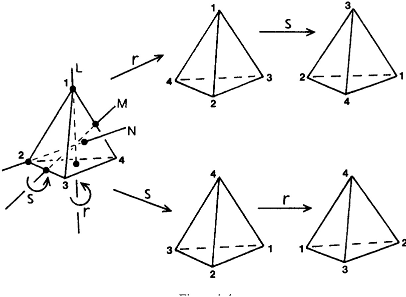
Piramit için tek bir simetri ekseni bulunur. Piramidin tepesinden ve tabanının merkezinden geçen eksen. Bu eksen etrafındaki $k\pi/6, k = 1, \cdots, 12$ dönmeleri piramidin bir simetrisini oluşturur.

- Üç örnekte de toplam 12 tane simetri dönüşümü bulunur. Fakat bu üç cismin aynı simetriye sahip olmadıkları açıktır.

- Üç örnekte de toplam 12 tane simetri dönüşümü bulunur. Fakat bu üç cismin aynı simetriye sahip olmadıkları açıktır.
- Farklılıklara bakacak olursak: piramidin tek bir simetri ekseni bulunur ve bu eksen etrafındaki $\pi/6$ dönmesini ard arda uygulayarak piramidin diğer bütün simetrilerini elde edebiliriz. Diğer iki örnek için bu geçerli değildir.

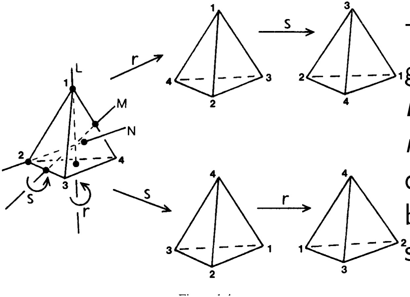
- Üç örnekte de toplam 12 tane simetri dönüşümü bulunur. Fakat bu üç cismin aynı simetriye sahip olmadıkları açıktır.
- Farklılıklara bakacak olursak: piramidin tek bir simetri ekseni bulunur ve bu eksen etrafındaki $\pi/6$ dönmesini ard arda uygulayarak piramidin diğer bütün simetrilerini elde edebiliriz. Diğer iki örnek için bu geçerli değildir.
- Bir başka farklılık; piramidin herhangi iki simetrisini alıp ard arda uyguladığımızda piramidin bir başka simetrisini elde ederiz ve bu iki simetriyi hangi sırada uyguladığımızın bir önemi yoktur. Tetrahedron ve altıgen plaka için bu özellik de geçerli değildir.

- Örneğin tetrahedrona yakından bakalım:



Tetrahedronun köşelerini şekildeki gibi sayılar ile etiketleyelim. Ayrıca, $L-$ekseni etrafındaki $2\pi/3$ dönmesini r ile ve $M-$ekseni etrafındaki π dönmesini s ile etiketlersek, bunların birleşimi olan rs ile sr dönmeleri farklı sonuçlar verecektir.

- Örneğin tetrahedrona yakından bakalım:



Tetrahedronun köşelerini şekildeki gibi sayılar ile etiketleyelim. Ayrıca, $L-$ekseni etrafındaki $2\pi/3$ dönmesini r ile ve $M-$ekseni etrafındaki π dönmesini s ile etiketlersek, bunların birleşimi olan rs ile sr dönmeleri farklı sonuçlar verecektir.

- Öyleyse bunların simetrilerini ayırt edecek bir araca ihtiyacımız var. Bunu yapmamızı sağlayacak araç grup kavramıdır.

Simetriler

Formel tanımını vermeden önce, incelediğimiz örneklerin hepsinde ortak olan ve grup kavramının temelini oluşturan benzerliklere bakalım:

Simetriler

Formel tanımını vermeden önce, incelediğimiz örneklerin hepsinde ortak olan ve grup kavramının temelini oluşturan benzerliklere bakalım:

Simetrileri Birleştirme

Her üç örnekte de iki simetriyi alıp arka arkaya uyguladığımızda yine bir simetri elde ediyoruz. Yani u ve v cismin simetrileri ise $u \cdot v$ ve $v \cdot u$ da cisimin bir simetrisidir.

Simetriler

Formel tanımını vermeden önce, incelediğimiz örneklerin hepsinde ortak olan ve grup kavramının temelini oluşturan benzerliklere bakalım:

Simetrileri Birleştirme

Her üç örnekte de iki simetriyi alıp arka arkaya uyguladığımızda yine bir simetri elde ediyoruz. Yani u ve v cismin simetrileri ise $u \cdot v$ ve $v \cdot u$ da cisimin bir simetrisidir.

Birim Eleman

Her üç örnekte de uyguladığımızda cismi döndürmeden bırakan özel bir dönme bulunur. Buna Birim Dönme diyebiliriz.

Simetriler

Formel tanımını vermeden önce, incelediğimiz örneklerin hepsinde ortak olan ve grup kavramının temelini oluşturan benzerliklere bakalım:

Simetrileri Birleştirme

Her üç örnekte de iki simetriyi alıp arka arkaya uyguladığımızda yine bir simetri elde ediyoruz. Yani u ve v cismin simetrileri ise $u \cdot v$ ve $v \cdot u$ da cisimin bir simetrisidir.

Birim Eleman

Her üç örnekte de uyguladığımızda cismi döndürmeden bırakan özel bir dönme bulunur. Buna Birim Dönme diyebiliriz.

Ters Eleman

Ortak başka bir özellik, uyguladığımız her dönmenin etkisini tersine çeviren başka bir dönme bulunur.

Birleşim Özelliği

Son olarak, diyelim ki bir cismin üç tane dönme simetrisini aldık. Bunlara u, v, w diyelim. Bunları verilen sırada uyguladığımızı düşünelim. Bu durumda sırayı değiştirmediğimiz sürece bunları nasıl birleştirdiğimizin bir önemi yoktur; yani

$$uvw = (uv)w = u(vw)$$

Grup

Üzerinde bir işlem $(\cdot)$ tanımlı herhangi bir G kümesi şu dört aksiyomu sağlıyorsa bir gruptur

- $x, y \in G$ bu kümenin herhangi iki elemanı ise $x \cdot y \;\; ve \;\; y \cdot x \in G$ (Kapalılık)
- $x, y, z \in G$ bu kümenin elemanları olmak üzere, bunların grup üzerinde tanımlı çarpma işlemi altındaki çarpımları asosyatiftir yani $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot y \cdot z$ (Birleşme(Asosyatiflik))
- G kümesinin e ile gösterilen bir birim elemanı vardır ve $\forall x \in G$ için $e \cdot x = x \cdot e = x$ sağlanır. (Birim Eleman)
- $\forall x \in G$ için $x^{-1} \in G$ ile gösterilen bir ters eleman bulunur ve $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$ sağlanır. (Ters Eleman)

Grup Örnekleri

- Aşağıdaki kümeler toplama işlemi altında grup oluştururlar:
  $\mathbb{Z}$, tam sayılar kümesi,
  $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar kümesi,
  $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesi,
  $\mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesi,

Grup Örnekleri

- Aşağıdaki kümeler toplama işlemi altında grup oluştururlar:
  $\mathbb{Z}$, tam sayılar kümesi,
  $\mathbb{Q}$, rasyonel sayılar kümesi,
  $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesi,
  $\mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesi,
- Aşağıdaki kümeler çarpma işlemi altında grup oluştururlar
  $\mathbb{Q} - \{0\}$, sıfırdan farklı rasyonel sayılar,
  $\mathbb{R} - \{0\}$, sıfırdan farklı reel sayılar,
  $\mathbb{Q}^+$, pozitif rasyonel sayılar,
  $\mathbb{R}^+$, pozitif reel sayılar,
  $\{+1, -1\}$,
  $\mathbb{C} - \{0\}$, sıfırdan farklı kompleks sayılar,
  C, Boyu birim olan kompleks sayılar,
  $\{\mp 1, \mp i\}$.

Abelyen (Komütatif) Grup

$x, y \in G$ olmak üzere eğer $x \cdot y = y \cdot x$ sağlanıyorsa o gruba abelyen veya komütatif denir.

Abelyen (Komütatif) Grup

$x, y \in G$ olmak üzere eğer $x \cdot y = y \cdot x$ sağlanıyorsa o gruba abelyen veya komütatif denir.

Yukarıdaki bütün grup örnekleri abelyendirler çünkü reel veya kompleks sayıların toplama ve çarpma işlemleri yer değiştirme özelliğine sahiptir:

$$x, y \in \mathbb{C} \Rightarrow x + y = y + x, \quad x \cdot y = y \cdot x$$

Dihedral Grup

- Düzgün altıgen plaka örneğini genelleştirirsek, $n \geq 3$ olmak üzere herhangi bir düzgün $n-$gen plakanın dönme simetrileri abelyen olmayan bir grup oluşturur. Buna Dihedral Grup denir ve D_n ile gösterilir.

Dihedral Grup

- Düzgün altıgen plaka örneğini genelleştirirsek, $n \geq 3$ olmak üzere herhangi bir düzgün $n-$gen plakanın dönme simetrileri abelyen olmayan bir grup oluşturur. Buna Dihedral Grup denir ve D_n ile gösterilir.
- $$D_n = \{e, r, r^2, r^3, \cdots, r^{n-1}, s, rs, r^2s, \cdots, r^{n-1}s\}$$

  şeklinde tanımlanır.
  r : plakanın düzlemine dik ve merkezinden geçen eksen
  s : plaka düzlemi içindeki simetri eksenlerinden birisi

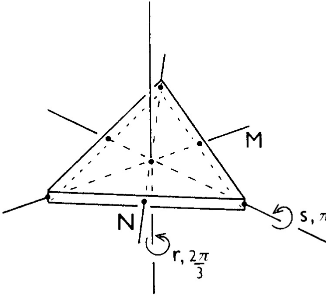
- Düzgün altıgen plaka örneğini genelleştirirsek, $n \geq 3$ olmak üzere herhangi bir düzgün $n-$gen plakanın dönme simetrileri abelyen olmayan bir grup oluşturur. Buna Dihedral Grup denir ve D_n ile gösterilir.
- $$D_n = \{e, r, r^2, r^3, \cdots, r^{n-1}, s, rs, r^2s, \cdots, r^{n-1}s\}$$
  şeklinde tanımlanır.
  r : plakanın düzlemine dik ve merkezinden geçen eksen
  s : plaka düzlemi içindeki simetri eksenlerinden birisi
- $r^n = e$ ve $s^2 = e$ olduğu açıktır. Ayrıca $r^{n-1} = r^{-1}$'dir ve $sr = r^{n-1}s$ olur.
  Bu ilişkiler kullanılarak grup elemanlarının diğer bütün çarpımları üretilebilir.

