

バルク・流体 (理論)

村瀬功一 (都立大理)

「高エネルギー重イオン衝突の物理」チュートリアル研究会
阪大南部陽一郎ホール, 2024/08/08

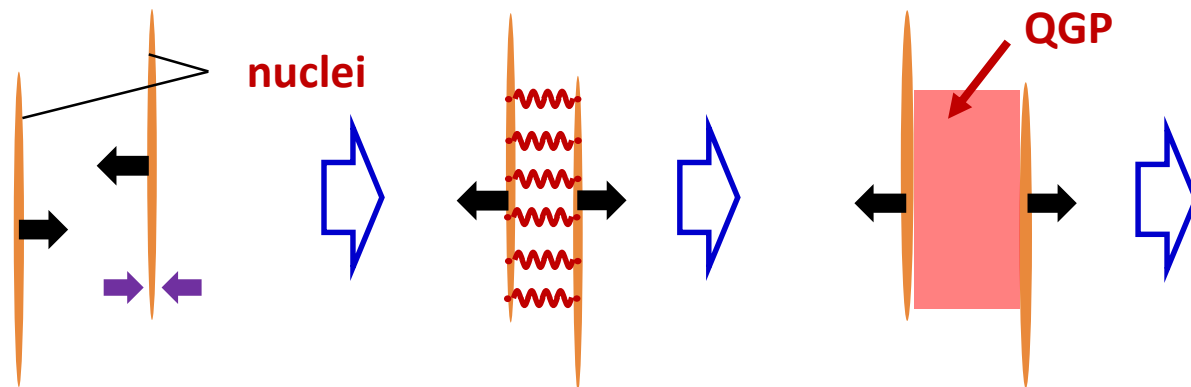
目次

- 1. 動的模型
- 2. 測定量
- 3. 流体方程式と適用限界

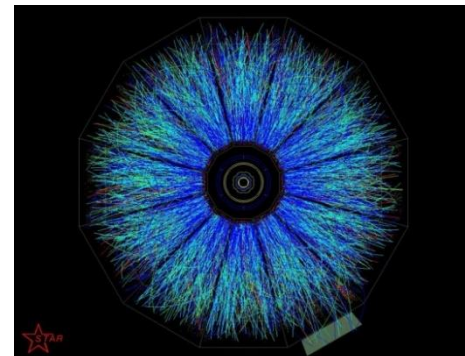
1. 重イオン衝突の動的模型

重イオン衝突反応過程

原子核同士を加速器で衝突



Hadrons



大まかに4つのステージ (~ 動的模型における理解)

① 初期状態 渡邊さん

② 初期ダイナミクス 田屋さん

③ 流体発展 この講演

+ ジェット 橘さん、臨界ダイナミクス 赤松さん

④ ハドロン輸送 (微視的自由度)

動的模型

- = “シミュレーションの枠組み”
- = 測定量(ハドロン終状態)とダイナミクスを繋ぐ
- = 衝突反応の物理的理解の「形」
- = 衝突反応の上で起こる物理を考える上での「舞台背景」
ジェット、EMプローブ、ハドロン運動量相関、軽原子核生成...

(実際にフルシミュレーションで使われているorいた模型)

初期状態の模型

MC-Glauber, MC-KLN, IP-Glasma (IP-Sat), TRENTo, AMPT, etc.

Pre-equilibrium dynamics

IP-Glasma (classical YM), Free streaming, K ϕ MP ϕ ST, EKT, KTIso, etc.

相対論的流体

完全流体、粘性流体、ゆらぐ流体、非平衡カイラル流体、etc.

ハドロン微視的輸送模型

JAM, UrQMD, SMASH

「バルク・集団運動」の目的?

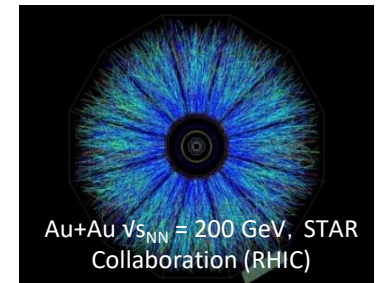
生成物質 (QGP) の平衡周りの性質 (状態方程式、粘性、相図...)

動的模型が必須

- ✓ 色々の物理を入れた数値計算の枠組み
- ✓ 衝突全過程の定量的記述
- ✓ 熱化過程+流体発展+ハドロン運動学+...

実験

- 生成物質は小さい & 短寿命 ~ 微視スケール
- 相対論的速度で膨張
- 測定できるのは終状態のハドロン運動量分布



2. 重イオン衝突の測定量

重イオンの測定量

Q. 実際に測定されるものは何か?

→ A. イベントごとに粒子のリストが
衝突1回のこと 得られる

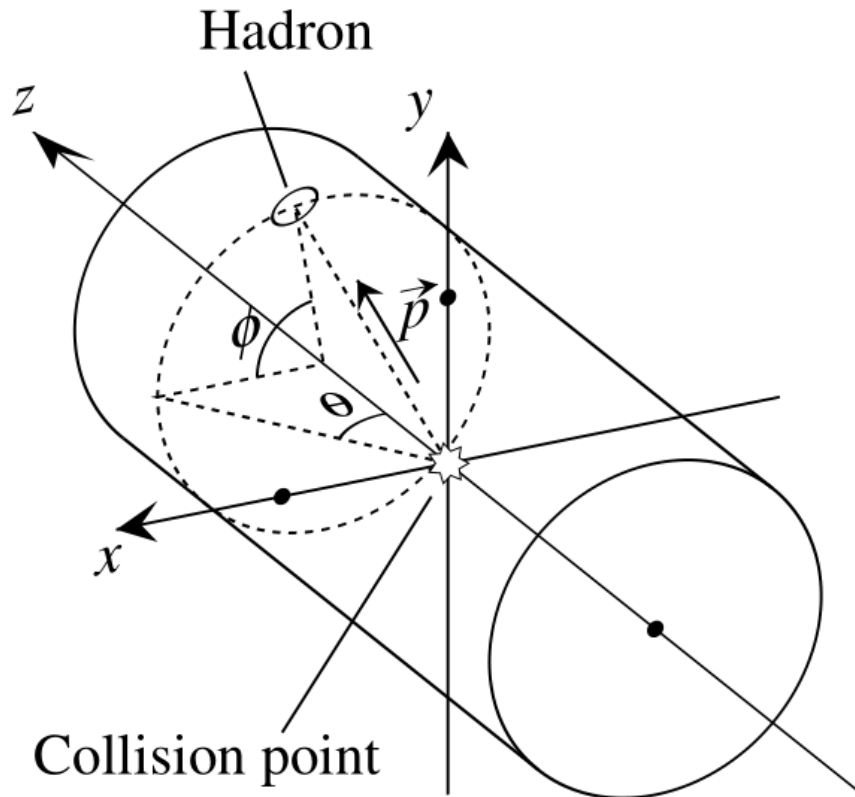
種類	p_x [GeV]	p_y [GeV]	p_z [GeV]
π^+	0.2322	-0.0852	1781.2
π^-	-0.3066	0.1522	-318.77
π^-	-0.3956	0.0037	-791.58
K^+	-0.0111	-0.1103	873.58
p	0.0361	0.2735	2018.8

