Hızlandırıcı Fiziği

Enine Demet Dinamiği I

Öznur METE
CERN, Accelerators Beam Transfer Group

oznur.mete@cern.ch

Giriş

- [x] Matrix Formalism
- [ ] Hamiltonian Formalism
- [ ] Lie Algebra

- **Enine dinamik**
- Boyuna dinamik
- Öğrendiklerimizi simulasyon (Parmela, Superfish, Madx) çalışmaları ile pekiştireceğiz.

Giriş

- **Enine demet dinamiğinin temel kavramları** ("Particle Accelerator Physics". Helmut Wiedemann)
- **Parçacıkların ortaklaşa etkileşmeleri (collective effects)**
  - Uzay yükü
  - Landau sönümü
  - Demet-demet etkileri
  - Demet soğutma
  - Demet yayılımı artışının kaynakları
- **Dairesel bir hızlandırıcının MADX programı kullanılarak optik tasarımının ve düzeltmelerinin yapılması**
- **Düşük yayınımlı hızlandırıcılar**
- **Işınlık**
- **Hızlandırıcılar için RF temelleri**
  - Temel kavramlar
  - RF kovuk tasarımı
- **Geribesleme** *(HPFBU2012, Ö. Çobanoğlu)*

Demetin enine ölçüleri, demetin gezinge yarıçapına göre küçük olduğu için magnetik alanı ideal gezinge (trajectory) civaında seriye açabiliriz.

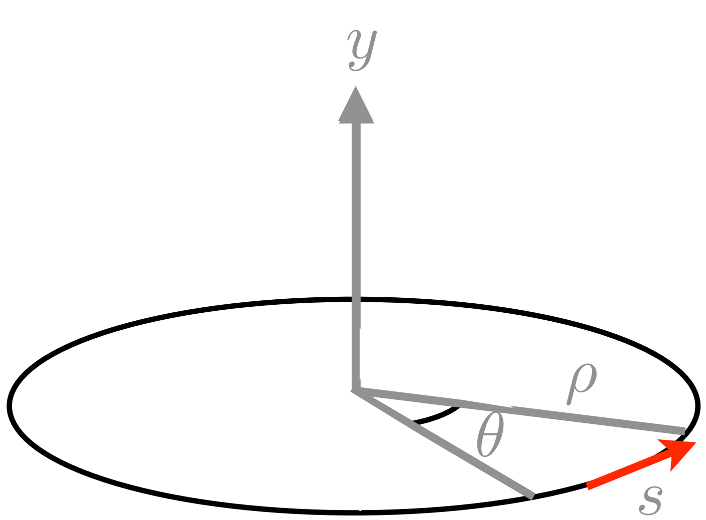
Taylor Acilimi: $$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \ldots$$

B magnetik alanının Taylor açılımına bakalım:

$$B_y(x) = B_{y0} + \frac{dB_y}{dx}x + \frac{1}{2!}\frac{d^2B_y}{dx^2}x^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3B_y}{dx^3}x^3 + \ldots$$

momentuma normalize edelim, p/e

$$\frac{B(x)}{p/e} = \frac{B_0}{B_0\rho} + \frac{g*x}{p/e} + \frac{1}{2!}\frac{eg'}{p/e}x^2 + \frac{1}{3!}\frac{eg''}{p/e}x^3 + \ldots$$



dairesel koordinat sistemi

$$\frac{B(x)}{p/e} = \frac{1}{\rho} + kx + \frac{1}{2!}mx^2 + \frac{1}{3!}ox^3 + \ldots$$

