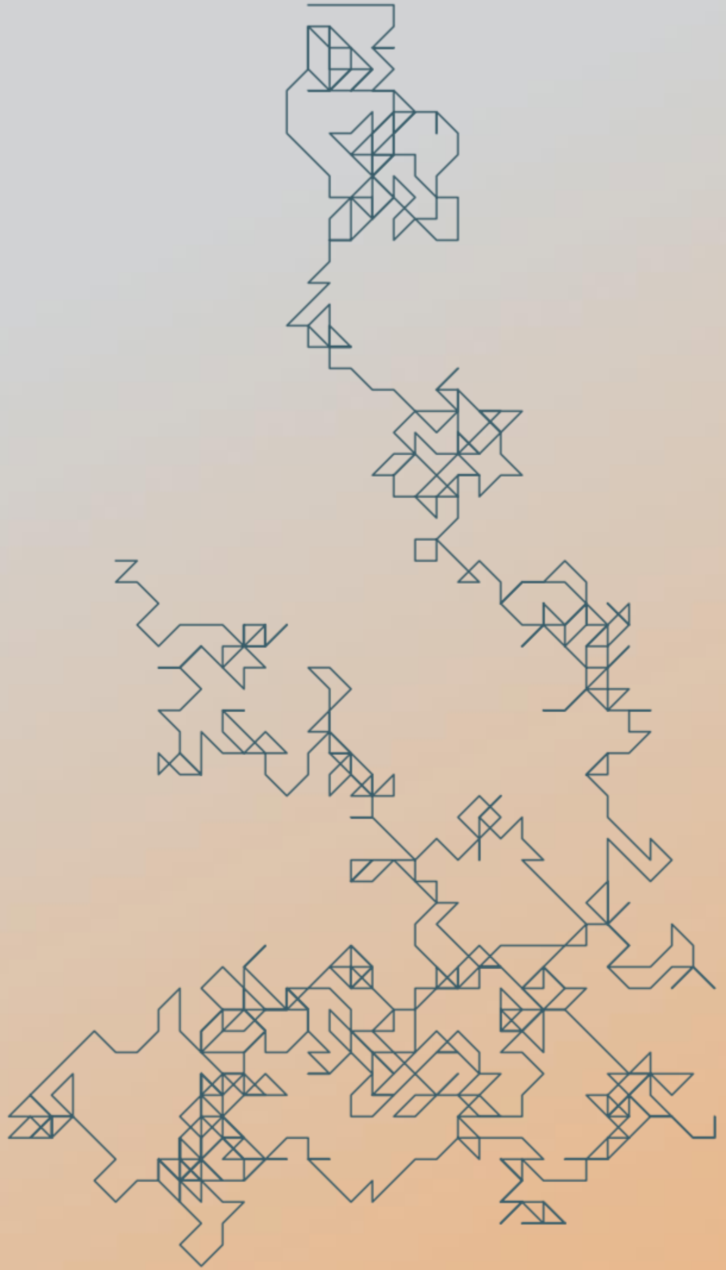
Véletlen bolyongás

(random walk, véletlen séta)

Szanyi István

EKONOFIZIKA MEETING

2024. május 6.