× 物凄く沢山のイベント数

× 数千
粒子

重イオンの測定量

運動量 $(p_x, p_y, p_z) \rightarrow (\eta, p_T, \varphi)$



$$\tanh \eta = \cos \theta$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

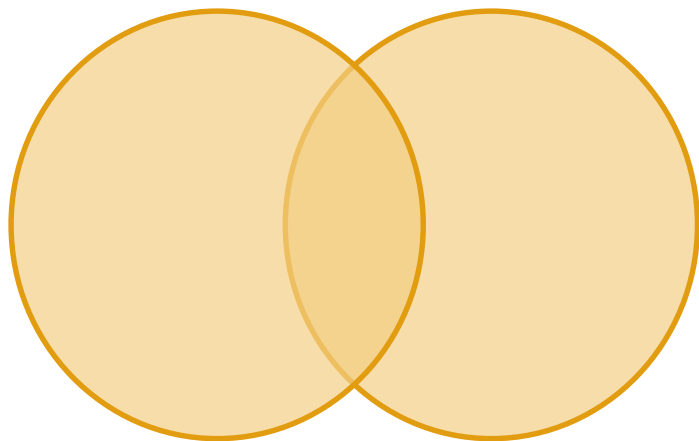
粒子のリストに対する処理

荷電粒子の数を数える
エネルギーの和を考える
ヒストグラムを作る、etc.

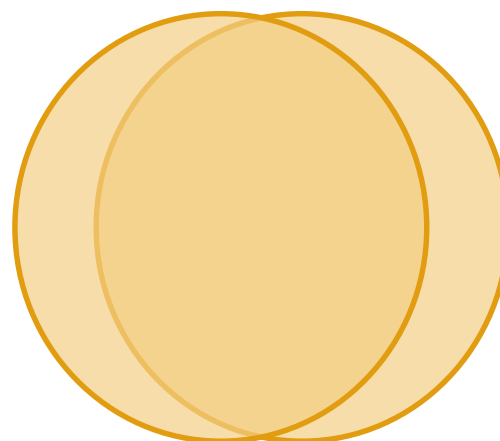
→ *multiplicity, transverse energy, centrality, etc.*