Çarpım Tablosu

- Grup elemanları arasındaki çarpım ilişkileri grubun çarpım tablosu ile ifade edilebilir.

Çarpım Tablosu

- Grup elemanları arasındaki çarpım ilişkileri grubun çarpım tablosu ile ifade edilebilir.
- Örneğin $n = 3$ için D_3 Dihedral grubu ve buna ait çarpım tablosu şu şekilde oluşur:



	e	r	r^2	s	rs	r^2s
e	e	r	r^2	s	rs	r^2s
r	r	r^2	e	rs	r^2s	s
r^2	r^2	e	r	r^2s	s	rs
s	s	r^2s	rs	e	r^2	r
rs	rs	s	r^2s	r	e	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^2	r	e

$$D_3 = \{e, r, r^2, s, rs, r^2s\}$$

Üreteçler ve Grubun Derecesi

- D_n grubunun bütün elemenları r^a veya $r^a s, \quad 0 \leq a < n-1$ formundadır. Dolayısıyla r ve s'in birliklte D_n grubunu ürettiklerini söyleyebiliriz. Diğer bir deyişle bunlar grubun üreteçleridir.

Üreteçler ve Grubun Derecesi

- D_n grubunun bütün elemenları r^a veya $r^a s, \quad 0 \leq a < n-1$ formundadır. Dolayısıyla r ve s'in birliklte D_n grubunu ürettiklerini söyleyebiliriz. Diğer bir deyişle bunlar grubun üreteçleridir.
- Bir grubun mertebesi o grubun eleman sayısı ile verilir. Eleman sayısı sonlu olan gruplara sonlu gruplar denir. Eleman sayısı sonsuz olan gruplara ise sonsuz gruplar denir. Grubun mertebesi $|G|$ ile gösterilir.

Üreteçler ve Grubun Derecesi

- D_n grubunun bütün elemenları r^a veya $r^a s, \quad 0 \leq a < n-1$ formundadır. Dolayısıyla r ve s'in birliklte D_n grubunu üretti̇klerini söyleyebiliriz. Diğer bir deyişle bunlar grubun üreteçleridir.
- Bir grubun mertebesi o grubun eleman sayısı ile verilir. Eleman sayısı sonlu olan gruplara sonlu gruplar denir. Eleman sayısı sonsuz olan gruplara ise sonsuz gruplar denir. Grubun mertebesi $|G|$ ile gösterilir.
- Eğer $x \in G$ ise ve n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere $x^n = e$ sağlanıyorsa bu durumda x'in sonlu mertebeden olduğu söylenir. Bu eşitliği sağlayan en küçük pozitif m sayısına ise x elemanının mertebesi denir.

Alt Gruplar

Alt Grup

G bir grup ve $H \subset G$ H'ın bir alt kümesi olsun. Eğer H alt kümesi G'de tanımlı çarpma işlemi altında bir grup oluşuruyorsa H' a G'nin bir alt grubu denir ve $H < G$ şeklinde gösterilir.

Alt Grup

G bir grup ve $H \subset G$ H'ın bir alt kümesi olsun. Eğer H alt kümesi G'de tanımlı çarpma işlemi altında bir grup oluşuruyorsa H' a G'nin bir alt grubu denir ve $H < G$ şeklinde gösterilir.

- Örneğin

$$D_6 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, rs, r^2s, r^3s, r^4s, r^5s\}$$

grubunu alırsak, bunun $\{e, r^2, r^4, s, r^2s, r^4s\}$ elemanlarından oluşan alt kümesi bir alt grup oluşturur.

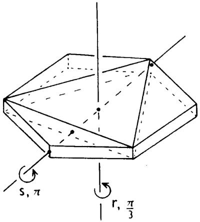
Alt Grup

G bir grup ve $H \subset G$ H'ın bir alt kümesi olsun. Eğer H alt kümesi G'de tanımlı çarpma işlemi altında bir grup oluşuruyorsa H' a G'nin bir alt grubu denir ve $H < G$ şeklinde gösterilir.

- Örneğin

$$D_6 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, rs, r^2s, r^3s, r^4s, r^5s\}$$

grubunu alırsak, bunun $\{e, r^2, r^4, s, r^2s, r^4s\}$ elemanlarından oluşan alt kümesi bir alt grup oluşturur.



Alt Grup Örnekleri

- $\mathbb{Z} < \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} < \mathbb{R}$ ve $\mathbb{R} < \mathbb{C}$'dir.

Alt Grup Örnekleri

- $\mathbb{Z} < \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} < \mathbb{R}$ ve $\mathbb{R} < \mathbb{C}$'dir.
- Çift tamsayılar kümesi $2\mathbb{Z}$ bir grup oluşturur ve $\mathbb{Z}$'nin bir alt grubudur. Genel olarak n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere $n\mathbb{Z}$ kümesi de bir alt grup oluşturur, $n\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$.

Alt Grup Örnekleri

- $\mathbb{Z} < \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} < \mathbb{R}$ ve $\mathbb{R} < \mathbb{C}$'dir.
- Çift tamsayılar kümesi $2\mathbb{Z}$ bir grup oluşturur ve $\mathbb{Z}$'nin bir alt grubudur. Genel olarak n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere $n\mathbb{Z}$ kümesi de bir alt grup oluşturur, $n\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Q} - \{0\} < \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\mathbb{R} - \{0\} < \mathbb{C} - \{0\}$'dir.

Alt Grup Örnekleri

- $\mathbb{Z} < \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} < \mathbb{R}$ ve $\mathbb{R} < \mathbb{C}$'dir.
- Çift tamsayılar kümesi $2\mathbb{Z}$ bir grup oluşturur ve $\mathbb{Z}$'nin bir alt grubudur. Genel olarak n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere $n\mathbb{Z}$ kümesi de bir alt grup oluşturur, $n\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Q} - \{0\} < \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\mathbb{R} - \{0\} < \mathbb{C} - \{0\}$'dir.
- $\{+1, -1\} < C$ ve $C < \mathbb{C} - \{0\}$'dir.

Alt Grup Örnekleri

- $\mathbb{Z} < \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} < \mathbb{R}$ ve $\mathbb{R} < \mathbb{C}$'dir.
- Çift tamsayılar kümesi $2\mathbb{Z}$ bir grup oluşturur ve $\mathbb{Z}$'nin bir alt grubudur. Genel olarak n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere $n\mathbb{Z}$ kümesi de bir alt grup oluşturur, $n\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Q} - \{0\} < \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\mathbb{R} - \{0\} < \mathbb{C} - \{0\}$'dir.
- $\{+1, -1\} < C$ ve $C < \mathbb{C} - \{0\}$'dir.
- Altıgen plakanın düzlemi içindeki dönmeleri bir alt grup oluşturur: $\{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5\} < D_6$

Alt Grup Örnekleri

- $\mathbb{Z} < \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} < \mathbb{R}$ ve $\mathbb{R} < \mathbb{C}$'dir.
- Çift tamsayılar kümesi $2\mathbb{Z}$ bir grup oluşturur ve $\mathbb{Z}$'nin bir alt grubudur. Genel olarak n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere $n\mathbb{Z}$ kümesi de bir alt grup oluşturur, $n\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Q} - \{0\} < \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\mathbb{R} - \{0\} < \mathbb{C} - \{0\}$'dir.
- $\{+1, -1\} < C$ ve $C < \mathbb{C} - \{0\}$'dir.
- Altıgen plakanın düzlemi içindeki dönmeleri bir alt grup oluşturur: $\{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5\} < D_6$
- $\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$ kümesi mod(n) toplama işlemi altında sonlu abelyen bir grup oluşturur. Buna $\mathbb{Z}_n$ grubu denir.
  Örneğin, $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 6. mertebeden bir grup oluşturur ve bunun $\{0, 2, 4\}$ alt kümesi bir alt grup oluşturur.

Çevrimsel Grup

- G bir grup ve $x \in G$ olsun. x'in bütün kuvvetlerinden oluşan küme G'nin bir alt grubunu oluşturur. Bu alt gruba x tarafından üretilen alt grup denir ve $< x >$ ile gösterilir.
  Eğer x'in mertebesi sonsuz ise $< x >= \{\cdots, x^{-2}, x^{-1}, e, x, x^2, \cdots\}$ olur.
  Eğer x sonlu mertebeden bir eleman ise, buna m diyelim, bu durumda $< x >= \{e, x, x^2, \cdots, x^{m-1}\}$ olur. Dolayısıyla $< x >$'in mertebesi x'in mertebesi ile aynıdır.

Çevrimsel Grup

- G bir grup ve $x \in G$ olsun. x'in bütün kuvvetlerinden oluşan küme G'nin bir alt grubunu oluşturur. Bu alt gruba x tarafından üretilen alt grup denir ve $< x >$ ile gösterilir.
  Eğer x'in mertebesi sonsuz ise $< x >= \{\cdots, x^{-2}, x^{-1}, e, x, x^2, \cdots\}$ olur.
  Eğer x sonlu mertebeden bir eleman ise, buna m diyelim, bu durumda $< x >= \{e, x, x^2, \cdots, x^{m-1}\}$ olur. Dolayısıyla $< x >$'in mertebesi x'in mertebesi ile aynıdır.
- Eğer G'nin öyle bir x elemanı bulunuyor ve $< x >= G$ sağlanıyorsa bu durumda G grubuna çevrimsel (cyclic) grup denir.