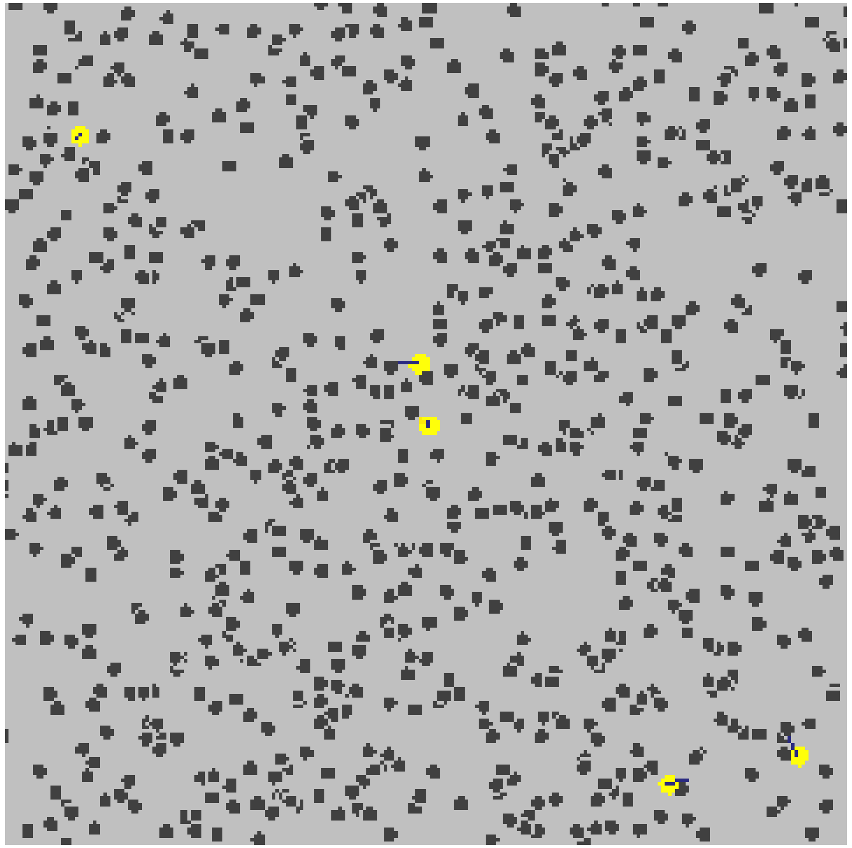
Áttekintés

- Brown-mozgás: véletlen bolyongó részecskék
- véletlen bolyongás a matematikában
- Bachelier munkája
- egydimenziós diszkrét és folytonos véletlen bolyongás
- centrális határeloszlás-tétel, konvergencia a normális eloszláshoz
- Gaussi véletlen bolyongás és a pénzügyi piacok

Brown-mozgás

- **Brown-mozgás**: sztochasztikus folyamat, gázokban és folyadékokban lebegő részecskék szüntelenül zajló, vélet-lenszerű mozgása
- **a Brown-mozgást végző részecskék „véletlen bolyonganak”:** mozgáspályáik általánosságban véletlenszerűek, folya-matosak és rendszertelenek

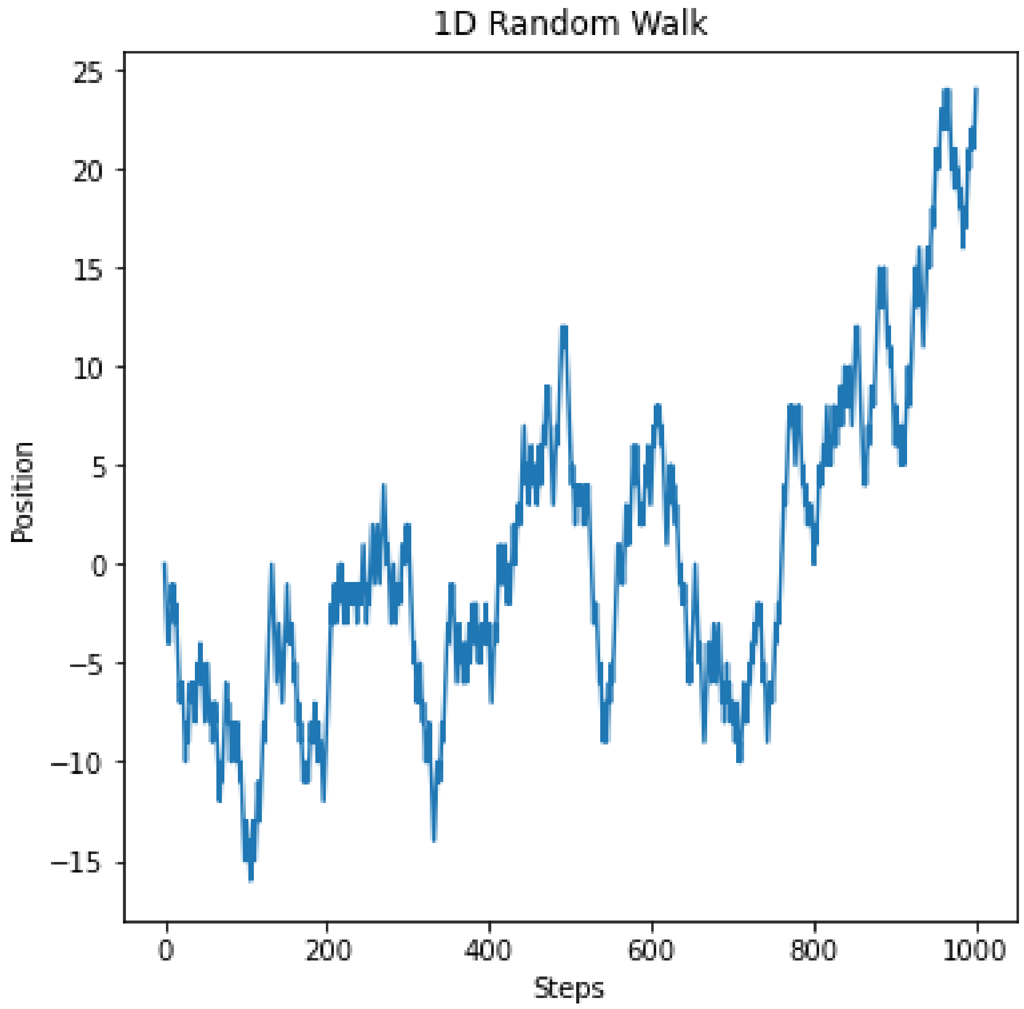
- **Véletlen bolyongással lehet modellezni pl. az a táplálékot kereső állat keresési útvonalát, az ingadozó piaci árakat vagy a szerencsejátékos pénzügyi helyzete**