例: **Centrality (中心度)** ... 例えば或る η 範囲の荷電粒子の数

少ない = 周辺衝突

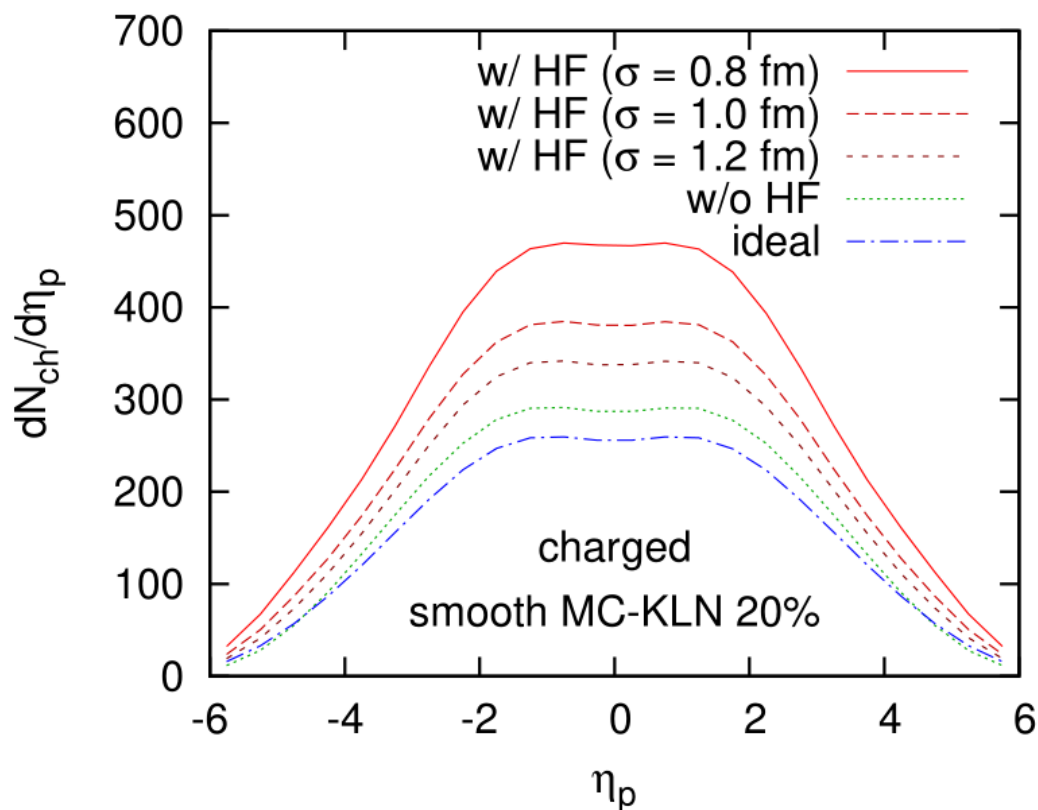


多い = 中心衝突



粒子のリストに対する処理

例: η のヒストグラム $\rightarrow dN/d\eta$

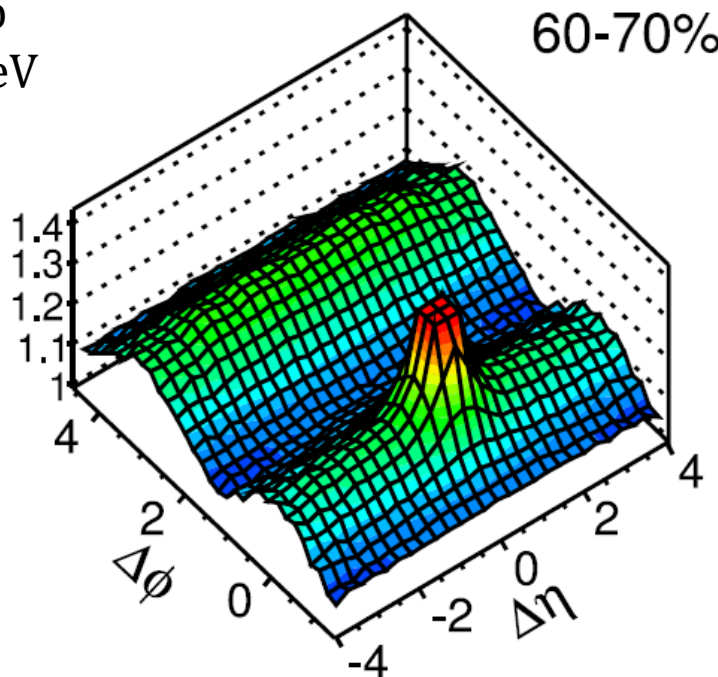


Au+Au 200 GeV with hydrodynamic fluctuations (HF)

粒子のリストに対する処理

例: 1粒子から見た周りの粒子の分布の
ヒストグラム $f(\eta_2 - \eta_1, \varphi_2 - \varphi_1)$
→ 二粒子相関

$^{208}\text{Pb} + ^{208}\text{Pb}$
 $\sqrt{s_{NN}} = 2.76 \text{ TeV}$



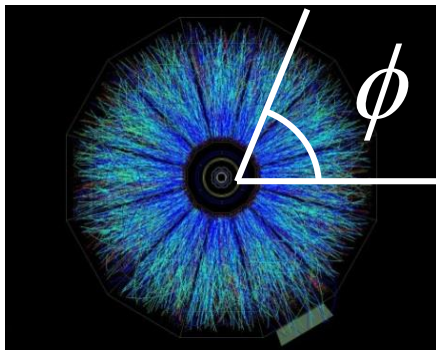
The CMS Collaboration, Eur.
Phys. J.C (2012) 72:2012

方位角異方性

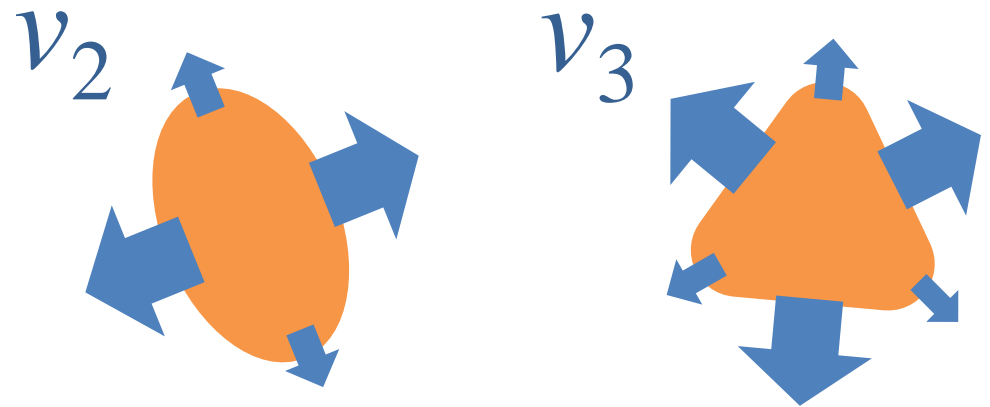
ϕ 分布 $N(\phi)$ をフーリエ級数展開
→ 展開係数 **方位角異方性**・フロー v_n

$$\frac{1}{N'} \frac{dN'}{d\phi} = \frac{1}{2\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos n(\phi - \Psi_n) \right].$$

v_n フロー係数 v_n Ψ_n 事象平面 Ψ_n



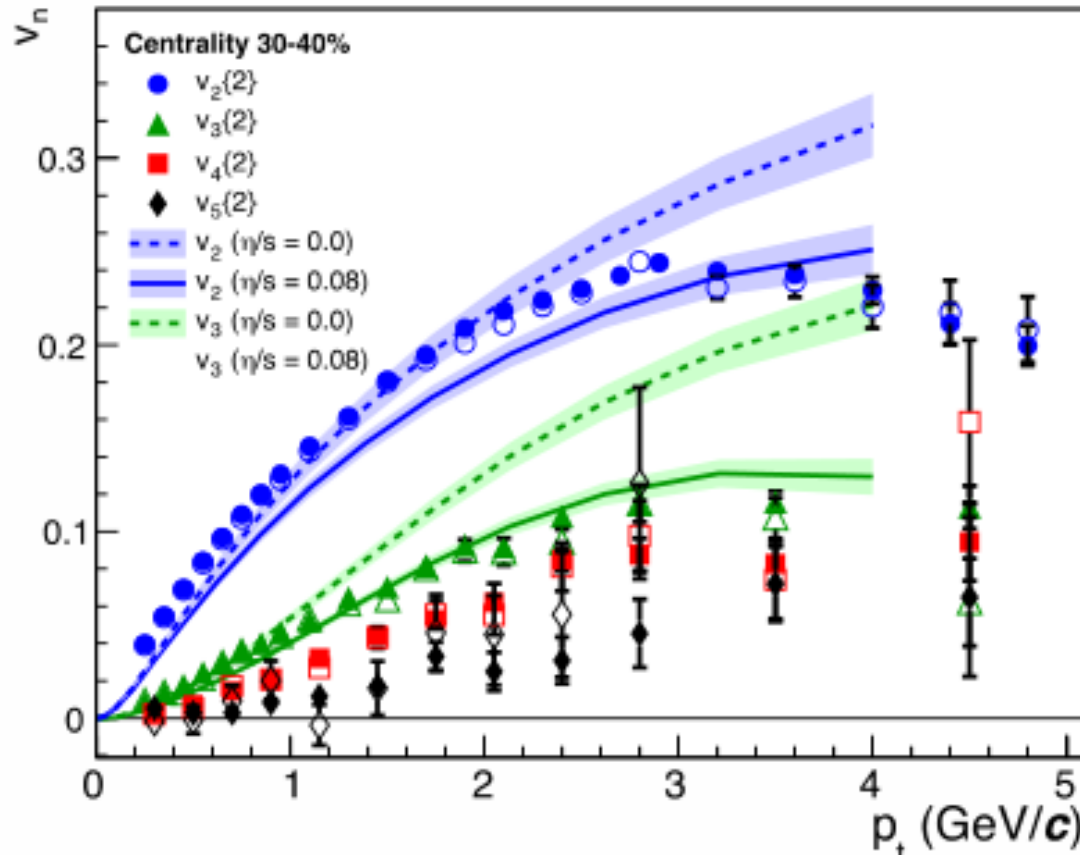
Au+Au $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV
STAR Collaboration (RHIC)