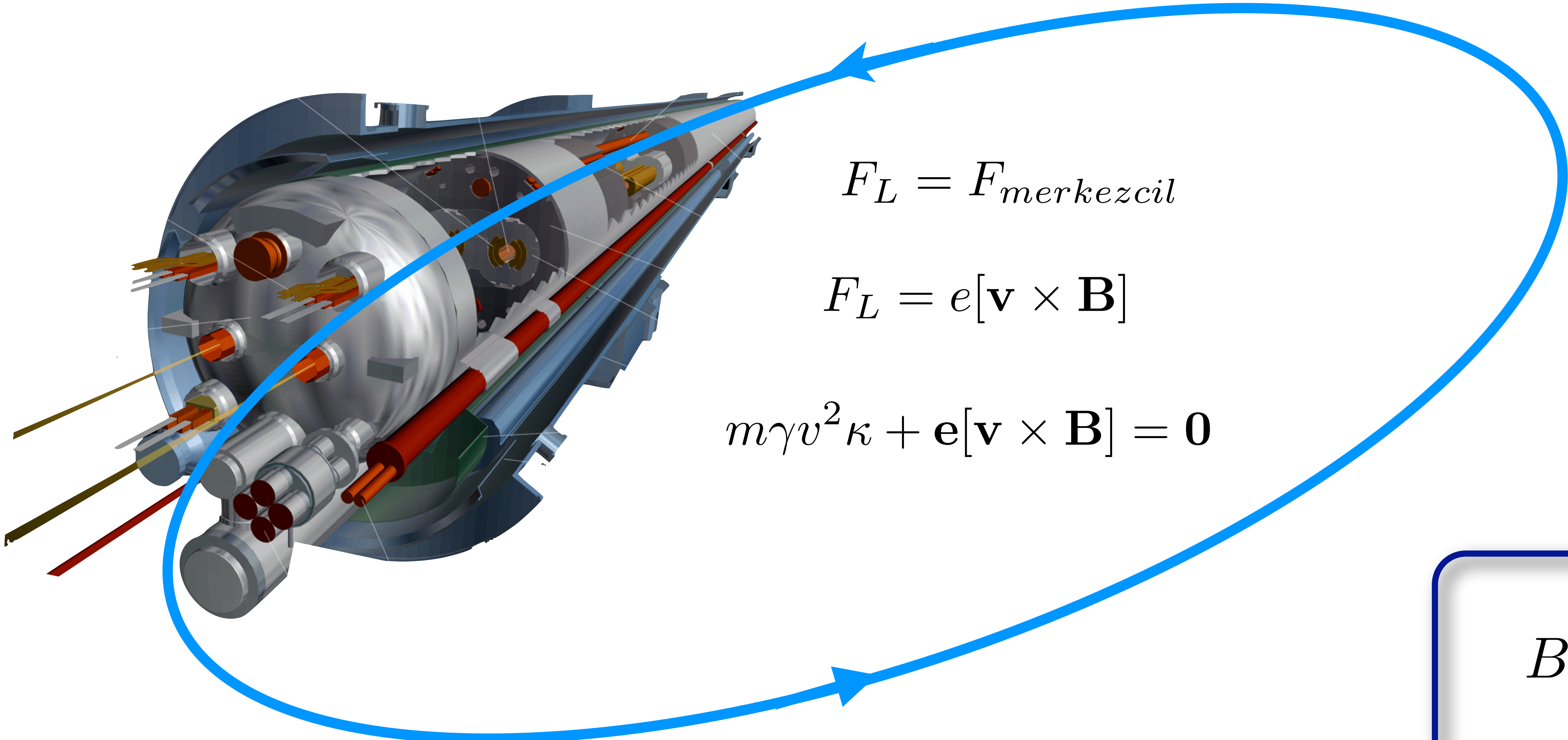
çok-kutuplu	*tanım*	*etki*
iki-kutuplu *(dipole)*	$\frac{1}{\rho} = \frac{e}{p} B_{z0}$	*yönlendirme* *(steering)*
dört-kutuplu *(quadrupole)*	$k = \frac{e}{p} \frac{dB_z}{dx}$	*odaklama* *(focusing)*
altı-kutuplu *(sextupole)*	$m = \frac{e}{p} \frac{d^2 B_z}{dx^2}$	*renklilik karşılama* *(chromaticity compensation)*
sekiz-kutuplu *(octupole)*	$o = \frac{e}{p} \frac{d^3 B_z}{dx^3}$	*alan hataları ve hata karşılama* *(field errors and compensation)*
v.b.	...	...

$$\frac{B(x)}{p/e} = \frac{1}{\rho} + kx + \frac{1}{2!} m x^2 + \frac{1}{3!} o x^3 + ...$$

Demet Bükülmezliği (rigidity)

Hızlandırıcılarda, parcacıklar önceden belirlenmiş yörüngelerde hareket ederler.