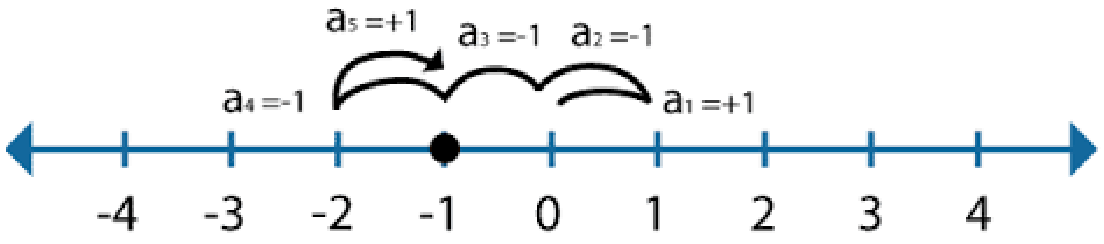


Öt nagyobb részecske (sárga pöttyök) Brown-mozgásának számítógépes szimulációja

Véletlen bolyongás a matematikában

- **Matematikailag:** a véletlen bolyongás egy sztochasztikus folyamat, amely során véletlenszerű lépések sorozatából áll össze egy matematikai halmazon értelmezett pálya
- **Elemi példa:** a véletlenszerű séta az egész számok ℤ halmazán, amely 0-val kezdődik, és minden lépésnél egyenlő valószínűséggel +1 vagy −1 lépést tesz