解釈: 流体中の流れパターンに対応

方位角異方性

φ 分布 $N(\varphi)$ をフーリエ級数展開
→ 展開係数 方位角異方性・フロー v_n

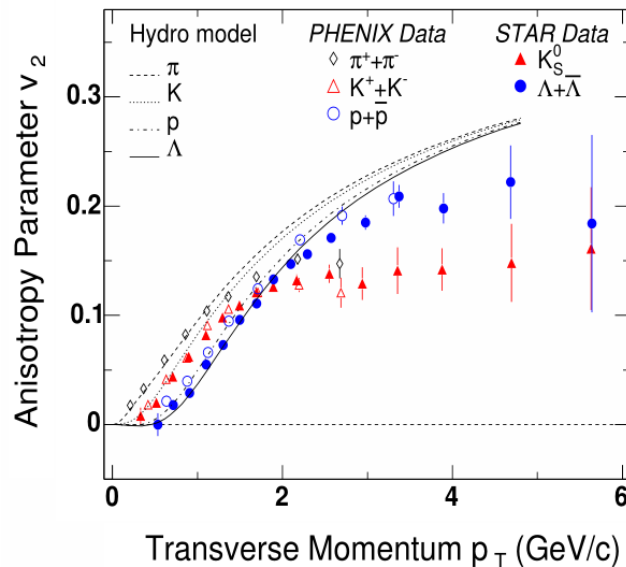
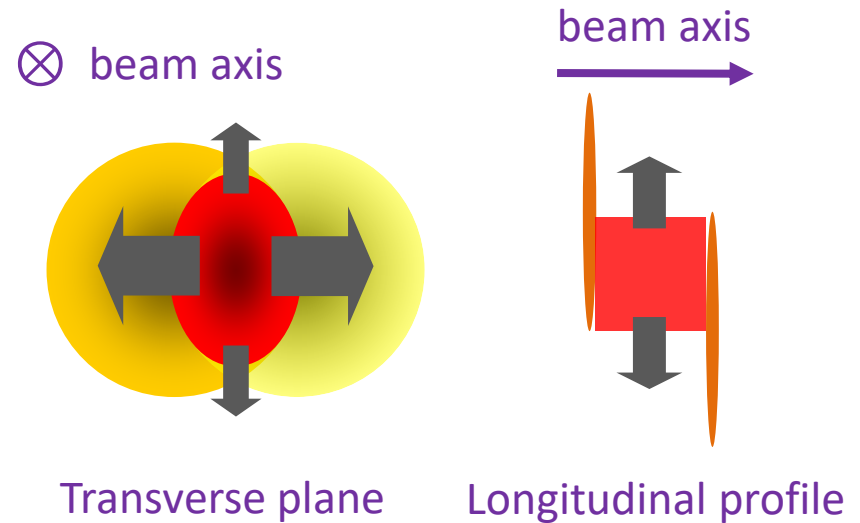


K. Aamodt et al. [ALICE Collaboration], Phys. Rev. Lett. 107, 032301 (2011)

実験的なQGP生成の(状況)証拠

QGP signatures (~ 2005)

- *Collective flow*
- Jet quenching
- Strange enhancement
- Thermal spectra of photons/dileptons
- J/ψ suppression
- etc.



Momentum anisotropy parameter v_2

Au+Au at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV (RHIC)

Points: experimental data

Lines: hydrodynamic predictions

from M. Gyulassy and L. McLerran, NPA750, 30 (2005)

測定量の見方

0. 衝突系 & 衝突エネルギー (例: Pb+Pb 2.76 TeV)
1. イベント選択 (例: 0-5%)
centrality, event-shape engineering, etc.
2. 粒子の選択 (例: $|\eta| < 0.3$)
PID (粒子の種類)
(η, p_T) の範囲 (サブイベント) ← acceptance
(p_T, η) ごとのビン分け: 例 “ p_T -differential”
3. イベント平均する量
粒子の数 → multiplicity ($dN/d\eta$), spectra (dN/dp_T)
方位角 $e^{in\varphi}$ → フロー、横運動量 p_T
様々な積 → 相関
4. 平均量の組み合わせ・処理
割り算・引き算 → R_{AA} ・様々なフロー係数、etc.

