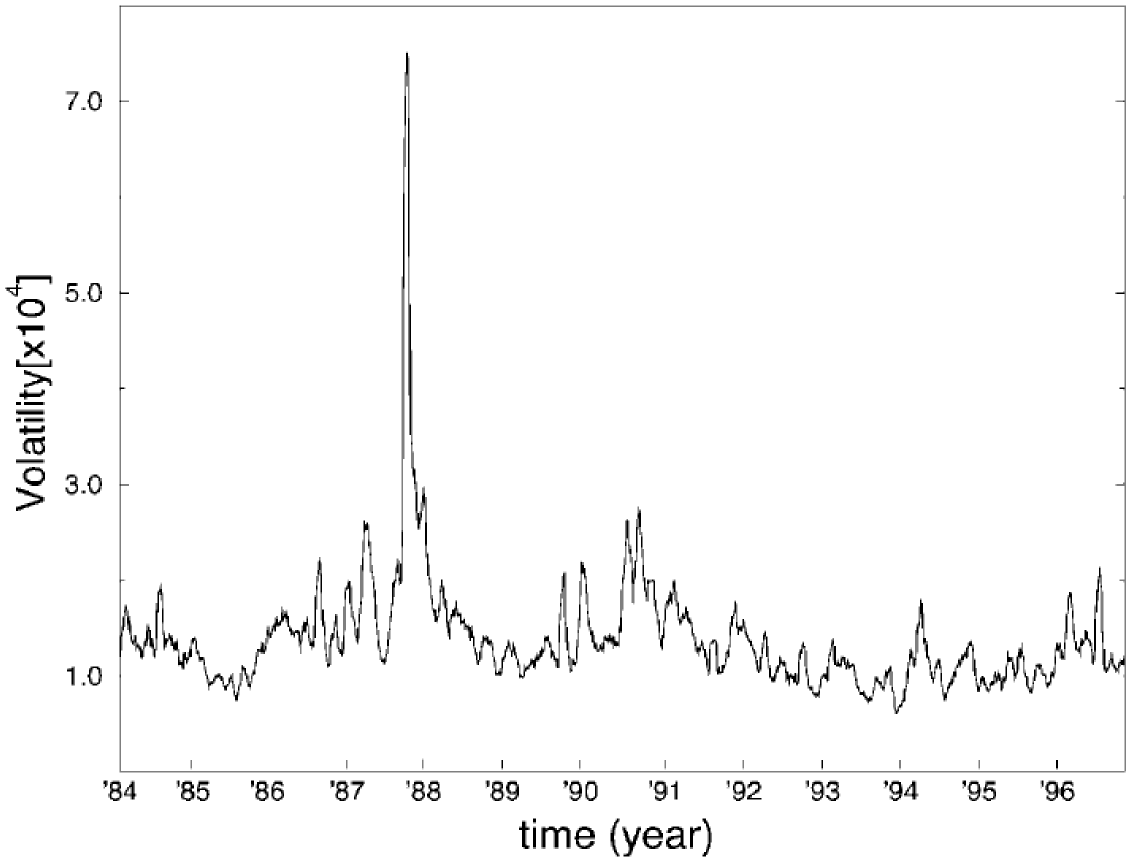
Lévy Stochastic Processes and Limit Theorems

