Székely J. Gábor

Paradoxonok a véletlen matematikájában

2. átdolgozott kiadás

Typotex • 2004

A mű megjelenését a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Tudományok Osztálya és a Varga Tamás Tanítványainak Emlékalapítványa támogatta

ISBN 963 9548 32 4

Témakör: matematika

Tartalom

7. Pétervári paradoxon

7.1. A paradoxon története

A szerencsejátékok vizsgálatából kifejlődött valószínűségszámítás a XVII. század második felében az élet egyre több területén hódított tért. Így érthető is, hogy az 1665-ben alapított legelső tudományos folyóiratok (a francia Journal des Sçavans és az angol Philosophical Transactions) példáját követve, szinte minden számottevő tudományos folyóirat rendszeresen közölt valószínűségszámítási cikkeket. Egyre többen gondolták úgy, hogy a valószínűség nem más, mint számokba tömörített józan ész. Az 1700-as évek elején azonban a Pétervári Tudományos Akadémia folyóirata egy olyan valószínűségszámítási cikket közölt, amelyben a matematikai számítások egyáltalán nem voltak összhangban a józan ésszel. A cikket *Daniel Bernoulli* írta, és a paradoxon e cikk révén vált ismertté, de a paradoxon valójában már korábban megszületett, méghozzá Daniel Bernoulli unokabátyjának, *Nicolaus Bernoulli*nak 1713. szeptember 9-én Pierre Montmort-hoz írt levelében. (A Bernoulli matematikuscsaládnak egyébként több tagja is foglalkozott valószínűségszámítással, különösen *Jacob Bernoulli*, akinek nevével még fogunk találkozni a nagy számok törvényeivel kapcsolatban.)

7.2. A paradoxon megfogalmazása

Egy szabályos pénzérmével addig dobunk, amíg fejet nem kapunk. Ha már az első dobás eredménye fej, akkor kapunk a banktól 2 forintot, ha csak a második fej, akkor 4 forintot, ha csak a harmadik, akkor 8-at stb. Minden újabb dobásnál megkétszereződik a nyeremény. Kérdés: mennyi az a pénzösszeg, amennyit méltányos játék esetén fizetnünk kellene ahhoz, hogy egy ilyen játékot végigjátszhassunk? Ha a méltányosságot úgy értelmezzük, hogy a tiszta nyeremény átlagos értéke (várható értéke) 0 legyen, akkor ez a természetes követelmény arra a paradox eredményre vezet, hogy akármilyen (véges) sok pénzt is fizetünk a banknak, a játék mindig hátrányos lesz a bank számára.

7.3. A paradoxon magyarázatai

A bank veszteségének várható értéke valóban végtelen, hiszen annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobással ér véget a játék $1/2^k$, és ez esetben a bank 2^k forintot fizet, így a bank átlagosan

$$\frac{1}{2}2 + \frac{1}{4}4 + \frac{1}{8}8 + \ldots = 1 + 1 + 1 + \ldots,$$

azaz végtelen sok pénzt fizet ki, tehát méltányos játék esetén a kezdéskor nekünk is végtelen sok pénzt kellene fizetnünk a játékért. Matematikai szempontból ez a számítás teljesen helyes is, ami azonban mit sem változtat azon, hogy az eredmény igen meglepően hangzik. Többen javasoltak olyan módosításokat, amelyeknél már a „józan ész" számára is elfogadható eredmény adódik.

(i) *Buffon, Cramer* és mások annak a természetes feltételnek az elfogadását javasolták, hogy a banknak csak egy előre megadott (véges) mennyiségű pénz áll rendelkezésére. Legyen ez a pénzösszeg mondjuk egymillió forint. Ha a szabályok szerint a játékosnak ennél több pénz járna, akkor is csak egymilliót kap. Ekkor a játékos nyereményének várható értéke (figyelembe véve, hogy 2^{20} már több, mint egymillió):

$$\frac{1}{2}2 + \frac{1}{4}4 + \ldots + \frac{1}{2^{19}}2^{19} + \left(\frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{2^{21}} + \ldots\right)10^6 = \\ = 19 + 1{,}90 + \ldots \approx 21,$$

vagyis ha 21 forintot fizetünk egy játékért, akkor már egy picikét jól is jár a bank. Ez az eredmény teljesen elfogadható.

(ii) *W. Feller* arra mutatott rá, hogy ha a méltányosság fogalmát módosítjuk, és egy játékot akkor tekintünk méltányosnak, ha m játszma befejezése után a véletlentől függő N_m nyereménynek és az m játszmáért összesen befizetett R_m részvételi díjnak az aránya nagy m esetén nagy valószínűséggel igen közel lesz az 1-hez, pontosabban, ha annak a valószínűsége, hogy

$$\left|\frac{N_m}{R_m} - 1\right| < \varepsilon$$

akármilyen kicsi pozitív ε számra 1-hez konvergál (ha m végtelenhez tart), akkor a pétervári játék igen egyszerűen méltányossá válik. Feller bebizonyította, hogy ha $R_m = m \log_2 m$, akkor a játék igazságos lesz.