バルクの測定量と物理

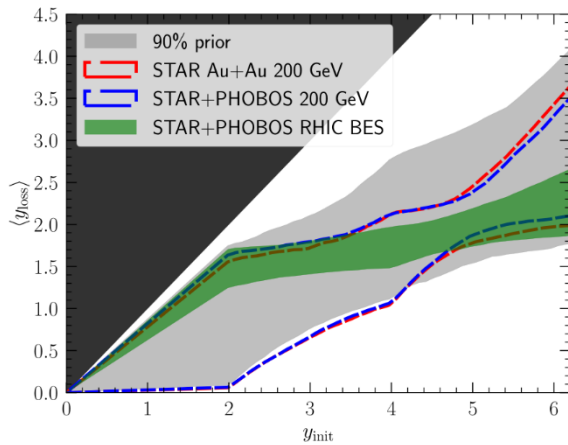
※一対一にきれいに対応する訳ではないが、大体、

- $dN_{ch}/d\eta$: 初期模型のエントロピー生成
 - $dN_{net-p}/d\eta$: バリオンストッピング
 - フロー v_2, v_3, \dots, v_n :
 - $v_n\{2\}, v_n\{SP\} \sim \langle v_n^2 \rangle^{1/2}$... 粘性係数
 - $v_n\{4\} \sim \langle v_n^4 \rangle_c^{1/4}$... flow fluctuations
 - $v_2\{2m\}$... 流体的振る舞い
 - $r_n(\eta_a, \eta_b) \sim \langle \cos[n(\Psi_a - \Psi_b)] \rangle$:
縦脱相関・初期条件の縦の構造・流体ゆらぎ
 - 様々なフロー相関 $\langle v_n^a v_m^b \dots \rangle_c^{1/2}$
 $SC(n,m), AC_{a,b}(n,m), NSC(n,m), NAC_{a,b}(n,m), MHC, nMHC$
初期模型選別や詳細なモデルパラメータ
 - $\rho([p_T], v_2^2)$: 初期フローvs流体発展
 - etc
- 時代は Global Bayesian Analysis?
色々な測定量から同時に複数の物理を制限

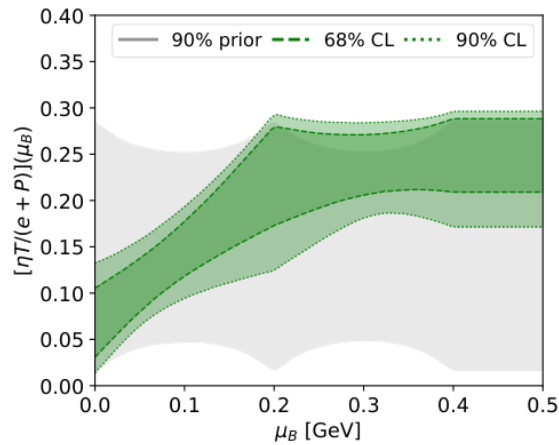
Global Bayesian Analysis

ベイズ解析による粘性係数・初期条件の制限
(S. Jahan, H. Roch, C. Shen, QM 2023, arXiv:2408.00537)

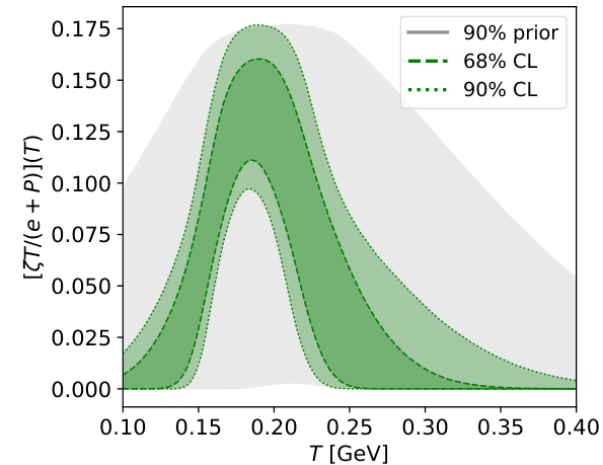
Initial stopping



Shear viscosity (μ_B)



Bulk viscosity (\mathcal{T})



iEBE-MUSIC / 3D 初期条件 (string deceleration)

※入力に使った測定量およびスペクトル、 $v_2(p_T)$ は大体合っている
(しかし、すべての測定量を完全に予言できるわけではないはず)

※モデル依存性

(例) 構成方程式に入れる項や他の係数の決定方法

3. 流体方程式と適用限界

流体力学

= (基本的に) 連続の式(保存則)

$$\text{e.g. } \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad T^{\mu\nu} = e u^\mu u^\nu - P \Delta^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}$$

u^μ : ランダウフレーム

“流体力学” が使えるのは...

流束 T^{ij} (\sim 応力) が **保存密度** の分布 $T^{0\mu}$ ($\sim e, u^\mu$) から **一意に** 定まる時

例: 平衡近く では熱力学が **EoS** & **構成方程式** を与える



流束の微分展開

流体方程式が閉じるためには流束 $\Gamma(x)$ は最も一般的には
(現在以前の)動的自由度 $X(x)$ で書かれなければならない(汎関数)

$$\Gamma(x) = \Gamma[\{X(x')\}_{x'^0 \leq x^0}](x).$$

$X(x)$ がなめらかならば $\Gamma(x)$ は局所的な X の k 階微分($k \geq 0$)の関数
と考えることができる。

$$\Gamma(x) = \Gamma(X(x), \partial_\mu X(x), \dots, \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_k} X(x)).$$

右辺を更にテーラー展開して ∂ について有限次で打ち切ることに
すると、右辺は X の微分の多項式になる。

→ 微分展開

Navier-Stokes理論

微分の0次 = 完全流体 (粘性なし)

$$\Gamma = \Gamma_{\text{eq}}(X)$$

微分の1次 = Navier-Stokes 理論

$$\Gamma = \Gamma_{\text{eq}}(X) + \kappa \partial X$$

線形解析

= エネルギーのゆらぎ・流速が小さいとする

= 非相対論極限 → (非相対論の)Navier-Stokes方程式に一致

拡散方程式の構造を含む

$$\partial_t u = \nu \nabla^2 u$$

伝播関数はガウス分布の形 = 無限に裾野が広がる

= 信号速度が無限ということになるので因果律を破る

Mueller-Israel-Stewart理論

I. Mueller (1967), Israel-Stewart (1976)

物理的には因果律を破ってはいけないはずだが、
NS理論は必ず因果律を破る。なぜ?