Çevrimsel Grup

- G bir grup ve $x \in G$ olsun. x'in bütün kuvvetlerinden oluşan küme G'nin bir alt grubunu oluşturur. Bu alt gruba x tarafından üretilen alt grup denir ve $< x >$ ile gösterilir.
  Eğer x'in mertebesi sonsuz ise $< x >= \{\cdots, x^{-2}, x^{-1}, e, x, x^2, \cdots\}$ olur.
  Eğer x sonlu mertebeden bir eleman ise, buna m diyelim, bu durumda $< x >= \{e, x, x^2, \cdots, x^{m-1}\}$ olur. Dolayısıyla $< x >$'in mertebesi x'in mertebesi ile aynıdır.
- Eğer G'nin öyle bir x elemanı bulunuyor ve $< x >= G$ sağlanıyorsa bu durumda G grubuna çevrimsel (cyclic) grup denir.
- $\mathbb{Z}$ sonsuz çevrimsel bir gruptur ve 1 veya -1 tarafından üretilir.
  $\mathbb{Z}_n$ grubu 1 tarafından üretilen n. mertebeden çevrimsel bir gruptur.

- $\mathbb{Z}_6$ içinde
  $< 0 >= \{0\}$,
  $< 1 >=< 5 >= \mathbb{Z}_6$,
  $< 2 >=< 4 >= \{0, 2, 4\}$,
  $< 3 >= \{0, 3\}$

- $\mathbb{Z}_6$ içinde
  $< 0 >= \{0\}$,
  $< 1 >=< 5 >= \mathbb{Z}_6$,
  $< 2 >=< 4 >= \{0, 2, 4\}$,
  $< 3 >= \{0, 3\}$
- D_3 içinde
  $< e >= \{e\}$,
  $< r >=< r^2 >= \{e, r, r^2\}$,
  $< s >= \{e, s\}$,
  $< rs >= \{e, rs\}$,
  $< r^2s >= \{e, r^2s\}$

Teorem1:

Bir G grubunun boş olmayan bir alt kümesi H, ancak ve ancak $x, y \in H$ iken $xy^{-1} \in H$ ise G'nin bir alt grubu olur.

Teorem1:

Bir G grubunun boş olmayan bir alt kümesi H, ancak ve ancak $x, y \in H$ iken $xy^{-1} \in H$ ise G'nin bir alt grubu olur.

Teorem2:

Bir grubun iki alt grubunun kesişimi yine bir alt gruptur.

Teorem1:

Bir G grubunun boş olmayan bir alt kümesi H, ancak ve ancak $x, y \in H$ iken $xy^{-1} \in H$ ise G'nin bir alt grubu olur.

Teorem2:

Bir grubun iki alt grubunun kesişimi yine bir alt gruptur.

Teorem3:

$\mathbb{Z}$'nin her alt grubu çevrimseldir, ve genel olarak çevrimsel bir grubun her alt grubu da çevrimseldir.

Permütasyonlar ve Simetrik Grup

- X herhangi bir küme olsun. Bu kümenin elemanları arasında tanımlanan bire-bir ve örten bir gönderime (bijection) bir permütasyon denir. X'in bütün permütasyonlarından oluşan küme bir grup oluşturur ve S_X ile gösterilir. Eğer X sonsuz bir küme ise S_X'in mertebesi de sonsuz olur. Eğer X kümesi ilk n pozitif tamsayıdan oluşan küme ise bunun permütasyonlarından oluşan küme S_n olarak gösterilir ve n. dereceden simetrik grup olarak adlandırılır. Bu durumda S_n'in mertebesi $n!$'dir.

- X herhangi bir küme olsun. Bu kümenin elemanları arasında tanımlanan bire-bir ve örten bir gönderime (bijection) bir permütasyon denir. X'in bütün permütasyonlarından oluşan küme bir grup oluşturur ve S_X ile gösterilir. Eğer X sonsuz bir küme ise S_X'in mertebesi de sonsuz olur. Eğer X kümesi ilk n pozitif tamsayıdan oluşan küme ise bunun permütasyonlarından oluşan küme S_n olarak gösterilir ve n. dereceden simetrik grup olarak adlandırılır. Bu durumda S_n'in mertebesi $n!$'dir.
- Örneğin $X = \{1, 2, 3\}$ olarak alınırsa S_3 grubu

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ile verilir.

- X herhangi bir küme olsun. Bu kümenin elemanları arasında tanımlanan bire-bir ve örten bir gönderime (bijection) bir permütasyon denir. X'in bütün permütasyonlarından oluşan küme bir grup oluşturur ve S_X ile gösterilir. Eğer X sonsuz bir küme ise S_X'in mertebesi de sonsuz olur. Eğer X kümesi ilk n pozitif tamsayıdan oluşan küme ise bunun permütasyonlarından oluşan küme S_n olarak gösterilir ve n. dereceden simetrik grup olarak adlandırılır. Bu durumda S_n'in mertebesi $n!$'dir.
- Örneğin $X = \{1, 2, 3\}$ olarak alınırsa S_3 grubu

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ile verilir.

- S_n'in $n \geq 3$ için abelyen olmadığını görmek kolaydır. Örneğin S_3 grubunun iki elemanı alınır ve farklı sıralarda çarpılırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

- S_n'in $n \geq 3$ için abelyen olmadığını görmek kolaydır. Örneğin S_3 grubunun iki elemanı alınır ve farklı sıralarda çarpılırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

  elde edilir.
- Permütasyonları döngüler (çevrim) ile ifade etmek daha kullanışlı olacaktır. Örneğin

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 8 & 9 & 3 & 6 & 2 & 7 & 5 & 4 \end{bmatrix} = (2856)(394)$$

- S_n'in $n \geq 3$ için abelyen olmadığını görmek kolaydır. Örneğin S_3 grubunun iki elemanı alınır ve farklı sıralarda çarpılırsa

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

  elde edilir.
- Permütasyonları döngüler (çevrim) ile ifade etmek daha kullanışlı olacaktır. Örneğin

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 1 & 8 & 9 & 3 & 6 & 2 & 7 & 5 & 4\end{bmatrix} = (2856)(394)$$

- k uzunluğundaki $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ döngüsüne bir $k-$döngü denir ve bunun mertebesi k'dır.
  Uzunlukları k ve l olan iki döngünün çarpımının mertebesi $ekok(k, l)$ ile verilir.

- S_n'in $n \geq 3$ için abelyen olmadığını görmek kolaydır. Örneğin S_3 grubunun iki elemanı alınır ve farklı sıralarda çarpılırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

  elde edilir.
- Permütasyonları döngüler (çevrim) ile ifade etmek daha kullanışlı olacaktır. Örneğin

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 8 & 9 & 3 & 6 & 2 & 7 & 5 & 4 \end{bmatrix} = (2856)(394)$$

- k uzunluğundaki $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ döngüsüne bir $k-$döngü denir ve bunun mertebesi k'dır.
  Uzunlukları k ve l olan iki döngünün çarpımının mertebesi $ekok(k, l)$ ile verilir.
- $k = 2$ için olan ve sadece iki elemanın yerini değiştiren $(a_m a_n)$ döngüsüne bir makas (transpozisyon) denir.
  $(1a)$ türündeki makaslara temel makas denir. S_n'de $n-1$ tane temel makas bulunur.

- S_n'in her elemanı ayrık döngüsel permütasyonlar cinsinden yazılabilir. Burada ayrık ile kastımız her elemanın sadece tek bir döngüde görünmesidir.

- S_n'in her elemanı ayrık döngüsel permütasyonlar cinsinden yazılabilir. Burada ayrık ile kastımız her elemanın sadece tek bir döngüde görünmesidir.
- S_3'ün elemanlarını döngüler cinsinden yazacak olursak:

$$e, (12), (13), (23), (123), (132)$$

olacaktır.

- S_n'in her elemanı ayrık döngüsel permütasyonlar cinsinden yazılabilir. Burada ayrık ile kastımız her elemanın sadece tek bir döngüde görünmesidir.
- S_3'ün elemanlarını döngüler cinsinden yazacak olursak:

$$e, (12), (13), (23), (123), (132)$$

  olacaktır.
- Ayrık döngülerin çarpımı yer değiştirebilir. α ve β S_n'in iki ayrık permütasyonu ise

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

  dır.

- S_n'in her elemanı ayrık döngüsel permütasyonlar cinsinden yazılabilir. Burada ayrık ile kastımız her elemanın sadece tek bir döngüde görünmesidir.
- S_3'ün elemanlarını döngüler cinsinden yazacak olursak:

$$e, (12), (13), (23), (123), (132)$$

olacaktır.
- Ayrık döngülerin çarpımı yer değiştirebilir. α ve β S_n'in iki ayrık permütasyonu ise

$$\alpha\beta = \beta\alpha$$

dır.
- S_n içindeki makaslar birlikte S_n'i üretirler çünkü herhangi bir $k-$döngü makaslar cinsinden

$$(a_1, a_2, \cdots, a_k) = (a_1 a_k)(a_1 a_{k-1}) \cdots (a_1 a_3)(a_1 a_2))$$

şeklinde yazılabilir.
Bu yazım tek türlü değildir.

Teorem4:

$(12), (13), \cdots, (1n)$ temel makasları birlikte S_n'i üretirler.
Benzer şekilde $(12), (23), \cdots, (n-1n)$ ardışık makasları da birlikte S_n'i üretirler.

Teorem4:

$(12), (13), \cdots, (1n)$ temel makasları birlikte S_n'i üretirler.
Benzer şekilde $(12), (23), \cdots, (n-1n)$ ardışık makasları da birlikte S_n'i üretirler.