Novák Tamás

MATE KRC, Gyöngyös, Hungary

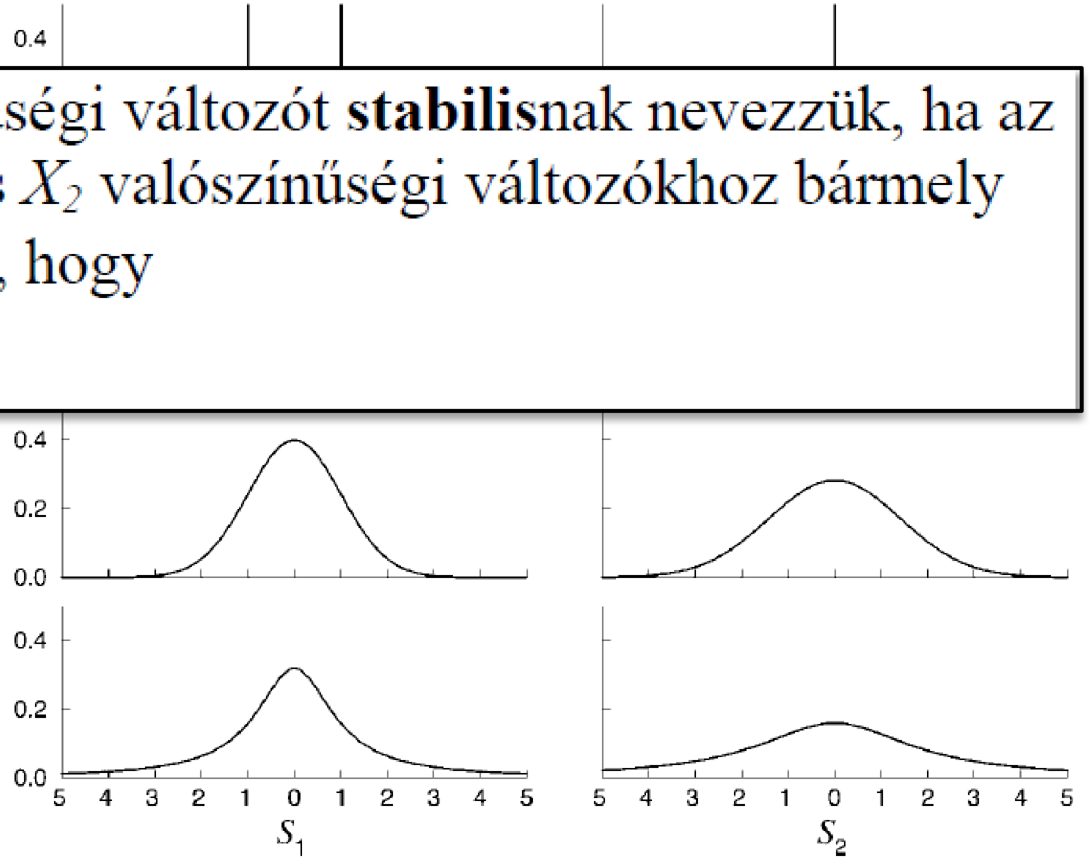
2024.06.20.



Stabil eloszlások (még az előző fejezetből)

- **Vegyük n db független, azonos eloszlású (i.i.d.) véletlen változó (v.v.) összegét:**

$$S_n \equiv x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$



Definíció: Az $F(x)$ eloszlásfüggvényű X valószínűségi változót **stabilis**nak nevezzük, ha az ugyancsak $F(x)$ eloszlásfüggvényű független X_1 és X_2 valószínűségi változókhoz bármely $c_1, c_2 \in R_+$ esetén találhatók a és b konstansok úgy, hogy

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 = aX + b \quad \text{(eloszlásban)}$$

második kettő eloszlás.

- **A Gauss és Lorentz folyamatok stabilak, de általában a sztochasztikus folyamatok nem.**

Stabil eloszlások (Lorentz eset)

- **Formális bizonyítás (A Gauss és Lorentz eloszlások stabilak)**

- **Lorentz véletlen változó esetén a sűrűségfüggvény (pdf)**

$$P(x) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\gamma^2 + x^2}$$

- **Ennek Fourier-transzformáltja:** $\varphi(q) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) e^{iqx} dx$ **, azaz** $\boxed{\varphi(q) = e^{-\gamma|q|}.}$

- **Tudjuk a konvolúciós tételből, hogy**

$$\mathscr{F}\left[f(x) \bigotimes g(x)\right] = \mathscr{F}[f(x)]\mathscr{F}[g(x)] = F(q)G(q).$$

Stabil eloszlások (Lorentz eset)