→ 微分展開を素朴に有限で打ち切ったのが問題

より高次の微分の項を上手に入れて情報伝達を有限速度に

$$\partial_t u = -\nabla \pi, \quad \pi = -v \nabla u - \tau_R \partial_t \pi$$

この形の方程式(電信方程式)の解は
知られていて有限速度になる

π の右辺に π が再び現れる

= 再帰的に代入すれば無限次の寄与がある意味含まれている

= ある種の resummation

★別の展開の仕方: DNMR理論 Denicol-Niemi-Molnar-Rischke (2012)

aHydro M. Martinez, M. Strickland (2010) resummed shear viscosity Denicol-Noronha (2019), ...

流体力学

= (基本的に) 連続の式(保存則)

$$\text{e.g. } \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad T^{\mu\nu} = e u^\mu u^\nu - P \Delta^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}$$

u^μ : ランダウフレーム

“流体力学” が使えるのは...

流束 T^{ij} (\sim 応力) が **保存密度** の分布 $T^{0\mu}$ ($\sim e, u^\mu$) から **一意に** 定まる時

例: 平衡近く では熱力学が **EoS** & **構成方程式** を与える



流体力学 + α

流束が一意に定まらないとき...

流体



流体力学 + α

流束が一意に定まらないとき...

→ **他の自由度の影響が必要**

- **A:** 遅いモード → 動的な自由度を追加。 系統的ずれ
- **B:** 速いモード → 微視的自由度からの影響。 統計的ずれ

流体

A. 動的自由度

B. 熱ゆらぎ

動的自由度

興味のあるスケールよりも遅い・長い少数の自由度
→ (保存則) + (追加自由度の発展方程式)

- **Extended thermodynamics / Israel-Stewart理論:**
散逸流(のNavier-Stokesからのずれ) I. Mueller (1967), Israel-Stewart (1976)
- **磁気流体:** 磁場 B
- **数値相対論:** 計量 $g_{\mu\nu}$
- **Spin hydrodynamics:** スピンテンソル $S^{\lambda,\mu\nu}$ Becattini (2011), etc.
- **非平衡カイラル流体:** カイラル場 (σ, π) M. Nahrgang et al. (2012)
- **カイラル磁気流体:** 軸性電荷 n_5 M. Hongo, Y. Hirono, T. Hirano (2017)
- **Hydro+:** 2点相関 $\langle \delta(s/n)(x) \delta(s/n)(0) \rangle$ M. Stephanov, Y. Yin (2017)
- **磁気抵抗流体:** 電磁場 E, B K. Nakamura, Y. Nonaka et al. (2023)

※ hydrodynamic mode に限らない

Hydrodynamic mode = ($\tau \rightarrow \infty$ 、 $l \rightarrow \infty$ で残る自由度): 保存量 & massless mode

Non-hydrodynamic mode = (それ以外): IS理論における散逸流など

流体力学 + α

流束が一意に定まらないとき...

→ **他の自由度の影響が必要**

- **A:** 遅いモード → 動的な自由度を追加。 系統的ずれ
- **B:** 速いモード → 微視的自由度からの影響。 統計的ずれ

流体

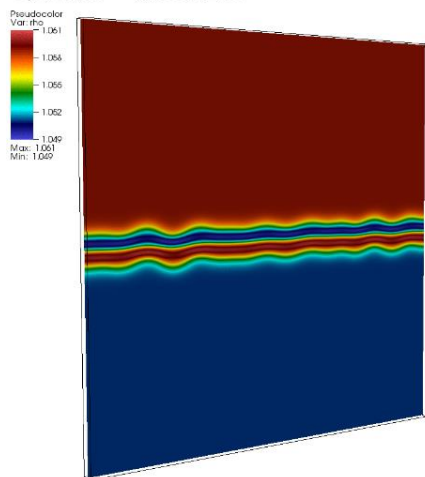
A. 動的自由度

B. 熱ゆらぎ

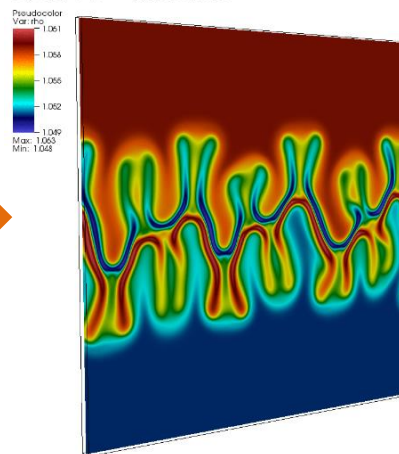
熱ゆらぎ

- 興味のあるスケールよりも速い・短い多数の自由度。
スケール分離が悪いとき (少数多体系など)
- Langevin方程式のような確率的微分方程式(ノイズ項)
- 非線形な時間発展によって
巨視的な(遅い・長い)ダイナミクスに影響しうる
“butterfly effects” (特に不安定性がある場合等)

DB: Header
Cycle: 160 Time:10.2258



DB: Header
Cycle: 540 Time:34.512



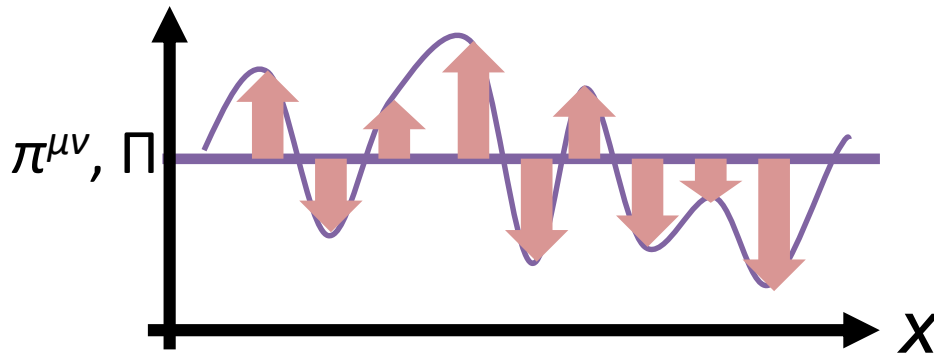
Rayleigh-Taylor instability
by thermal fluctuations

taken from Courant Institute,
<http://cims.nyu.edu/~donev/Research.html>

流体力学的ゆらぎ (hydro fluctuations)

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics (1959)