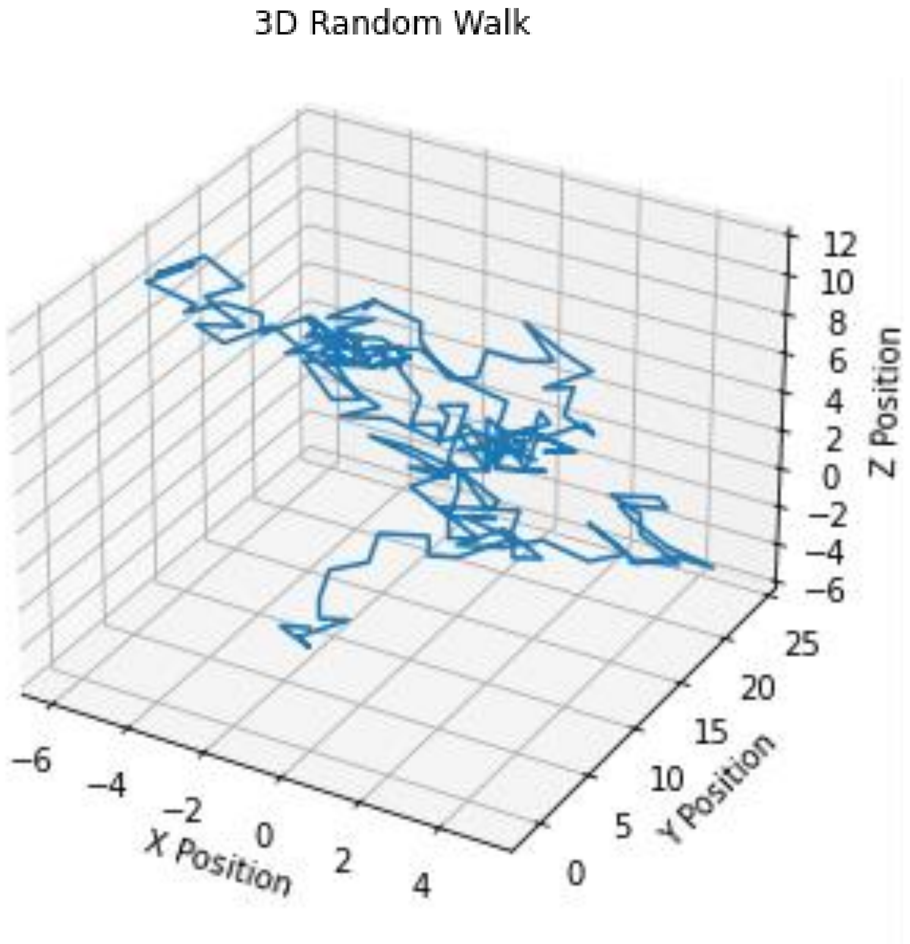




Véletlen séta az ℤ halmazon: kezdés a 0-nál majd +1 vagy −1 lépés egyenlő valószínűséggel

Véletlen bolyongás két- és háromdimenzóban

Véletlen séta az $\mathbb{Z}^2$ halmazon: kezdés a (0,0)-nál majd +1, 0 vagy −1 lépés egyenlő valószínűséggel x és y irányban (mindösszesen 1000 lépés)



Véletlen séta az $\mathbb{Z}^3$ halmazon: kezdés a (0,0,0)-nál majd +1, 0 vagy −1 lépés egyenlő valószínűséggel x, y, z irányban (mindösszesen 200 lépés)

Bachelier munkája

- Bachelier francia matematikus doktori értekezése (1900): **a véletlen bolyongás első formális megfogalmazása**
- az értekezés témája gazdasági-pénzügyi: **opciók árazása spekulatív piacokon** (ma is aktuális)
- Bachelier meghatározta az árváltozások valószínűségét

- a **spekuláció** során vesznek és eladnak, hogy profitáljanak az áringadozásokból
- az **opciós ügylet** egy határidős szerződés:
  az egyik félnek vételi vagy eladási jogot biztosít;
  a másik félnek kötelezettséget teremt eladására vagy megvételére
- a kötelezettséget vállaó fél a kötelezett-séget és az azzal járó kockázatot az opciós díjért vállalja, ez az **opció ára**

Egydimenziós diszkrét véletlen bolyongás

- legyen adott n azonos eloszlású véletlen változó x_i összege:

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

- S_n megadja, hogy 0-ból n lépés alatt milyen pozícióba jutunk;
- S_n arányos a teljes sétaidővel, $n\Delta t$: $S_n = x(n\Delta t)$ ahol Δt egy lépéshez szükséges idő
- az n lépés utáni a pozíció várható értéke nulla:

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(x_i) = 0$$

- ha egy lépés mérete s, akkor x_i véletlenszerűen $+s$ vagy $-s$ értéket vesz fel; a várható teljes megtett távolság négyzete (variancia) n lépés után:

$$E(S_n^2) = \sum_{i=1}^{n} E\left(x_i^2\right) = ns^2$$

Egydimenziós folytonos véletlen bolyongás

- vegyük az $n \to \infty$, $\Delta t \to 0$ határesetet úgy, hogy $t = n\Delta t$ véges; ekkor:

$$E(x^2(t)) = ns^2 = \frac{s^2}{\Delta t}t, \qquad s^2 = D\Delta t, \qquad E(x^2(t)) = Dt$$

- a variancia lineáris függése az időtől a diffúzív folyamatokra jellemző, így D az ún. diffúziós állandó
- Einstein: a Brown-részecske valószínűségi sűrűségfüggvénye $\rho = \rho(x, t)$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = D\Delta\varrho$$