Teorem5:

(12) transpozisyonu ve $(12\cdots n)$ $n-$döngüsü birlikte S_n'i üretirler.

Teorem4:

$(12), (13), \cdots, (1n)$ temel makasları birlikte S_n'i üretirler.
Benzer şekilde $(12), (23), \cdots, (n-1n)$ ardışık makasları da birlikte S_n'i üretirler.

Teorem5:

(12) transpozisyonu ve $(12\cdots n)$ $n-$döngüsü birlikte S_n'i üretirler.

- Teoremleri ispatlamak için

$$(ab) = (1a)(1b)(1a)$$

ve

$$(1k) = (k-1k)\cdots(34)(23)(12)(23)(34)\cdots(k-1k)$$

olduklarını gözlemlemek yeterli olacaktır.

- S_n'in verilen bir elemanı makasların çarpımı olarak farklı şekillerde yazılabilir, fakat bu farklı yazımlardaki makasların sayısı her zaman ya tektir ya da çifttir.

- S_n'in verilen bir elemanı makasların çarpımı olarak farklı şekillerde yazılabilir, fakat bu farklı yazımlardaki makasların sayısı her zaman ya tektir ya da çifttir.
- Buradan hareketle S_n'in bir elemanı tek sayıdaki makasların çarpımı olarak yazılabiliyorsa buna tek permütasyon, çift sayıdaki makasların çarpımı olarak yazılabiliyorsa buna çift permütasyon denir.

Teorem6:

S_n içindeki çift permütasyonlar mertebesi $\frac{n!}{2}$ olan bir alt grup oluşturur. Bu alt gruba n. dereceden Alterne Grup A_n denir.

- S_n'in verilen bir elemanı makasların çarpımı olarak farklı şekillerde yazılabilir, fakat bu farklı yazımlardaki makasların sayısı her zaman ya tektir ya da çifttir.
- Buradan hareketle S_n'in bir elemanı tek sayıdaki makasların çarpımı olarak yazılabiliyorsa buna tek permütasyon, çift sayıdaki makasların çarpımı olarak yazılabiliyorsa buna çift permütasyon denir.

Teorem6:

S_n içindeki çift permütasyonlar mertebesi $\frac{n!}{2}$ olan bir alt grup oluşturur. Bu alt gruba n. dereceden Alterne Grup A_n denir.

Teorem7:

$n \geq 3$ için $3-$döngüler A_n'i üretir.

Örneğin A_4'ün 12 elemanı

$$e, (12)(34), (13)(24), (14)(23),$$

$$(123), (124), (134), (234),$$

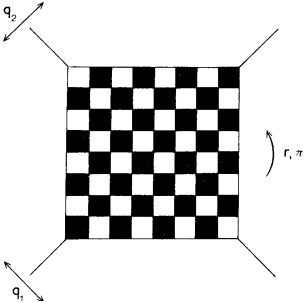
$$(132), (142), (143), (243)$$

ile verilir.
Burada kolaylıkla görülebilir ki

$$(13)(24) = (13)(12)(14)(12) = (123)(124)$$

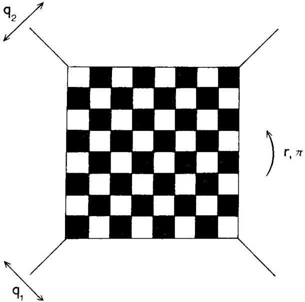
olarak yazılabilir.

İzomorfizmler



Satranç tahtasının 3 tane simetrisi bulunur. Tahta düzlemine dik ve tahtanın merkezinden geçen eksen etrafındaki π dönmesi ile tahtanın köşegenlerine göre yansımalara karşılık gelen şekildeki q_1 ve q_2 dönmeleri. Bunlar bir grup oluşturur.

İzomorfizmler



Satranç tahtasının 3 tane simetrisi bulunur. Tahta düzlemine dik ve tahtanın merkezinden geçen eksen etrafındaki π dönmesi ile tahtanın köşegenlerine göre yansımalara karşılık gelen şekildeki q_1 ve q_2 dönmeleri. Bunlar bir grup oluşturur.

Diğer taraftan $\{1, 3, 5, 7\}$ kümesi $mod(8)$'e göre çarpma işlemi altında bir grup oluşturur. Bu iki grubun çarpım tablolarını karşılaştıracak olursak aradaki benzerlik hemen göze çarpar.

	e	r	q_1	q_2
e	e	r	q_1	q_2
r	r	e	q_2	q_1
q_1	q_1	q_2	e	r
q_2	q_2	q_1	r	e

	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

Gerçekten de

$$e \to 1, r \to 3, q_1 \to 5, q_2 \to 7$$

eşleştirmesi yapılırsa gruplarda tanımlı çarpma işlemlerinin korunduğu görülür.

Gerçekten de

$$e \to 1, r \to 3, q_1 \to 5, q_2 \to 7$$

eşleştirmesi yapılırsa gruplarda tanımlı çarpma işlemlerinin korunduğu görülür.

İzomorfizm

G ve G' iki grup olsun. G ve G' arasında $\forall x, y \in G$ için $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ olacak şekilde bire-bir ve örten bir ϕ gönderimi bulunuyorsa bu ϕ gönderimine bir izomorfizm denir. Bu durumda G ve G' gruplarına izomorfturlar denir ve $G \cong G'$ olarak gösterilir.

- Tetrahedronun simetri grubu T'nin 12 elemandan oluşan abelyen olmayan bir grup olduğunu daha önce gördük. Tetrahedronun köşelerinin $1, 2, 3, 4$ ile etiketlenmesi ile bu simetrilerden herbirinin S_4 grubundan bir elemana karşılık geldiğini görmek kolaydır. Aslında bunlar tam olarak A_4 grubunun elemanlarına karşılık gelir ve böylece $T \cong A_4$ olur.

- Tetrahedronun simetri grubu T'nin 12 elemandan oluşan abelyen olmayan bir grup olduğunu daha önce gördük. Tetrahedronun köşelerinin $1, 2, 3, 4$ ile etiketlenmesi ile bu simetrilerden herbirinin S_4 grubundan bir elemana karşılık geldiğini görmek kolaydır. Aslında bunlar tam olarak A_4 grubunun elemanlarına karşılık gelir ve böylece $T \cong A_4$ olur.
- G, mertebesi n olan herhangi bir sonlu çevrimsel grup ise $G \cong \mathbb{Z}_n$'dir. $x \in G$, G grubunun üreteci ise

$$\phi : G \to \mathbb{Z}_n$$

izomorfizmi $\phi(x^m) = m(mod n)$ olarak tanımlanabilir.

- Tetrahedronun simetri grubu T'nin 12 elemandan oluşan abelyen olmayan bir grup olduğunu daha önce gördük. Tetrahedronun köşelerinin $1, 2, 3, 4$ ile etiketlenmesi ile bu simetrilerden herbirinin S_4 grubundan bir elemana karşılık geldiğini görmek kolaydır. Aslında bunlar tam olarak A_4 grubunun elemanlarına karşılık gelir ve böylece $T \cong A_4$ olur.
- G, mertebesi n olan herhangi bir sonlu çevrimsel grup ise $G \cong \mathbb{Z}_n$'dir. $x \in G$, G grubunun üreteci ise

$$\phi : G \to \mathbb{Z}_n$$

izomorfizmi $\phi(x^m) = m(mod n)$ olarak tanımlanabilir.
- D_3 dihedral grubunun S_3'e izomorfik olduğu gösterilebilir.

- Bütün $(n \times n)$ ters çevrilebilir matrislerin kümesi, matris çarpımı altında bir grup oluşturur. Bu gruba Genel Lineer Grup, GL_n adı verilir. Matris elemanları reel sayılardan oluşuyorsa grup $GL_n(\mathbb{R})$ ve kompleks sayılardan oluşuyorsa $GL_n(\mathbb{C})$ olarak adlandırılır.

- Bütün $(n \times n)$ ters çevrilebilir matrislerin kümesi, matris çarpımı altında bir grup oluşturur. Bu gruba Genel Lineer Grup, GL_n adı verilir. Matris elemanları reel sayılardan oluşuyorsa grup $GL_n(\mathbb{R})$ ve kompleks sayılardan oluşuyorsa $GL_n(\mathbb{C})$ olarak adlandırılır.
- Bu grubun her elemanı A, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A^t$ yoluyla $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir lineer dönüşüm tanımlar.

$$f_{AB}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(AB)^t = \mathbf{x}B^tA^t = f_A(f_B(\mathbf{x}))$$

olduğundan AB matris çarpımı $f_A f_B$ bileşke lineer dönüşümüne karşılık gelir.

- Bütün $(n \times n)$ ters çevrilebilir matrislerin kümesi, matris çarpımı altında bir grup oluşturur. Bu gruba Genel Lineer Grup, GL_n adı verilir. Matris elemanları reel sayılardan oluşuyorsa grup $GL_n(\mathbb{R})$ ve kompleks sayılardan oluşuyorsa $GL_n(\mathbb{C})$ olarak adlandırılır.
- Bu grubun her elemanı A, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A^t$ yoluyla $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir lineer dönüşüm tanımlar.

$$f_{AB}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(AB)^t = \mathbf{x}B^tA^t = f_A(f_B(\mathbf{x}))$$

olduğundan AB matris çarpımı $f_A f_B$ bileşke lineer dönüşümüne karşılık gelir.

- $(n \times n)$ bir A matrisi
$$A^t A = \mathbb{I}$$
koşulunu sağlıyorsa ortogonaldir denir. $(n \times n)$ ortogonal matrislerin kümesi bir grup oluşturur ve GL_n'in bir altgrubudur. Bu alt gruba Ortogonal Grup, O_n denir.