- **Két i.i.d. v.v. esetén:** $S_2 = x_1 + x_2.$
- **P2(S2) pdf-je:** $P_2(S_2) = P(x_1) \bigotimes P(x_2),$
- **Alkalmazva a konvolúciós tételt:** $\varphi_2(q) = [\varphi(q)]^2.$
- **Általános esetben pedig**
- **Így végül**

$$\boxed{\begin{gathered} P_n(S_n) = P(x_1) \bigotimes P(x_2) \bigotimes \cdots \bigotimes P(x_n), \\ \varphi_n(q) = [\varphi(q)]^n. \end{gathered}}$$

Stabil eloszlások (Lorentz eset)

- **A karakterisztikus függvény alkalmazásának fontossága itt lép életbe.**
- **Tudjuk, hogy Lorentz esetben:** $\varphi_2(q) = e^{-2|q|\gamma}.$
- **Alkalmazva az inverz FT-t:** $P(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(q) e^{-iqx} dq,$
- **Azt kapjuk, hogy** $P_2(S_2) = \frac{2\gamma}{\pi}\frac{1}{4\gamma^2 + x^2}.$ $P(x) = \frac{\gamma}{\pi}\frac{1}{\gamma^2 + x^2}$
- **Ebből arra következtethetünk, hogy a Lorentz-eloszlás stabil-eloszlás.**

Stabil eloszlások (Gauss eset)

- **Analóg módon nézzük a Gauss esetet. A sűrűségfüggvény ekkor**

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

- **A karakterisztikus függvény pedig:** $\varphi(q) = e^{-(\sigma^2/2)q^2} = e^{-\gamma q^2}, \quad \gamma \equiv \sigma^2/2.$

- **A korábbiakból pedig következik, hogy** $\boxed{\varphi_2(q) = e^{-2\gamma q^2}.}$

Stabil eloszlások (Gauss eset)

- **Újra alkalmazzuk az inverz FT-t, azt kapjuk, hogy**

$$P_2(S_2) = \frac{1}{\sqrt{8\pi\gamma}} e^{-x^2/8\gamma}.$$

- **Ez másképpen írva** $P_2(S_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{2}\sigma)} e^{-x^2/2(\sqrt{2}\sigma)^2}$, **az látható, hogy** $\sigma_2 = \sqrt{2}\sigma.$

- **Megmutattuk tehát, hogy két stabil sztochasztikus folyamat létezik: a Gauss és a Lorentz. Mindkét esetben a karakterisztikus függvény alakja hasonló:** $\varphi(q) = e^{-\gamma|q|^\alpha},$ **ahol α=1 a Lorentz, az α=2 a Gauss eset.**

Stabil eloszlások (általános) karakterisztikus fv-e

Lévy [92] and Khintchine [80] solved the general problem of determining the entire class of stable distributions. They found that the most general form of a characteristic function of a stable process is

$$\boxed{\ln \varphi(q) = \begin{cases} i\mu q - \gamma |q|^{\alpha} \left[1 - i\beta \frac{q}{|q|} \tan\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right] & [\alpha \neq 1] \\ i\mu q - \gamma |q| \left[1 + i\beta \frac{q}{|q|} \frac{2}{\pi} \ln |q|\right] & [\alpha = 1] \end{cases},} \tag{4.20}$$

where $0 < \alpha \leq 2$, γ is a positive scale factor, μ is any real number, and β is an asymmetry parameter ranging from -1 to 1.

The analytical form of the Lévy stable distribution is known only for a few values of α and β:

- $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$ (Lévy–Smirnov)
- $\alpha = 1$, $\beta = 0$ (Lorentzian)
- $\alpha = 2$ (Gaussian)

Power-law viselkedés

- **Koncentráljunk a szimmetrikus (β=0) és zéró várható értékre (γ=0). Az inverz FT ekkor**

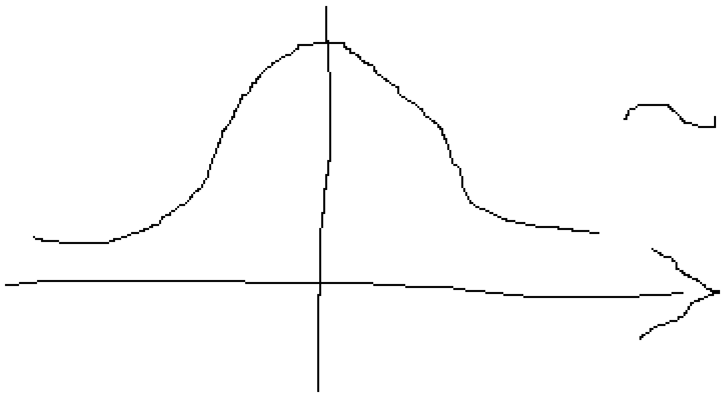
$$P_L(x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\gamma|q|^\alpha} \cos(qx) dq.$$