- a folytonos határesetben az $x(t)$ sztohasztikus folyamat egy Gauss-folyamat

véletlen séta $\equiv$ Gauss séta ha $n \to \infty$

- a Gauss folyamat egy Wiener-folyamat (időben folytonos sztochasztikus folyamat) és a martingál kutatásokban játszik szerepet
- a martingál a korrekt játék modellje, ahol a korábbi események sohasem segítik a jövőbeli nyerést

Centrális határeloszlás-tétel (CHT)

- legyen adott egy valószínűségi változó $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ amely n darab x_i független véletlen változó összege, továbbá $E(x_i) = 0$, $E\left(x_i^2\right) = s_i^2$ (véges!),

$$\sigma_n^2 = E(S_n^2) = \sum_{i=1}^{n} s_i^2 \qquad \text{és ha} \quad \sigma_n \to \infty, \quad \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i=1}^{n} E(U_i^2) \to 1$$

Lindenberg-feltétel

ahol $\forall \epsilon > 0\ \ U_i = x_i$ ha $|x_i| \leq \epsilon\sigma_n$ és $U_i = 0$ minden más esetben

- ekkor a standardizált összeg

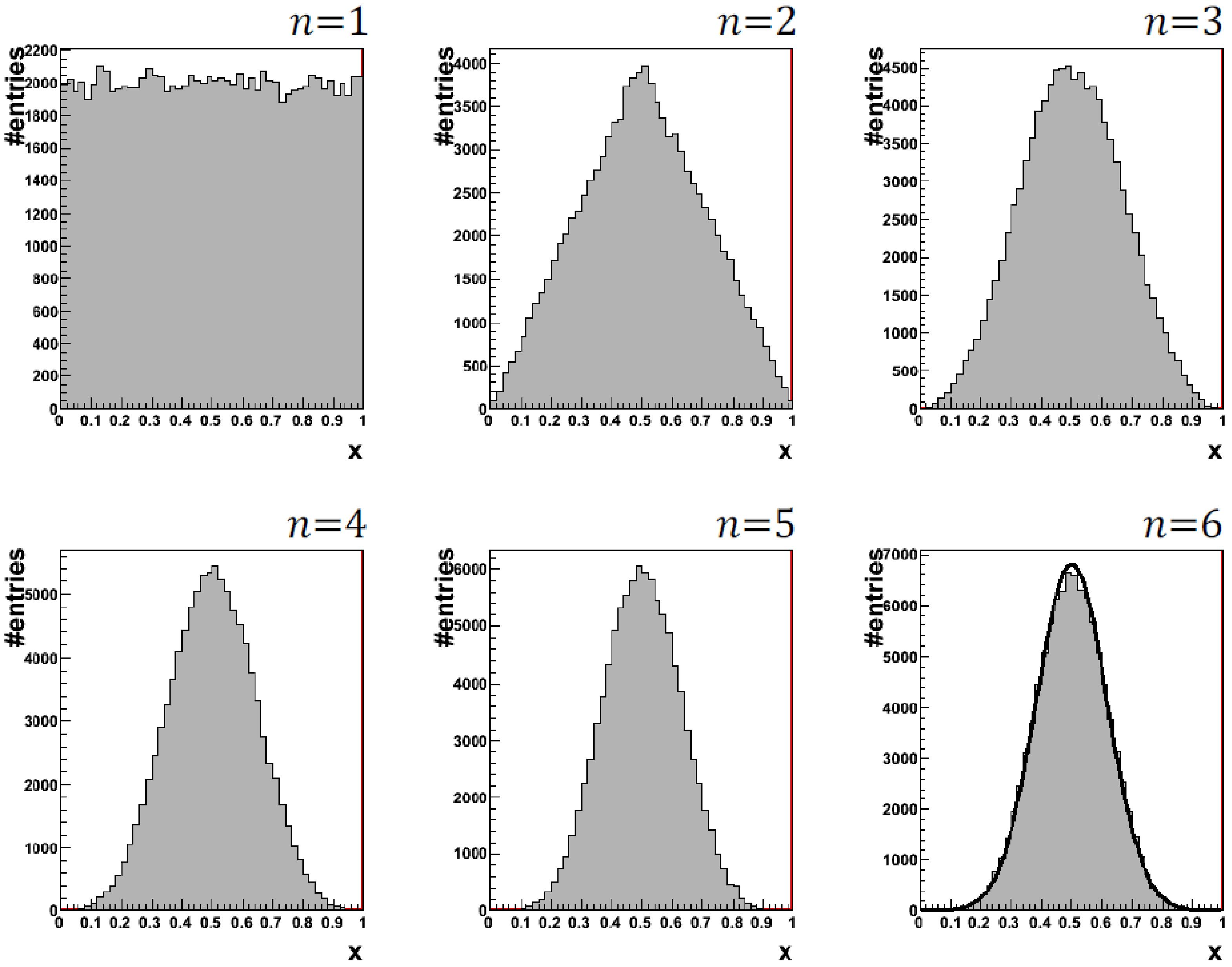
$$\tilde{S}_n \equiv \frac{S_n}{\sigma_n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{\sigma\sqrt{n}}$$