- $(n \times n)$ bir A matrisi
$$A^t A = \mathbb{I}$$
koşulunu sağlıyorsa ortogonaldir denir. $(n \times n)$ ortogonal matrislerin kümesi bir grup oluşturur ve GL_n'in bir altgrubudur. Bu alt gruba Ortogonal Grup, O_n denir.
- Eğer A ve B ortogonal iki matris ise
$$(AB^{-1})^t AB^{-1} = (B^{-1})^t A^t AB^{-1} = \mathbb{I}$$
elde ederiz. Dolayısıyla AB^{-1} de ortogonaldir. Teorem gereği ortogonal matrislerin kümesi GL_n'in bir alt grubunu oluştururlar.

- $(n \times n)$ bir A matrisi
$$A^t A = \mathbb{I}$$
koşulunu sağlıyorsa ortogonaldir denir. $(n \times n)$ ortogonal matrislerin kümesi bir grup oluşturur ve GL_n'in bir altgrubudur. Bu alt gruba Ortogonal Grup, O_n denir.
- Eğer A ve B ortogonal iki matris ise
$$(AB^{-1})^t AB^{-1} = (B^{-1})^t A^t AB^{-1} = \mathbb{I}$$
elde ederiz. Dolayısıyla AB^{-1} de ortogonaldir. Teorem gereği ortogonal matrislerin kümesi GL_n'in bir alt grubunu oluştururlar.
- $$det(A^t A) = 1 \to (detA)^2 = 1$$
olduğundan $detA = \pm 1$ elde edilir. Bu durumda A matrisinin satır veya sütünları boyları 1 olan vektörler tanımlarlar ve birbirlerine diktirler. Satır veya sütun vektörleri $\mathbb{R}^n$ uzayının ortonormal bir bazını oluştururlar.

- $(n \times n)$ bir A matrisi
$$A^t A = \mathbb{I}$$
koşulunu sağlıyorsa ortogonaldir denir. $(n \times n)$ ortogonal matrislerin kümesi bir grup oluşturur ve GL_n'in bir altgrubudur. Bu alt gruba Ortogonal Grup, O_n denir.
- Eğer A ve B ortogonal iki matris ise
$$(AB^{-1})^t AB^{-1} = (B^{-1})^t A^t AB^{-1} = \mathbb{I}$$
elde ederiz. Dolayısıyla AB^{-1} de ortogonaldir. Teorem gereği ortogonal matrislerin kümesi GL_n'in bir alt grubunu oluştururlar.
- $$det(A^t A) = 1 \rightarrow (detA)^2 = 1$$
olduğundan $detA = \pm 1$ elde edilir. Bu durumda A matrisinin satır veya sütünları boyları 1 olan vektörler tanımlarlar ve birbirlerine diktirler. Satır veya sütun vektörleri $\mathbb{R}^n$ uzayının ortonormal bir bazını oluştururlar.
- O_n grubunda $detA = 1$ olan matrislerin kümesi bir alt grup oluşturur ve buna Special Ortogonal Grup, SO_n adı verilir.

- $A \in O_n$ ortogonal bir matris olsun. Bu matris ile tanımlanan f_A lineer dönüşümü mesafeleri ve diklikleri korur.
  $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$, $\mathbb{R}^n$ uzayının noktaları olsunlar. $f_A(\boldsymbol{x})$ ve $f_A(\boldsymbol{y})$ skaler çarpımına bakarsak

$$f_A(\boldsymbol{x}) \cdot f_A(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}A^t)(\boldsymbol{y}A^t)^t = \boldsymbol{x}A^tA\boldsymbol{y}^t = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$$

  elde edilir.

- $A \in O_n$ ortogonal bir matris olsun. Bu matris ile tanımlanan f_A lineer dönüşümü mesafeleri ve diklikleri korur.
  $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$, $\mathbb{R}^n$ uzayının noktaları olsunlar. $f_A(\boldsymbol{x})$ ve $f_A(\boldsymbol{y})$ skaler çarpımına bakarsak

$$f_A(\boldsymbol{x}) \cdot f_A(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}A^t)(\boldsymbol{y}A^t)^t = \boldsymbol{x}A^tA\boldsymbol{y}^t = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$$

  elde edilir.
- $||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ olduğundan yukarıdaki eşitlikte $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ alınırsa görülür ki

$$||f_A(\boldsymbol{x})|| = ||\boldsymbol{x}||$$

  vektörün boyu lineer dönüşüm altında invaryanttır.
  Benzer şekilde eğer $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$ ise, dönüşümden sonra da vektörler birbirlerine dik kalmaya devam ederler.

Lie Grupları ve Lie Cebirleri

- Grup elemanları sürekli bir veya birden çok parametreye bağlı olarak tanımlanan gruplara sürekli gruplar denir. Bağımsız parametrelerin sayısı grubun mertebesi olarak tanımlanabilir.

- Grup elemanları sürekli bir veya birden çok parametreye bağlı olarak tanımlanan gruplara sürekli gruplar denir. Bağımsız parametrelerin sayısı grubun mertebesi olarak tanımlanabilir.
- Grup elemanlarını $a = (a_1, a_2, \cdots, a_r)$ olmak üzere r tane parametreye bağlı olarak $g(a)$ olarak tanımlayalım.
  Bu durumda grubun birim elemanı a^0 ile tanımlanabilir. Grup koşulları gereği
  $$g(a^0)g(a) = g(a)$$
  ve
  $$g(\bar{a})g(a) = g(a^0)$$
  sağlanır ve burada $g(\bar{a}) = g^{-1}(a)$ ters elemandır. Ayrıca
  $$g(c) = g(a)g(b)$$
  ise bu durumda c parametresi a, b'nin bir sürekli fonksiyonu olarak tanımlanabilir:
  $$c = \phi(a, b)$$

- Eğer ϕ fonksiyonu a,b'nin analitik bir fonksiyonu ve benzer şekilde $\bar{a}$ da a'nın analitik bir fonksiyonu ise bu durumda gruba bir r-parametreli Lie grubu denir.

Lie Grupları

- Eğer ϕ fonksiyonu a,b'nin analitik bir fonksiyonu ve benzer şekilde $\bar{a}$ da a'nın analitik bir fonksiyonu ise bu durumda gruba bir r-parametreli Lie grubu denir.
- Şimdi $n-$boyutlu bir vektör uzayı üzerinde, $r-$parametreli bir Lie grubu tarafından tanımlanan grup dönüşümlerine bakalım. Uzayın baz vektörleri $x_1, x_2, \cdots, x_n$ olsun ve uzay üzerindeki bir dönüşüm
$$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}, a)$$
ile tanımlansın.

- Eğer ϕ fonksiyonu a,b'nin analitik bir fonksiyonu ve benzer şekilde $\bar{a}$ da a'nın analitik bir fonksiyonu ise bu durumda gruba bir r-parametreli Lie grubu denir.
- Şimdi $n-$boyutlu bir vektör uzayı üzerinde, $r-$parametreli bir Lie grubu tarafından tanımlanan grup dönüşümlerine bakalım.
Uzayın baz vektörleri $x_1, x_2, \cdots, x_n$ olsun ve uzay üzerindeki bir dönüşüm
$$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}, a)$$
ile tanımlansın.
- Bir birim dönüşüm bulunduğunu ve dönüşümlerin asosyatif olduğunu kabul ediyoruz. Bu dönüşümlerin bir Lie grubu oluşturması için şu koşulların sağlanması gerekir.

- $$(i) \;\; \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, a) \;\text{ ve }\; \mathbf{x}'' = f(\mathbf{x}', b)$$

  ise $c = \phi(a, b)$ analitik fonksiyonu ile tanımlanan bir c parametresi bulunur öyle ki
  $$\mathbf{x}'' = f(\mathbf{x}, c) = f(\mathbf{x}, \phi(a, b))$$
  sağlanır.

- $$(i) \;\; \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, a) \text{ ve } \mathbf{x}'' = f(\mathbf{x}', b)$$

  ise $c = \phi(a, b)$ analitik fonksiyonu ile tanımlanan bir c parametresi bulunur öyle ki

  $$\mathbf{x}'' = f(\mathbf{x}, c) = f(\mathbf{x}, \phi(a, b))$$

  sağlanır.
- Grubun her a elemanı için tek bir $\bar{a}$ bulunur öyle ki

  $$(ii) \;\; \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, a) \Rightarrow \mathbf{x} = f(\mathbf{x}', \bar{a})$$

- $$(i) \;\; \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, a) \text{ ve } \mathbf{x}'' = f(\mathbf{x}', b)$$
  ise $c = \phi(a, b)$ analitik fonksiyonu ile tanımlanan bir c parametresi bulunur öyle ki
  $$\mathbf{x}'' = f(\mathbf{x}, c) = f(\mathbf{x}, \phi(a, b))$$
  sağlanır.
- Grubun her a elemanı için tek bir $\bar{a}$ bulunur öyle ki
  $$(ii) \;\; \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}, a) \Rightarrow \mathbf{x} = f(\mathbf{x}', \bar{a})$$

- Bir örnek olarak

$$x' = a_1 x + a_2, \quad a_1 \neq 0$$

dönüşümüne bakalım.
Birim eleman : $a_1^0 = 1, \quad a_2^0 = 0$
Ters eleman : $\bar{a}_1 = 1/a_1, \quad \bar{a}_2 = -a_2/a_1$
Çarpım : $c_1 = b_1 a_1, \quad c_2 = b_1 a_2 + b_2$
ile tanımlanır.

- Bir örnek olarak
$$x' = a_1 x + a_2, \quad a_1 \neq 0$$
dönüşümüne bakalım.
Birim eleman : $a_1^0 = 1, \quad a_2^0 = 0$
Ters eleman : $\bar{a}_1 = 1/a_1, \quad \bar{a}_2 = -a_2/a_1$
Çarpım : $c_1 = b_1 a_1, \quad c_2 = b_1 a_2 + b_2$
ile tanımlanır.
- Grup elemanlarını (a_1, a_2) şeklinde parametrelerin sıralı bir dizisi olarak tanımlarsak,
Birim eleman : $(1, 0)$
Ters eleman : $(1/a_1, -a_2/a_1)$
Çarpım :
$$(b_1, b_2)(a_1, a_2) = (b_1 a_1, b_1 a_2 + b_2)$$
olarak yazılabilir.