Ha a játék úgy lenne méltányos, hogy $R_m = cm$, ahol c valamilyen konstans, akkor ez nyilván azt jelentené, hogy minden egyes játszmáért c forintot kellene fizetnünk. Ez azonban nem tehető meg, hiszen a c akármilyen nagy is, a bank – mint láttuk – mindig rosszul járna. Ha azonban a c nem állandó, hanem m növekedésével nő, mégpedig úgy, hogy $c = \log_2 m$, akkor – Feller tétele szerint – helyreáll a méltányosság. Ha az egyes játszmákért nem mindig ugyanazt a pénzösszeget fizetjük be, hanem pl. a következőket:

$$2, 4, 2, 8, 2, 4, 2, 4, 2, 16, 2, 4, 2, 8, 2, 4, 2, 2, 32, 2, 4, 2, \dots,$$

akkor Steinhaus egy 1949-es cikke szerint e sorozat igazságos abban az értelemben, hogy ha $F_n(x)$ a legfeljebb x nagyságú befizetések relatív gyakorisága, akkor $F_n(x)$ annak a valószínűségéhez konvergál (amikor $n \to \infty$), hogy a bank legfeljebb x nagyságú összeget fizet ki. Erről a témáról az utóbbi években sok cikket írt Csörgő Sándor több társszerzővel.

7.4. Megjegyzések

(i) Buffon a XVIII. században 2084 játék eredménye alapján azt tapasztalta, hogy kb. 10 Ft fizetése esetén lesz a játék méltányos.

(ii) A pétervári paradoxonnal szoros kapcsolatban áll az a gyakran alkalmazott halmozási (más néven „martingál”) stratégia, amelyben mindmáig sok szerencsejátékos hisz (és megy is tönkre). Akárcsak a pétervári játékban, most is a bank ellen játszunk egy igazságos játékot (minden játszmában 50%-os eséllyel nyerünk). Ha az első játszmában vesztünk, akkor megkétszerezzük a tétet, ha a másodikban is vesztünk, akkor újból kétszerezzük a tétet, és mindaddig kétszer annyit teszünk, mint az előző alkalommal, amíg végre az nem jön ki, amire tippeltünk. Ha a legelső tétünk 1 Ft volt és az első $n-1$ játszmában vesztettünk, de az n-edikben már nyerünk, akkor összesen $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ forintot vesztettünk és 2^n-et nyertünk, így összesen 1 Ft tiszta nyereségre teszünk szert. Minthogy 1 valószínűséggel valamikor csak „bejön” a tippünk, a halmozási stratégia szinte biztos nyerő módszernek látszik. A látszat azonban itt is csal, mert általában még mielőtt bármit is nyernénk, a sokszori duplázásban már rég elvesztettük minden pénzünket. Természetesen, ha valakinek korlátlan sok pénz áll rendelkezésére, akkor ez a martingál stratégia valóban kedvező számára, de akinek már amúgy is végtelen sok pénze van, attól igazán nem kell irigyelnünk néhány forint nyereséget. Egyébként a játékkaszinók mindenütt maximalizálják a tétek nagyságát, és bár a maximum valóban csillagászati összegnek tűnik, mégis teljesen hatástalanná teszi a „martingál” típusú stratégiákat.

7.5. Irodalom

W. Feller: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba, Műszaki Könyvkiadó, Bp., 1978.

S. Csörgő and *G. Simons*: On Steinhaus’ resolution of the St. Petersburg paradox, Probability and Mathematical Statistics, 14, 157–172, 1993–1994.

S. Csörgő: A szentpétervári paradoxon, Polygon, Szeged, 19–79, 1995. május.

I. Berkes, *E. Csáki*, *S. Csörgő*: Almost sure limit theorems for the St. Petersburg game, Statistics & Probability Letters, 45, 23–30, 1999.

S. Csörgő and *G. Simons*: The two-Paul paradox and the comparison of infinite expectations, In: Limit Theorem in Probability and Statistics (I. Berkes, at al., erd.) Vol I., 427–455, J. Bolyai Soc. Budapest, 2002.

H. Steinhaus: The so-called Petersburg paradox, Colloquium Mathematicum, 2, 56–58, 1949.

G. J. Székely–D. St. P. Donalds: The St. Petersburg Paradox and the crash of the High-Tech Stocks in 2000, The American Statistician (megjelenik 2004. augusztusban).