egységnyi varianciájú Gauss-eloszlást követ

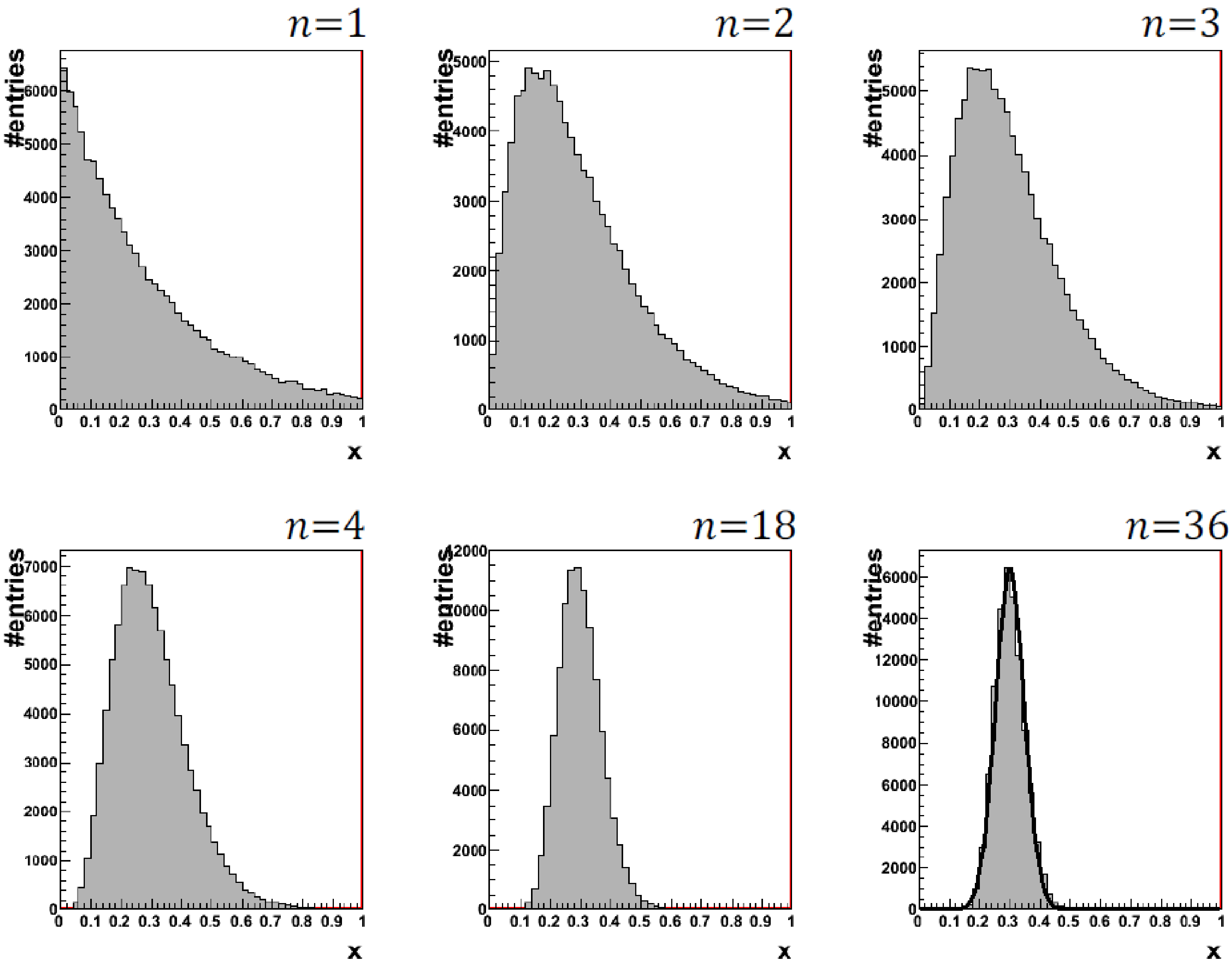
$$P_G(\tilde{S}_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\tilde{S}_n^2/2).$$