- Bir örnek olarak
$$\boldsymbol{x}' = a_1 \boldsymbol{x} + a_2, \quad a_1 \neq 0$$
dönüşümüne bakalım.
Birim eleman : $a_1^0 = 1, \quad a_2^0 = 0$
Ters eleman : $\bar{a}_1 = 1/a_1, \quad \bar{a}_2 = -a_2/a_1$
Çarpım : $c_1 = b_1 a_1, \quad c_2 = b_1 a_2 + b_2$
ile tanımlanır.
- Grup elemanlarını (a_1, a_2) şeklinde parametrelerin sıralı bir dizisi olarak tanımlarsak,
Birim eleman : $(1, 0)$
Ters eleman : $(1/a_1, -a_2/a_1)$
Çarpım :
$$(b_1, b_2)(a_1, a_2) = (b_1 a_1, b_1 a_2 + b_2)$$
olarak yazılabilir.

Lie Cebirleri

- $$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}, a)$$

  Lie grup dönüşümüne bakalım ve birim elemanı $a = 0$ ile tanımlayalım, yani
  $$\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x}, 0)$$
  Burada $\boldsymbol{x}'$ ve $\boldsymbol{x}-$in $n-$boyutlu vektörler ve a'nın $r-$parametreye karşılık geldiğini hatırlayalım.

- $$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}, a)$$

  Lie grup dönüşümüne bakalım ve birim elemanı $a = 0$ ile tanımlayalım, yani

  $$\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x}, 0)$$

  Burada $\boldsymbol{x}'$ ve $\boldsymbol{x}-$in $n-$boyutlu vektörler ve a'nın $r-$parametreye karşılık geldiğini hatırlayalım.
- a parametresinin sonsuz küçük da değişimi altında $\boldsymbol{x}$ vektörünün de sonsuz küçük bir mikar değiştiğini kabul edelim:

  $$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx} = f(\boldsymbol{x}, da)$$

- $$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}, a)$$

  Lie grup dönüşümüne bakalım ve birim elemanı $a = 0$ ile tanımlayalım, yani

  $$\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x}, 0)$$

  Burada $\boldsymbol{x}'$ ve $\boldsymbol{x}-$in $n-$boyutlu vektörler ve a'nın $r-$parametreye karşılık geldiğini hatırlayalım.
- a parametresinin sonsuz küçük da değişimi altında $\boldsymbol{x}$ vektörünün de sonsuz küçük bir mikar değiştiğini kabul edelim:

  $$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx} = f(\boldsymbol{x}, da)$$

- Öyleyse

  $$\boldsymbol{dx} = \frac{\partial f(\boldsymbol{x}, 0)}{\partial a} da$$

  olur.

- Burada

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{x}, 0)}{\partial a}$$

olarak tanımlanırsa yukarıdaki eşitlik bileşenler cinsinden şöyle yazılabilir:

$$d\boldsymbol{x}_i = \sum_{\nu=1}^{r} u_{i\nu}(\boldsymbol{x}) da_{\nu}, \ i = 1, 2, \cdots, n$$

- Burada
$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{x},0)}{\partial a}$$
olarak tanımlanırsa yukarıdaki eşitlik bileşenler cinsinden şöyle yazılabilir:
$$d\boldsymbol{x}_i = \sum_{\nu=1}^{r} u_{i\nu}(\boldsymbol{x})da_\nu,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

- Bir $F(\boldsymbol{x})$ fonksiyonunun sonsuz küçük dönüşümler altında
$$dF = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{dx}$$
şeklinde değiştiği hatırlanırsa ve burada $d\boldsymbol{x} = u(\boldsymbol{x})da$ olduğu kullanılırsa
$$dF = da(u(\boldsymbol{x})\partial/\partial\boldsymbol{x})F$$
sonucuna ulaşılır.

- Burada

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f(\boldsymbol{x}, 0)}{\partial a}$$

olarak tanımlanırsa yukarıdaki eşitlik bileşenler cinsinden şöyle yazılabilir:

$$d\boldsymbol{x}_i = \sum_{\nu=1}^{r} u_{i\nu}(\boldsymbol{x}) da_\nu, \; i = 1, 2, \cdots, n$$

- Bir $F(\boldsymbol{x})$ fonksiyonunun sonsuz küçük dönüşümler altında

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{dx}$$

şeklinde değiştiği hatırlanırsa ve burada $d\boldsymbol{x} = u(\boldsymbol{x})da$ olduğu kullanılırsa

$$dF = da(u(\boldsymbol{x})\partial/\partial \boldsymbol{x})F$$

sonucuna ulaşılır.

- $$X = u(x)\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial f(x,0)}{\partial a}\frac{\partial}{\partial x}$$
  olarak tanımlanırsa bunun $r-$boyutlu bir vektör operatör olduğu görülür.

- $$X = u(x)\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial f(x,0)}{\partial a}\frac{\partial}{\partial x}$$
  olarak tanımlanırsa bunun $r-$boyutlu bir vektör operatör olduğu görülür.
- Bu operatörün bileşenleri grubun üreteçleri olarak adlandırılır:
  $$X_\nu = \sum_{i=1}^{n} u_{i\nu}(\partial/\partial x_i), \;\; \nu = 1, 2, \cdots, r$$
  Herbir parametreye karşılık bir üreteç bulunur.

- $$X = u(x)\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial f(x,0)}{\partial a}\frac{\partial}{\partial x}$$
  olarak tanımlanırsa bunun $r-$boyutlu bir vektör operatör olduğu görülür.
- Bu operatörün bileşenleri grubun üreteçleri olarak adlandırılır:
  $$X_\nu = \sum_{i=1}^{n} u_{i\nu}(\partial/\partial x_i), \;\; \nu = 1, 2, \cdots, r$$
  Herbir parametreye karşılık bir üreteç bulunur.
- Bu üreteçler Hermitsel olacak şekilde parametrize edilirlerse grup elemanlarını
  $$U(a_\nu) = e^{ia_\nu X_\nu} \equiv U_\nu$$
  üniter matrisleri ile temsil edebiliriz.

Lie Cebirleri

- Böylece grup elemanlarının birim eleman civarındaki temsillerini elde etmiş oluruz. Grubun, birim elemandan sürekli bir yolla elde edilebilen herhangi bir elemanı U_ν operatörlerinin çarpımı şeklinde yazılabilir. Bu yüzden grubun özelliklerini anlamak için bu birim eleman civarındaki cebrini çalışmak yeterli olacaktır.

- Böylece grup elemanlarının birim eleman civarındaki temsillerini elde etmiş oluruz. Grubun, birim elemandan sürekli bir yolla elde edilebilen herhangi bir elemanı U_ν operatörlerinin çarpımı şeklinde yazılabilir. Bu yüzden grubun özelliklerini anlamak için bu birim eleman civarındaki cebrini çalışmak yeterli olacaktır.

Yerel İzomorfizm

X_ν üreteçleri ile verilen bütün Lie grupları yerel (lokal) olarak izomorfiktirler.

- Dahası, bu grupların herbirinden birim eleman ile ilişkili bu parça üzerine bir homomorfizm kurulabilir.

Lie Cebirleri

- Cebrin üreteçleri arasında bir komütasyon ilişkisi bulunur. Buna bir Lie Cebri denir

$$[X_\mu, X_\nu] = \sum_{\lambda=1}^{r} c_{\mu\nu\lambda} X_\lambda$$

$c_{\mu\nu\lambda}$ kompleks sayıları yapı sabitleri olarak adlandırılır.

Lie Cebirleri

- Cebrin üreteçleri arasında bir komütasyon ilişkisi bulunur. Buna bir Lie Cebri denir

$$[X_\mu, X_\nu] = \sum_{\lambda=1}^{r} c_{\mu\nu\lambda} X_\lambda$$

  $c_{\mu\nu\lambda}$ kompleks sayıları yapı sabitleri olarak adlandırılır.
- Komütasyon ilişkisinden

$$c_{\mu\nu\lambda} = -c_{\nu\mu\lambda}$$

  olduğunu görmek kolaydır.

Lie Cebirleri

- Cebrin üreteçleri arasında bir komütasyon ilişkisi bulunur. Buna bir Lie Cebri denir

$$[X_\mu, X_\nu] = \sum_{\lambda=1}^{r} c_{\mu\nu\lambda} X_\lambda$$

  $c_{\mu\nu\lambda}$ kompleks sayıları yapı sabitleri olarak adlandırılır.

- Komütasyon ilişkisinden

$$c_{\mu\nu\lambda} = -c_{\nu\mu\lambda}$$

  olduğunu görmek kolaydır.

- Ayrıca komütatörler Jacobi özdeşliğini sağlarlar:

$$[[X_\mu, X_\nu], X_\lambda] + [[X_\nu, X_\lambda], X_\mu] + [[X_\lambda, X_\mu], X_\nu] = 0$$

  Buradan yapı sabitleri için

$$\sum_{\beta=1}^{r} (c_{\mu\nu\beta} c_{\beta\lambda\delta} + c_{\nu\lambda\beta} c_{\beta\mu\delta} + c_{\lambda\mu\beta} c_{\beta\nu\delta}) = 0$$

  elde edilir.