流体場の熱ゆらぎ



Spontaneous field fluctuations of fluid fields such as $\pi^{\mu\nu}$, Π , etc. at each t and each x

c.f. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics (1959)

揺動散逸関係 (FDR, fluctuation-dissipation relation)

Magnitude of *fluctuations* $\delta\pi$, etc.

is determined by *dissipation* η , etc. (and temperature T)

$$\langle \delta\pi^{\mu\nu}(x) \delta\pi^{\alpha\beta}(x') \rangle = 4T\eta \Delta^{\mu\nu\alpha\beta} \delta^{(4)}(x - x')$$

$$\eta \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \delta\pi \neq 0$$

流体力学的ゆらぎ (hydro fluctuations)

L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics (1959)

流体場の熱ゆらぎ

Noise terms $\xi(x)$ in hydrodynamic equations (\sim Langevin eq)

e.g. In the second-order theory (causal & stable)

$$\begin{aligned}\pi^{\mu\nu} + \tau_\pi \Delta^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} D\pi^{\alpha\beta} &= 2\eta \partial^{\langle\mu} u^{\nu\rangle} + \dots + \xi_\pi^{\mu\nu}, \\ [1 + \tau_\Pi D]\Pi &= -\zeta \partial_\mu u^\mu + \dots + \xi_\Pi.\end{aligned}$$

※オンサーガーの退行(regression)仮説

「平衡近くの熱揺らぎの平均的な”退行”は
外場による摂動の緩和(線形応答)と同じ方程式に従う」

揺動散逸関係 (FDR, fluctuation-dissipation relation)

Magnitude of *fluctuations* $\delta\pi$, etc.

is determined by *dissipation* η , etc. (and temperature T)

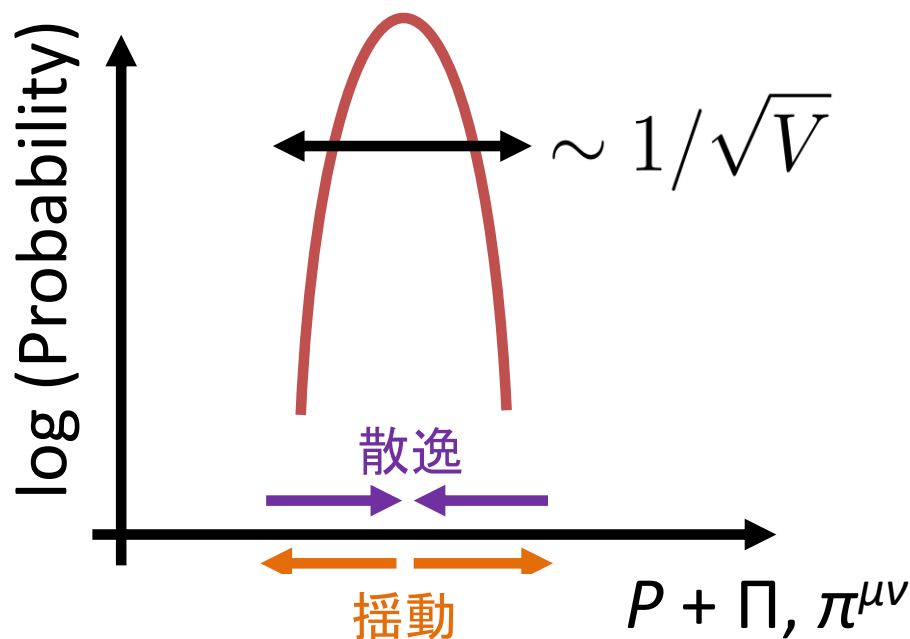
$$\langle \delta\pi^{\mu\nu}(x) \delta\pi^{\alpha\beta}(x') \rangle = 4T\eta \Delta^{\mu\nu\alpha\beta} \delta^{(4)}(x - x')$$

$\eta \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \delta\pi \neq 0$

揺動散逸関係の解釈

流体場の熱分布

$$\ln \text{Pr} \sim S \sim V \cdot \left(s_{\text{eq}} - \frac{\tau_{\Pi} \Pi^2}{2T\zeta} - \frac{\tau_{\pi} \pi^{\mu\nu} \pi_{\mu\nu}}{4T\eta} \right)$$



FDR =

流体場の熱分布を再現するための
揺動と散逸のバランスの式

オーダー評価

$$\text{FDR: } \langle \delta\pi^2 \rangle \simeq 4T\eta / \Delta t \Delta x^3$$

($\Delta t, \Delta x$: 興味のある典型的スケール)

グラスの中の水

$$\eta \simeq 10^{-3} \text{ [Pa sec]} (\simeq 50 \text{ s})$$

$$T \simeq 300 \text{ [K]} (\simeq 3 \times 10^{-9} \text{ [MeV]})$$

$$\Delta x \simeq 10^{-3} \text{ [m]}$$

$$\Delta t \simeq 10^{-1} \text{ [sec]}$$



$$\delta\pi \simeq 4 \times 10^{-8} \text{ [Pa]}$$

$$P \simeq 10^5 \text{ [Pa]}$$



$$\delta\pi / P = 4 \times 10^{-13}$$

重イオン衝突の QGP

$$\eta \simeq 0.1 \text{ s} \simeq 0.2 \text{ [fm}^{-3}\text{]}$$

$$T \simeq 300 \text{ [MeV]}$$

$$\Delta x \simeq 1 \text{ [fm]}$$

$$\Delta t \simeq 1 \text{ [fm]}$$



$$\delta\pi \simeq 2 \times 10^2 \text{ [MeV/fm}^3\text{]}$$

$$P \simeq 4 \times 10^3 \text{ [MeV/fm}^3\text{]}$$



$$\delta\pi / P = 0.05$$

重イオン衝突で生成される QGP の流体力学的ゆらぎは無視できない

方程式系のまとめ

保存則

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_\mu T^{\mu\nu} &= 0, \\ \bar{\partial}_\mu N_i^\mu &= 0.\end{aligned}$$