- **Kevés számolás után**

$$P_L(|x|) \sim \frac{\Gamma(1+\alpha)\sin(\pi\alpha/2)}{\pi|x|^{1+\alpha}} \sim |x|^{-(1+\alpha)}.$$

The asymptotic behavior for large values of x is a power-law behavior, a property with deep consequences for the moments of the distribution. $\boxed{\text{Specifically, } E\{|x|^n\} \text{ diverges for } n \geq \alpha \text{ when } \alpha < 2.}$ In particular, all Lévy stable processes with $\alpha < 2$ have *infinite* variance. Thus non-Gaussian stable stochastic processes do not have a characteristic scale – the variance is infinite!

Power-law



$\sim e^{-x^2}$

Testmagasság

$\sim x^{-\alpha}$

Katasztrófák nagysága és azok valószínűsége

Katasztrófák nygasága az idő függvényében

Szentpétervári paradoxon

A játék lényege:

A nyeremény 2 dollárról indul, és ez addig duplázódik, amíg meg nem jelenik az első fej. Itt a játék véget ér és a játékos viheti a pénzt, amit addig „dobott" magának. Tehát 2-t nyer, ha az első dobás fej, 4-et, ha csak a második lesz fej, 8-at, ha csak a harmadik, és így tovább.

Mennyit fizetnénk azért, hogy ebben a játékban részt vehessünk?

Számoljuk ki a várható értéket:

$$E = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{4} \times 4 + \frac{1}{8} \times 8 + \frac{1}{16} \times 16 + \dots$$
$$= 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$
$$= \infty$$

A bank a veszteségét kérné ezért a játékért – ami végtelen nagy összeg. De nincs olyan játékos, aki 30 dollárnál többet fizetne ezért. Miért?

https://en.wikipedia.org/wiki/St._Petersburg_paradox

Árváltozási statisztikák I.

A stabil, nem Gauss-eloszlások azért érdekesek, mert engedelmeskednek a határeloszlási tételeknek.
Azonban az árváltozás-eloszlás többnyire nem stabil. Ehhez ugyanis szükség lenne, hogy az x_i v.v.-k
(i) Páronként függetlenek és
(ii) Azonos eloszlásúak legyenek.

Empirikus megfigyelés azonban nem igazolja (ii)-t, mert például az árváltozások szórása erősen időfüggő. Ezt a jelenséget a pénzügyekben időfüggő volatilitásként ismerik