- **$P(\tilde{S}_n)$ folyamatosan egy Gauss eloszláshoz közelít, ahogy n növekszik**

CHT az egyenletes eloszlás példáján



CHT az exponenciális eloszlás példáján



A konvergencia sebessége

For independent random variables with finite variance, the CLT ensures that S_n will converge to a stochastic process with pdf

$$P_G(S_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp(-S_n^2/2\sigma_n^2). \tag{3.15}$$

How fast is this convergence? Chebyshev considered this problem for a sum S_n of i.i.d. random variables x_i. He proved [30] that the scaled distribution function given by

$$F_n(S) \equiv \int_{-\infty}^{S} \tilde{P}(\tilde{S}_n) d\tilde{S}_n \tag{3.16}$$

differs from the asymptotic scaled normal distribution function $\Phi(S)$ by an amount

$$F_n(S) - \Phi(S) \sim \frac{e^{-S^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Q_1(S)}{n^{1/2}} + \frac{Q_2(S)}{n} + \cdots + \frac{Q_j(S)}{n^{j/2}} + \cdots \right), \tag{3.17}$$

where the $Q_j(S)$ are polynomials in S, the coefficients of which depend on the first $j+2$ moments of the random variable $\{x_i\}$.

$$\tilde{x} \equiv \frac{x}{n^{1/2}}$$

$$\tilde{P}(\tilde{x}) \equiv P(\tilde{x}) n^{1/2}$$

Első Berry-Esséen tétel

Let the x_i be independent variables with a common distribution function F such that

$$E\{x_i\} = 0 \tag{3.18}$$
$$E\{x_i^2\} = \sigma^2 > 0 \tag{3.19}$$
$$E\{|x_i|^3\} \equiv \rho < \infty. \tag{3.20}$$

Then [57], for all S and n,

$$|F_n(S) - \Phi(S)| \le \frac{3\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}. \tag{3.21}$$

The inequality (3.21) tells us that the convergence speed of the distribution function of $\tilde{S}_n$ to its asymptotic Gaussian shape is essentially controlled by the ratio of the third moment of the absolute value of x_i to the cube of the standard deviation of x_i.

Második Berry-Esséen tétel

Theorem 2 is a generalization that considers random variables that might not be identically distributed. Let the x_i be independent variables such that

$$E\{x_i\} = 0 \tag{3.22}$$

$$E\{x_i^2\} = \sigma_i^2 \tag{3.23}$$

$$E\{|x_i|^3\} \equiv r_i, \tag{3.24}$$

and define

$$s_n^2 \equiv \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2 \tag{3.25}$$

and

$$\rho_n \equiv r_1 + r_2 + \cdots + r_n. \tag{3.26}$$

Then [57] for all S and n,

$$|F_n(S) - \Phi(S)| \leq 6\frac{\rho_n}{s_n^3}. \tag{3.27}$$

Attraktor medence

The study of limit theorems uses the concept of the *basin of attraction* of a probability distribution. To introduce this concept, we focus our attention on the changes in the functional form of $P(S_n)$ that occur when n changes.

We restrict our discussion to identically distributed random variables x_i. $P(S_1)$ then coincides with $P(x_i)$ and is characterized by the choices made in selecting the random variables x_i. When n increases, $P(S_n)$ changes its functional form and, if the hypotheses of the CLT are verified, assumes the Gaussian functional form for an asymptotically large value of n. The Gaussian pdf is an attractor (or fixed point) in the functional space of pdfs for all the pdfs that fulfill the requirements of the CLT. The set of such pdfs constitutes the basin of attraction of the Gaussian pdf.