エネルギー—運動量保存

電荷保存

$\bar{\partial}_\mu$ 共変微分

状態方程式

$$P = P(e, n)$$

構成方程式 (例)

$$\begin{aligned}\tau_\Pi \bar{D}\Pi + \sigma_\Pi \theta \Pi + \Pi &= -\zeta \theta + \xi_\Pi, \\ \tau_\pi \Delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \bar{D}\pi^{\alpha\beta} + \sigma_\pi \theta \pi^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} &= 2\eta \sigma^{\mu\nu} + \xi_\pi^{\mu\nu}, \\ \tau_{ij} \Delta^\mu_{\alpha} \bar{D}\nu_j^\alpha + \sigma_{ij} \theta \nu_j^\mu + \nu_i^\mu &= \kappa_{ij} T \bar{\nabla}^\mu \frac{\mu_j}{T} + \xi_i^\mu.\end{aligned}$$

2次緩和

Navier-Stokes

$$D = u^\mu \partial_\mu, \quad \text{物質微分}$$

$$\nabla^\mu = \Delta^{\mu\nu} \partial_\nu. \quad \text{空間微分}$$

流体の様々な適用限界スケール Λ

- 素朴には $\Lambda \sim T \sim 150 \text{ MeV} \sim 1/(1.3 \text{ fm})$

- Nonlinear causality condition

F. Bemfica, M. Disconzi, V. Hoang, J. Noronha, M. Radosz, PRL 126, 222301 (2021)

- 熱ゆらぎの大きさ $\sim \Lambda^{3/2}$

微分展開の要請: 0次 \gg 1次 \gg 2次

$P > \pi^{\mu\nu}, \Pi \rightarrow \Lambda$ を大きくしすぎると破綻

- 揺動散逸関係の2次の補正 KM (2019)

$$\langle \xi_{\Pi}(x) \xi_{\Pi}(x') \rangle = \left(2 + \tau_{\Pi} D \ln \frac{T\zeta}{\tau_{\Pi}} - \tau_{\Pi} \theta \right) T\zeta \delta^{(4)}(x - x'),$$

正でなければならない。膨張率に制限

様々な条件で流体方程式が破綻

\rightarrow 流体方程式に対するさらなる補正 or 別の枠組み?

終わりに

高エネルギー重イオン衝突は急激に(相対論的に)膨張し、またサイズ・寿命ともに小さな極度に非平衡な反応

→さまざまな流体力学の理論的发展

Q. 流体力学を发展させて

QGPの性質を決定して終わりなのか?

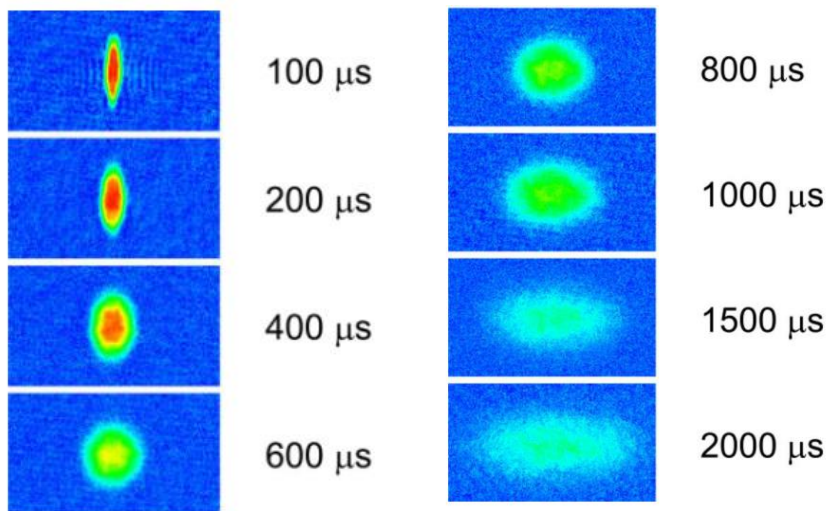
→ 发展させた相対論的流体力学を物理学の他の分野に「輸出」できないか?

冷却原子気体

${}^6\text{Li}$ などの超微細構造 ($\Delta = \mu \cdot B$) 間の
Feshbach 共鳴により磁場 B の強さで
 s 波散乱長 a_0 を変えることにより相互作用を制御

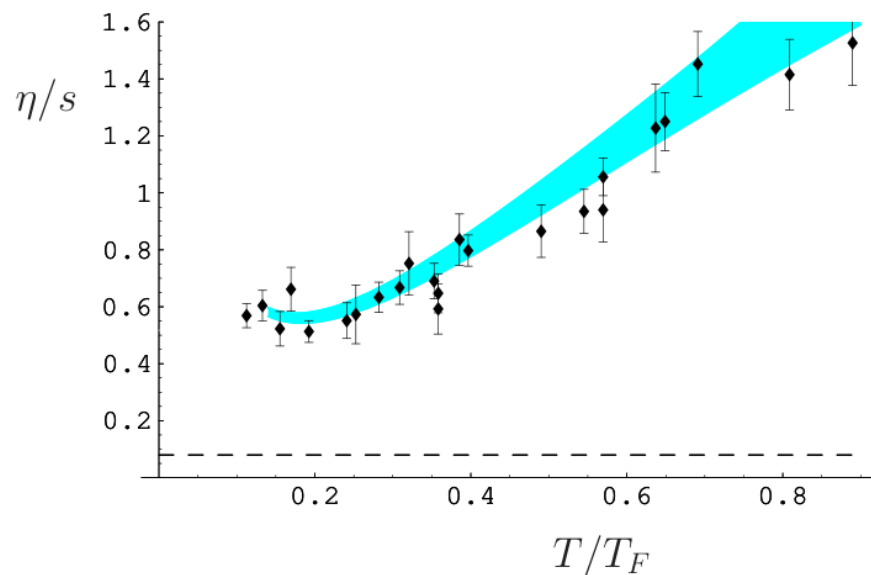
重イオン衝突と同様の楕円フロー

非相対論的流体力学で記述



K. O'Hara et al. *Science* **298**, 2179 (2002)

η/s を抽出 (振動モードの減衰から)



T. Schafer, *PRA* **76**, 063618 (2007)

少数多体系 ~ 適用限界に近い流体の検証?

cf Impurities (~ heavy quarks) の場合

Y. Akamatsu et al. [arXiv:2312.08241](https://arxiv.org/abs/2312.08241)