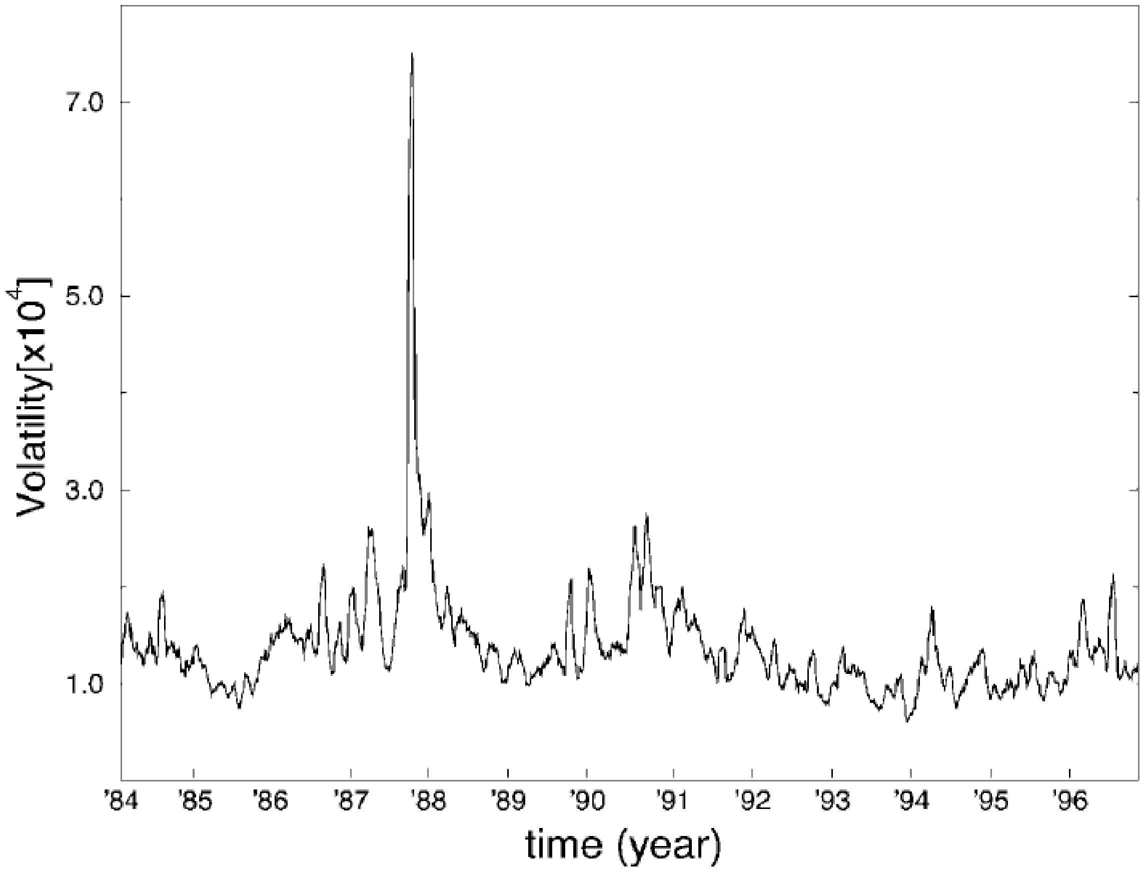


Fig. 4.2. Monthly volatility of the S&P 500 index measured for the 13-year period January 1984 to December 1996. Courtesy of P. Gopikrishnan.

Árváltozási statisztikák II.

Létezik egy megfelelőbb határeloszlás tétel, melyben az x_i v.v.-k függetlenek, de nem feltétlenül azonos eloszlásúak. Ezt először Bawly és Khintchine fogalmazták meg.

Itt az S_n összegben nincs egyetlen x_i sztochasztikus változó, amely uralja az összeget. Ekkor a Khintchine-tétel kimondja, hogy szükséges és elégséges, hogy $F_n(S)$, a határeloszlásfüggvény, korlátlanul osztható legyen.