- Bir örnek olarak $SO(3)$ grubuna bakalım. (3×3) reel bileşenli, ortogonal ve $detA = 1$ olan matrislerin oluşturduğu gruptur. Grubun $3-$boyutlu reel uzayda tanımlı bir $\boldsymbol{x}$ vektörü üzerindeki etkisi

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$

ile tanımlanır. Birim eleman $a^0 = 0$ civarındaki dönüşümleri yazacak olursak

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx} = (1 + da)\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{x}da$$

- Bir örnek olarak $SO(3)$ grubuna bakalım. (3×3) reel bileşenli, ortogonal ve $detA = 1$ olan matrislerin oluşturduğu gruptur. Grubun $3-$boyutlu reel uzayda tanımlı bir $\boldsymbol{x}$ vektörü üzerindeki etkisi
$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$
ile tanımlanır. Birim eleman $a^0 = 0$ civarındaki dönüşümleri yazacak olursak
$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx} = (1 + da)\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{x}da$$

- Grup elemanlarının ortogonalliğini kullanarak
$$AA^t = 1 \Rightarrow (1 + da)(1 + da^t) = 1$$
ve burada ilk mertebeden terimleri tutacak olursak
$$1 + da + da^t = 1 \Rightarrow da = -da^t$$
elde ederiz. Yani
$$da = \begin{pmatrix} 0 & da_{12} & -da_{13} \\ -da_{12} & 0 & da_{23} \\ da_{13} & -da_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

- $da_{12} = a_3$, $da_{13} = a_2, da_{23} = a_1$ olarak tanımlanırsa $dx = dau(x)$ eşitliğini açık olarak aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$$dx_1 = x_2 a_3 - x_3 a_2,$$

$$dx_2 = -x_1 a_3 + x_3 a_1,$$

$$dx_1 = x_1 a_2 - x_2 a_1,$$

- $da_{12} = a_3$, $da_{13} = a_2, da_{23} = a_1$ olarak tanımlanırsa $dx = dau(x)$ eşitliğini açık olarak aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$$dx_1 = x_2 a_3 - x_3 a_2,$$

$$dx_2 = -x_1 a_3 + x_3 a_1,$$

$$dx_1 = x_1 a_2 - x_2 a_1,$$

- Bu eşitlikler kullanılarak da üreteçler

$$X_1 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$X_2 = -x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$X_3 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

olarak elde edilir.

- Komütasyon ilişkileri

$$[X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = X_2$$

olarak elde edilir.

- Komütasyon ilişkileri

$$[X_1, X_2] = X_3,\ [X_2, X_3] = X_1,\ [X_3, X_1] = X_2$$

olarak elde edilir.

- Grubun cebrini koruyacak şekilde üreteçlerin kompleks lineer kombinasyonları alınabilir. Buradaki örnek için $J_\mu = iX_\mu$ olarak tanımlanırsa komütasyon ilişkisi

$$[J_\mu, J_\nu] = i\varepsilon_{\mu\nu\lambda} J_\lambda$$

haline gelir. Burada $\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$ tamamen antisimetrik tensör olup $\varepsilon_{123} = 1$ olarak tanımlıdır.

- İkinci olarak $SU(2)$ grubuna bakalım. (2×2) kompleks bileşenli, üniter ve $detA = 1$ olan matrislerin oluşturduğu gruptur. Grubun $2-$boyutlu kompleks bir vektör uzayındaki etkisini önceden olduğu gibi

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

ile tanımlayalım ve birim eleman $a^0 = 0$ civarındaki sonsuz küçük dönüşümleri yazalım

$$\mathbf{x} + \mathbf{dx} = (1 + da)\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{dx} = \mathbf{x}da$$

- İkinci olarak $SU(2)$ grubuna bakalım. (2×2) kompleks bileşenli, üniter ve $detA = 1$ olan matrislerin oluşturduğu gruptur. Grubun $2-$boyutlu kompleks bir vektör uzayındaki etkisini önceden olduğu gibi

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$

ile tanımlayalım ve birim eleman $a^0 = 0$ civarındaki sonsuz küçük dönüşümleri yazalım

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx} = (1 + da)\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{x}da$$

- Grup elemanlarının üniterliğini kullanarak

$$AA^{\dagger} = 1 \Rightarrow (1 + da)(1 + da^{\dagger}) = 1$$

ve burada ilk mertebeden terimleri tutacak olursak

$$1 + da + da^{t} = 1 \Rightarrow da = -da^{\dagger}$$

elde ederiz.

- İkinci olarak $SU(2)$ grubuna bakalım. (2×2) kompleks bileşenli, üniter ve $detA = 1$ olan matrislerin oluşturduğu gruptur. Grubun $2-$boyutlu kompleks bir vektör uzayındaki etkisini önceden olduğu gibi

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$$

ile tanımlayalım ve birim eleman $a^0 = 0$ civarındaki sonsuz küçük dönüşümleri yazalım

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{dx} = (1 + da)\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{x}da$$

- Grup elemanlarının üniterliğini kullanarak

$$AA^\dagger = 1 \Rightarrow (1 + da)(1 + da^\dagger) = 1$$

ve burada ilk mertebeden terimleri tutacak olursak

$$1 + da + da^t = 1 \Rightarrow da = -da^\dagger$$

elde ederiz.
- Öyleyse

$$da = \begin{pmatrix} ia_1 & a_2 + ia_3 \\ -a_2 + ia_3 & -ia_1 \end{pmatrix}$$

- Şimdi artık $dx = dau(x)$ eşitliği şu sonuçları verir:

$$dx_1 = ia_1 x_1 + (a_2 + ia_3)x_2,$$

$$dx_2 = (-a_2 + ia_3)x_1 - ia_1 x_2,$$

- Şimdi artık $dx = dau(x)$ eşitliği şu sonuçları verir:

$$dx_1 = ia_1 x_1 + (a_2 + ia_3)x_2,$$

$$dx_2 = (-a_2 + ia_3)x_1 - ia_1 x_2,$$

- Üreteçler yazılacak olursa

$$X_1 = ix_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - ix_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$X_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$X_3 = ix_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + ix_1 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

elde edilir.

- Komütasyon ilişkileri
$$[X_1, X_2] = -2X_3$$
ve bunun çevrimsel permütasyonları olarak elde edilir.

- Komütasyon ilişkileri
$$[X_1, X_2] = -2X_3$$
ve bunun çevrimsel permütasyonları olarak elde edilir.
- $SO(3)$ grubu ile olan ilişkisini görmek için $X_\mu = -2iJ_\mu$ olarak tanımlanırsa
$$[J_\mu, J_\nu] = i\varepsilon_{\mu\nu\lambda}J_\lambda$$
haline gelir.

- Komütasyon ilişkileri
$$[X_1, X_2] = -2X_3$$
ve bunun çevrimsel permütasyonları olarak elde edilir.
- $SO(3)$ grubu ile olan ilişkisini görmek için $X_\mu = -2iJ_\mu$ olarak tanımlanırsa
$$[J_\mu, J_\nu] = i\varepsilon_{\mu\nu\lambda}J_\lambda$$
haline gelir.
- Bu sonuçtan hareketle bu iki grubun yerel olarak birbirlerine izomorf oldukları söylenebilr.

- Bir önceki örnek için elde ettiğimiz eşitlikler genel olarak herhangi bir boyuttaki $SU(n)$ için de geçerlidir. Fakat genel durumda $n^2 - 1$ temel parametre bulunur ve denklemler bunlar için çözülür.

- Bir önceki örnek için elde ettiğimiz eşitlikler genel olarak herhangi bir boyuttaki $SU(n)$ için de geçerlidir. Fakat genel durumda $n^2 - 1$ temel parametre bulunur ve denklemler bunlar için çözülür.
- Örneğin $SU(3)$ durumunda sekiz reel parametre bulunur ve

$$da = \begin{pmatrix} ia_1 & a_2 + ia_3 & a_4 + ia_5 \\ -a_2 + ia_3 & a_6 & a_7 + ia_8 \\ -a_4 + ia_5 & -a_7 + ia_8 & -ia_1 - ia_6 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır.

- Bir önceki örnek için elde ettiğimiz eşitlikler genel olarak herhangi bir boyuttaki $SU(n)$ için de geçerlidir. Fakat genel durumda $n^2 - 1$ temel parametre bulunur ve denklemler bunlar için çözülür.
- Örneğin $SU(3)$ durumunda sekiz reel parametre bulunur ve

$$da = \begin{pmatrix} ia_1 & a_2 + ia_3 & a_4 + ia_5 \\ -a_2 + ia_3 & a_6 & a_7 + ia_8 \\ -a_4 + ia_5 & -a_7 + ia_8 & -ia_1 - ia_6 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır.
Kalan adımları tamamlayarak üreteç operatörlerini elde ediniz.

Lorentz Dönüşümleri, SO(3,1) Grubu

- 4−boyutlu Minkowski uzay-zamanındaki

$$s^2 = c^2 t^2 - x_i x_i$$

aralıklarını invaryant bırakan dönüşümler Lorentz Grubu, SO(3,1) olarak adlandırılan bir grup oluşturur.
4−vektör notasyonu kullanılarak aralıklar

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

olarak ifade edilebilir.
Metrik tensör $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ olarak tanımlıdır.

- $4-$boyutlu Minkowski uzay-zamanındaki

$$s^2 = c^2 t^2 - x_i x_i$$

aralıklarını invaryant bırakan dönüşümler Lorentz Grubu, SO(3,1) olarak adlandırılan bir grup oluşturur.
$4-$vektör notasyonu kullanılarak aralıklar

$$s^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

olarak ifade edilebilir.
Metrik tensör $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ olarak tanımlıdır.

- Şimdi bu koşulu sağlayan lineer dönüşümlere açık olarak bakalım:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu = \Lambda^0_0 x^0 + \Lambda^\mu_i x^i$$

dönüşümü altında

$$g_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma x^\rho x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma$$

aralıkların invaryant kalması için

- $$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}$$

  koşulu sağlanmalıdır.

- $$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}$$

  koşulu sağlanmalıdır.

- x^{μ} ile bir sütun vektörünü gösterecek olursak yukarıdaki ifadeyi matris notasyonunda yazmak daha uygun olacaktır:

  $$s^2 = x^t g x$$

  ve

  $$x' = Lx.$$

  Burada L, Λ^{μ}_{ν} bileşenlerinin matris eşdeğiridir.