Gauss-attraktor

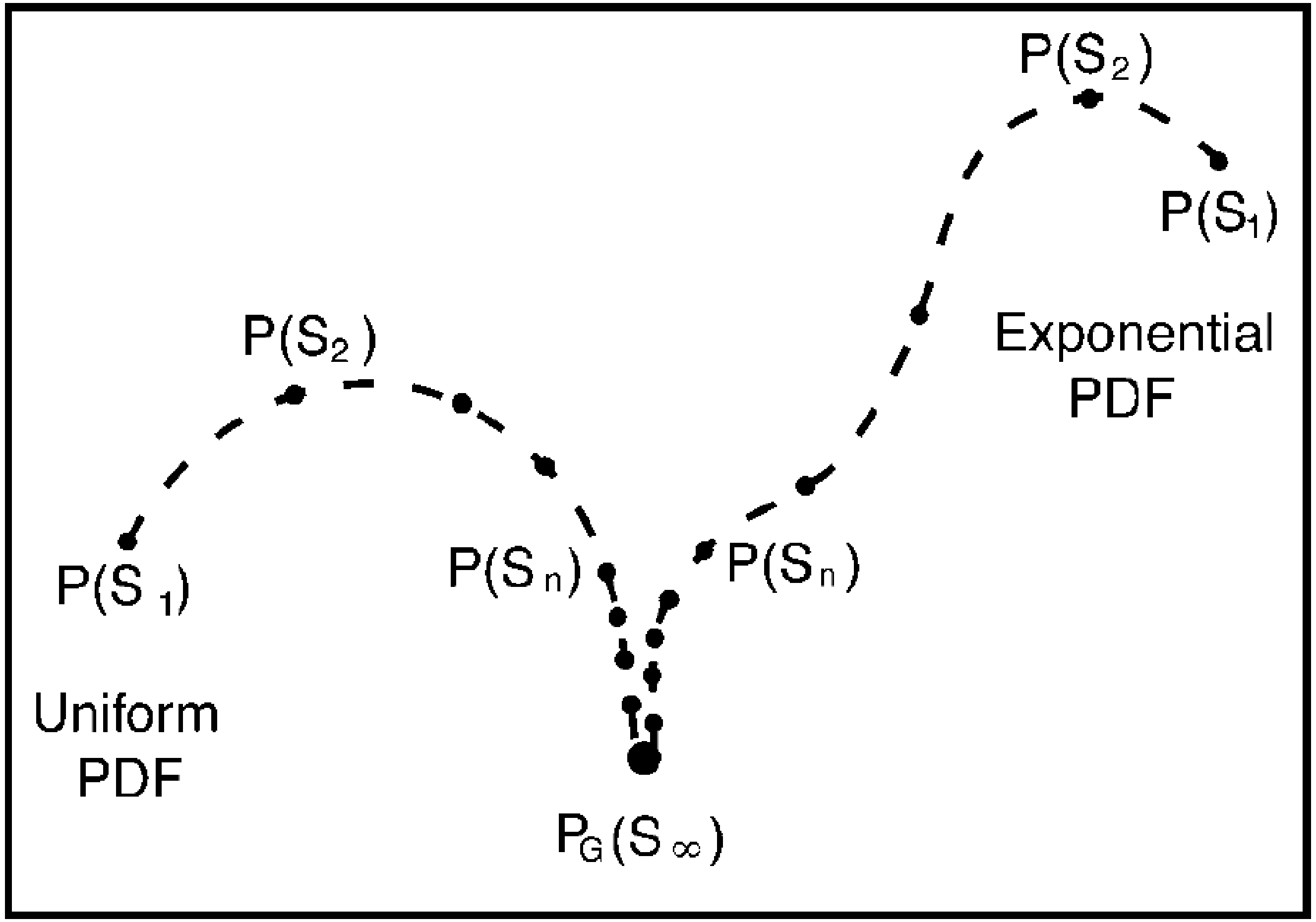


Fig. 3.5. Pictorial representation of the convergence to the Gaussian pdf $P_G(S_\infty)$ for the sum of i.i.d. finite variance random variables.

Gaussi véletlenszerű séta

A normál eloszlástól függően változó lépésmérettel rendelkező véletlenszerű bolyongás modellként használható valós idősoros adatokhoz, például a pénzügyi piacokon. Az opcióárak modellezésére szolgáló Black–Scholes-modell például egy Gauss-féle véletlen bolyongást használ alapfeltevésként.

Köszönöm szépen a figyelmet!