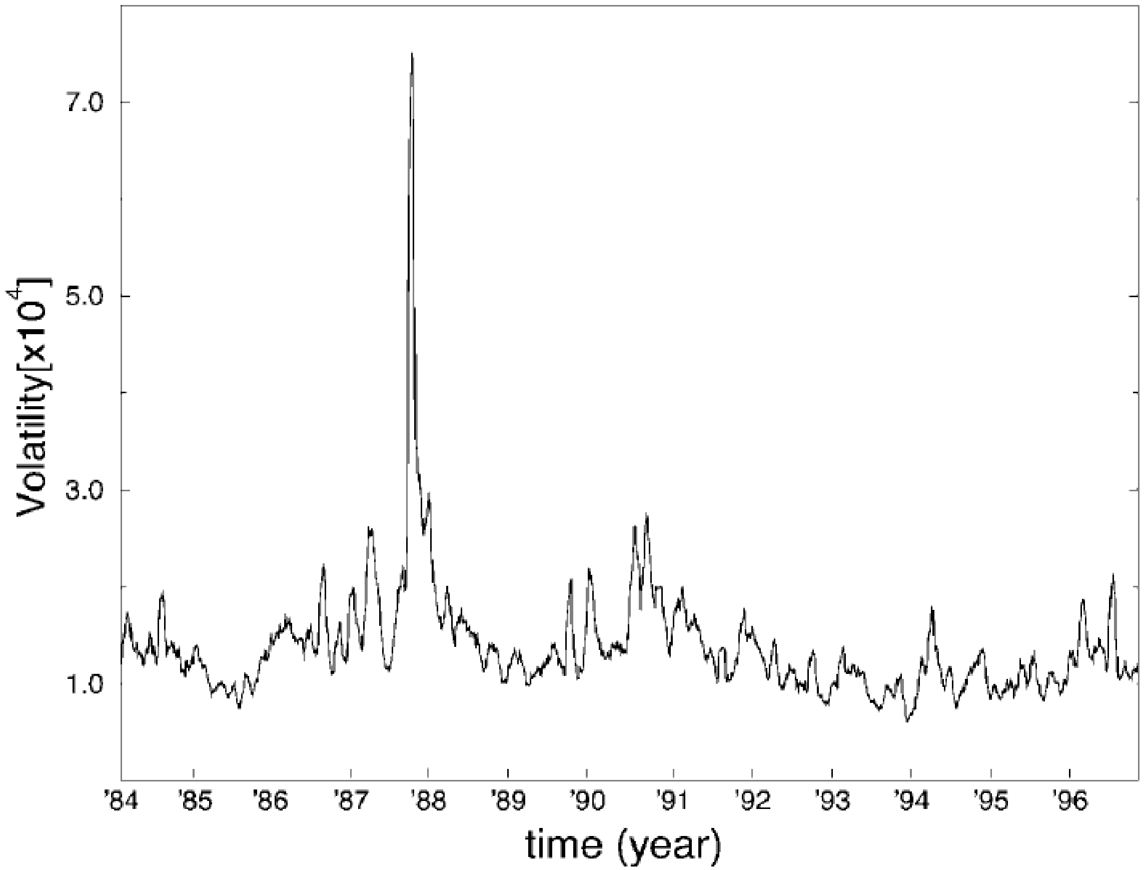


Fig. 4.2. Monthly volatility of the S&P 500 index measured for the 13-year period January 1984 to December 1996. Courtesy of P. Gopikrishnan.

Korlátlanul osztható véletlen folyamatok

A random process y is infinitely divisible if, for every natural number k, it can be represented as the sum of k i.i.d. random variables $\{x_i\}$. The distribution function $F(y)$ is infinitely divisible if and only if the characteristic function $\varphi(q)$ is, for every natural number k, the kth power of some characteristic function $\varphi_k(q)$. In formal terms

$$\varphi(q) = [\varphi_k(q)]^k, \tag{4.33}$$

with the requirements (i) $\varphi_k(0) = 1$ and (ii) $\varphi_k(q)$ is continuous.

Például (Stabil folyamatok)

$$\varphi(q) = \exp\left[i\mu q - \frac{\sigma^2}{2}q^2\right] \Longrightarrow \varphi_k(q) = \exp\left[\frac{i\mu q}{k} - \frac{\sigma^2}{2k}q^2\right]$$

$$\varphi(q) = \exp[i\mu q - \gamma|q|^\alpha], \Longrightarrow \varphi_k(q) = \exp\left[\frac{i\mu q}{k} - \frac{\gamma}{k}|q|^\alpha\right]$$

Például (Poisson folyamatok)

$$P(m;\lambda) = e^{-\lambda}(\lambda^m/m!), \text{ with } m = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\varphi(q) = \exp[\lambda(e^{iq} - 1)], \Longrightarrow \varphi_k(q) = \exp\left[\frac{\lambda}{k}(e^{iq} - 1)\right].$$

Véletlen folyamatok osztályozása

- **A korlátlanul osztható eloszlások osztálya meglehetősen nagy, mely magában foglalja a stabil eloszlásokat.**
- **Ezeknek lehet véges és végtelen a szórása.**
- **A stabil, nem-Gauss véletlen folyamatok végtelen szórással rendelkeznek.**
- **A Gauss az egyetlen stabil folyamat, amelynek véges a szórása.**