- $$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}$$
  koşulu sağlanmalıdır.
- x^{μ} ile bir sütun vektörünü gösterecek olursak yukarıdaki ifadeyi matris notasyonunda yazmak daha uygun olacaktır:
  $$s^2 = x^t g x$$
  ve
  $$x' = Lx.$$
  Burada L, Λ^{μ}_{ν} bileşenlerinin matris eşdeğiridir.
- Öyleyse invaryantlık koşulunu
  $$g = L^t g L$$
  şeklinde ifade edebiliriz. Bu eşitlikten
  $$detg = detL^t detgdetL \Rightarrow detL = \pm 1$$
  sonucuna ulaşılır.

- $$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}$$

  koşulu sağlanmalıdır.
- x^{μ} ile bir sütun vektörünü gösterecek olursak yukarıdaki ifadeyi matris notasyonunda yazmak daha uygun olacaktır:

  $$s^2 = x^t g x$$

  ve

  $$x' = Lx.$$

  Burada L, Λ^{μ}_{ν} bileşenlerinin matris eşdeğiridir.
- Öyleyse invaryantlık koşulunu

  $$g = L^t g L$$

  şeklinde ifade edebiliriz. Bu eşitlikten

  $$detg = detL^t detgdetL \Rightarrow detL = \pm 1$$

  sonucuna ulaşılır.
- $detL = 1$ durumu proper Lorentz dönüşümleri ve $detL = -1$ durumu ise improper Lorentz dönüşümleri olarak adlandırılır.

- Yukarıdaki eşitlikte (00)−bileşenine bakacak olursak

$$1 = \Lambda^{\rho}_{0} g_{\rho\sigma} \Lambda^{\sigma}_{0} = (\Lambda^{0}_{0})^2 - (\Lambda^{i}_{0})^2$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$|\Lambda^{0}_{0}| \geq 1$$

dır.

- Yukarıdaki eşitlikte (00)−bileşenine bakacak olursak

$$1 = \Lambda^{\rho}_{0} g_{\rho\sigma} \Lambda^{\sigma}_{0} = (\Lambda^{0}_{0})^2 - (\Lambda^{i}_{0})^2$$

  elde ederiz. Dolayısıyla

$$|\Lambda^{0}_{0}| \geq 1$$

  dır.
- $\Lambda^{0}_{0} \geq 1$ durumunda dönüşümler orthochronous, ve $\Lambda^{0}_{0} \leq -1$ ise non-orthochronous olarak adlandırılır.

- Yukarıdaki eşitlikte (00)$-$bileşenine bakacak olursak

$$1 = \Lambda^{\rho}_{0} g_{\rho\sigma} \Lambda^{\sigma}_{0} = (\Lambda^{0}_{0})^2 - (\Lambda^{i}_{0})^2$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$|\Lambda^{0}_{0}| \geq 1$$

dır.
- $\Lambda^{0}_{0} \geq 1$ durumunda dönüşümler orthochronous, ve $\Lambda^{0}_{0} \leq -1$ ise non-orthochronous olarak adlandırılır.
- Dolayısıyla Lorentz dönüşümleri dört sınıfa ayrılır:

- proper orthochronous($L_+^\uparrow$): $detL = +1, \Lambda_0^0 \geq 1$
  proper non-orthochronous($L_+^\downarrow$): $detL = +1, \Lambda_0^0 \leq -1$
  improper orthochronous($L_-^\uparrow$): $detL = -1, \Lambda_0^0 \geq 1$
  improper non-orthochronous($L_-^\downarrow$): $detL = -1, \Lambda_0^0 \leq 1$

- proper orthochronous($L_+^{\uparrow}$): $detL = +1, \Lambda^0_0 \geq 1$
  proper non-orthochronous($L_+^{\downarrow}$): $detL = +1, \Lambda^0_0 \leq -1$
  improper orthochronous($L_-^{\uparrow}$): $detL = -1, \Lambda^0_0 \geq 1$
  improper non-orthochronous($L_-^{\downarrow}$): $detL = -1, \Lambda^0_0 \leq 1$
- Dönmeler: $x'^0 = x^0$, $x' = O^{ij}x^j$ burada O^{ij} ortogonal bir matristir.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix}$$

Burada $detO = \pm 1$ olabilir. Dolayısıyla dönmeler $L_+^{\uparrow}$ veya $L_-^{\uparrow}$ sınıfının üyeleridirler.

- Boostlar: $x-$ekseni doğrultusundaki bir boost

$$x'^0 = x^0 cosh\eta - x^1 sinh\eta, \; x'^1 = -x^0 sinh\eta + x^1 cosh\eta$$

$$x'^{2,3} = x^{2,3}$$

ile tanımlanır.

$$L = \begin{pmatrix} cosh\eta & -sinh\eta & 0 & 0 \\ -sinh\eta & cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Boostlar $L_+^\uparrow$ sınıfındandırlar.

- Zaman Tersinmesi: $x'^0 = -x^0, \quad x'^i = x^i$ ile verilir ve $L_-^{\downarrow}$ sınıfına aittir.

- Zaman Tersinmesi: $x'^0 = -x^0, \quad x'^i = x^i$ ile verilir ve $L_-^{\downarrow}$ sınıfına aittir.
- Uzayzaman Tersinmesi: $x'^\mu = -x^\mu$ ile verilir ve $L_+^{\downarrow}$ sınıfına aittir.

- Zaman Tersinmesi: $x'^0 = -x^0, \quad x'^i = x^i$ ile verilir ve $L_-^\downarrow$ sınıfına aittir.
- Uzayzaman Tersinmesi: $x'^\mu = -x^\mu$ ile verilir ve $L_+^\downarrow$ sınıfına aittir.
- Herhangi bir Lorentz dönüşümü bu dört tipteki dönüşümlerin bir çarpımı olarak ifade edilebilir.
  Şimdi $SO(3,1)$ grubunun üreteçlerine bakalım: Dönmeler ile başlayacak olursak bunların zaman bileşeni üzerine herhangi bir etkisi yoktur. Dolayısıyla $SO(3)$ grubunun üreteçlerini bir 0 satır ve sütunu ekleyerek genişletmek yeterli olacaktır.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

İkinci olarak boostlar için üreteçleri elde edelim. Yukarıda verilen $x-$ekseni doğrultusundaki boost için hesaplayacak olursak:

$$Y_1 = i\frac{\partial B_1}{\partial \eta}|_{\eta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y ve $z-$eksenleri doğrultusundaki boostlar için de benzer şekilde hesaplanabilir.

- Üreteçler açık olarak elde edildikten sonra komütasyon ilişkilerine bakılacak olursa aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$[X_i, X_j] = i\varepsilon_{ijk} X_k,$$

$$[X_i, Y_j] = i\varepsilon_{ijk} Y_k,$$

$$[Y_i, Y_j] = -i\varepsilon_{ijk} X_k,$$

Cebirden de görüleceği üzere dönmeler için olan üreteçler kendi üzerlerine kapanır ve böylece bir alt cebir oluştururlar: $so(3)$ alt-cebri

- Üreteçler açık olarak elde edildikten sonra komütasyon ilişkilerine bakılacak olursa aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$[X_i, X_j] = i\varepsilon_{ijk} X_k,$$

$$[X_i, Y_j] = i\varepsilon_{ijk} Y_k,$$

$$[Y_i, Y_j] = -i\varepsilon_{ijk} X_k,$$

  Cebirden de görüleceği üzere dönmeler için olan üreteçler kendi üzerlerine kapanır ve böylece bir alt cebir oluştururlar: $so(3)$ alt-cebri
- Fakat aynı şey boostlar için geçerli değildir. Son eşitlikten görüleceği üzere cebir kapalı değildir.

- Üreteçler açık olarak elde edildikten sonra komütasyon ilişkilerine bakılacak olursa aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$[X_i, X_j] = i\varepsilon_{ijk} X_k,$$

$$[X_i, Y_j] = i\varepsilon_{ijk} Y_k,$$

$$[Y_i, Y_j] = -i\varepsilon_{ijk} X_k,$$

  Cebirden de görüleceği üzere dönmeler için olan üreteçler kendi üzerlerine kapanır ve böylece bir alt cebir oluştururlar: $so(3)$ alt-cebri
- Fakat aynı şey boostlar için geçerli değildir. Son eşitlikten görüleceği üzere cebir kapalı değildir.
- Üreteçlerin lineer bir kombinasyonu alınarak cebri sadeleştirmek mümkündür.

$$X^{(\pm)} = \frac{1}{2}(X \pm iY)$$

  alınırsa cebir şu hale gelir:

- $$[X_i^{(+)}, X_j^{(+)}] = i\varepsilon_{ijk} X_k^{(+)},$$
  $$[X_i^{(-)}, X_j^{(-)}] = i\varepsilon_{ijk} X_k^{(-)},$$
  $$[X_i^{(+)}, X_j^{(-)}] = 0$$
  Buradan cebrin bağımsız iki parçadan oluştuğu ve herbir parçanın bir $su(2)$ cebrine karşılık geldiği görülür.
  $SO(4)$ grubunun cebrinde de benzer bir durum gerçekleşir. Fakat orada üreteçlerin lineer kombinasyonlarında i faktörü yoktur.
  Bundan dolayı $SO(3,1)$ cebri lokal olarak aslında $SU(2) \times SU(2)$'ye değil $SL(2,\mathbb{C})$'ye izomorftur.

- **Kaynaklar:**
  1. **Groups and Symmetry**, M. A. Armstrong, Springer.
  2. **Unitary Symmetry and Elementary Particles**, D. B. Lichtenberg, Academic Press
  3. **Groups, Representations and Physics**, H. F. Jones, Adam Hilger
- Şekiller (1) numaralı kaynaktan alınmıştır.