- Nasıl? Saptırıcı magnetik alanlar kullanılarak.
- Ne kadar? Parcacıkların merkezcil kuvvetleri ve Lorentz kuvveti arasındaki dengeye bağlı olarak.

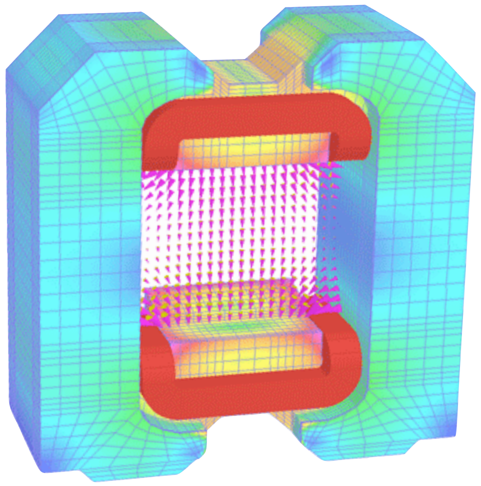


$$F_L = F_{merkezcil}$$

$$F_L = e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$$

$$m\gamma v^2 \kappa + \mathbf{e}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = \mathbf{0}$$

Iki Kutuplu Magnet



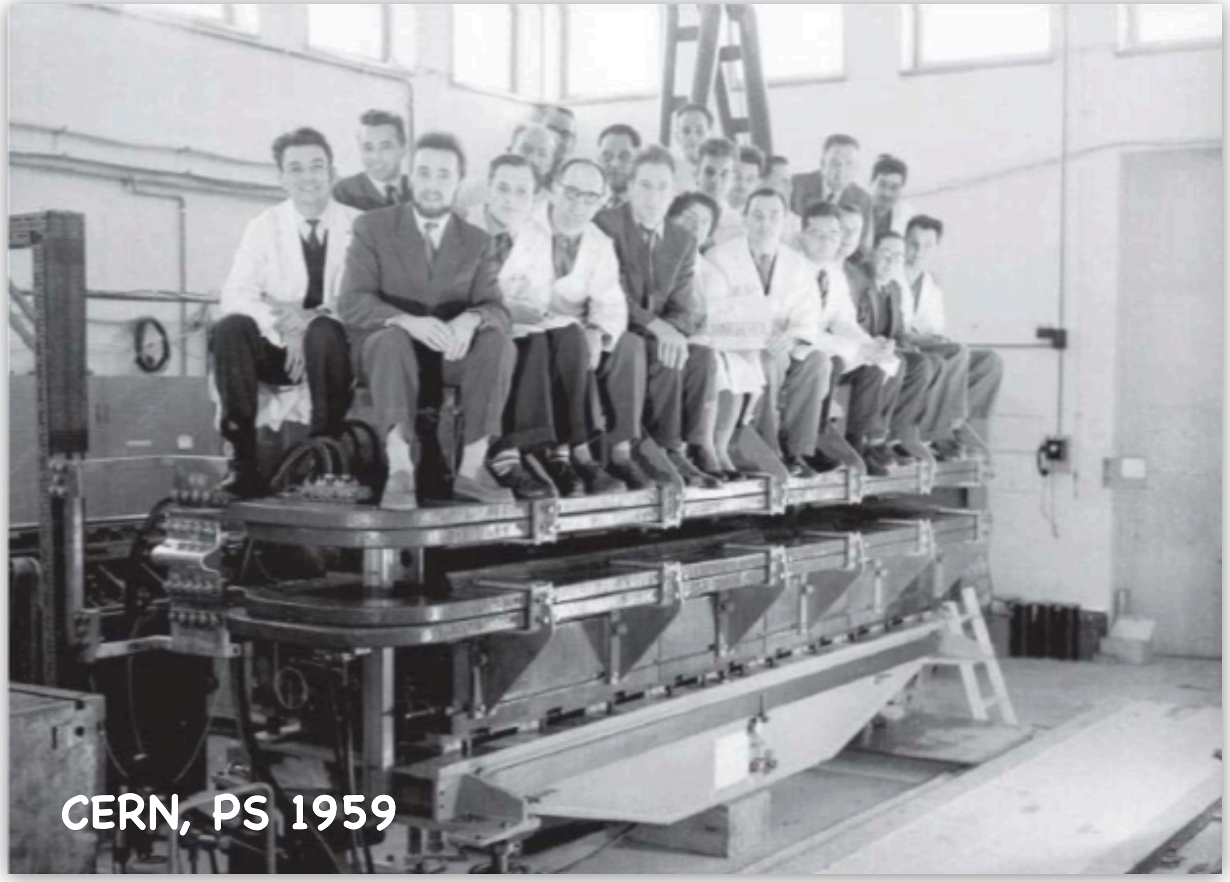
$$\boxed{B.\rho = \frac{p}{q}}$$

$\kappa = (\kappa_x, \kappa_y, 0)$

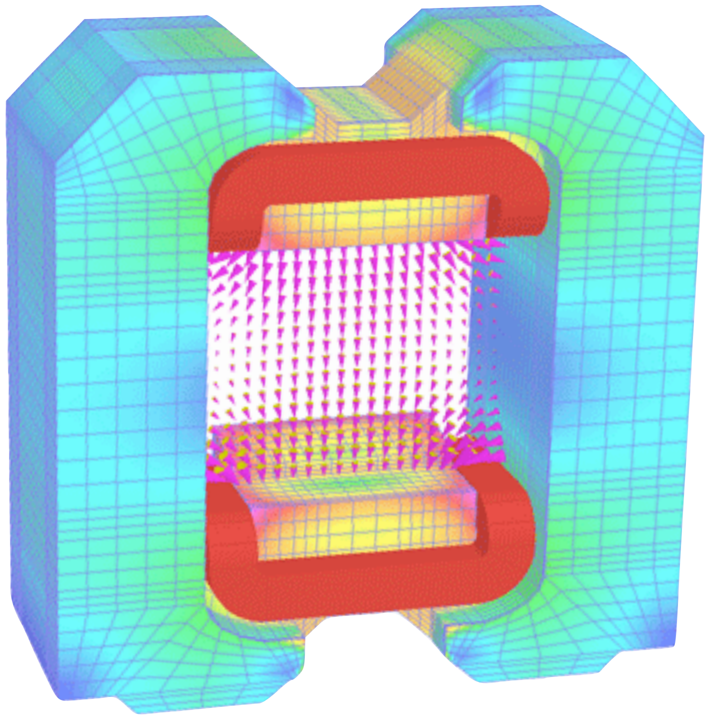
- gezingenin yerel eğrilik vektörü (yöney)

$\kappa_{x,y} = \dfrac{1}{\rho_{x,y}}$

- gezingenin yerel eğrilik yarıçapı



İki Kutuplu Magnet



Bir İki Kutuplunun (Dipolun) Alan Kuvveti

$$\frac{1}{\rho} = \frac{e}{p}B \dashrightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{e}{\gamma m v}B \dashrightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{ec}{\gamma m \beta c c}B \dashrightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{ec}{E\beta}B}$$

$$B\rho[T.m] = \frac{1}{ec}\beta E \dashrightarrow B\rho[T.m] = \frac{10}{2.998}\beta E[GeV]$$

"normalize alan kuvveti"

$$\frac{1}{\rho}[m^{-1}] = \frac{0.2998.B_0(T)}{p(GeV/c)} \qquad \frac{1}{\rho}[m^{-1}] = 0.2998\beta E[GeV]$$

"Bir parçacığın manyetik alana dik tam bir yörünge dönüsü için açısal frekansına, cyclotron ya da **Larmour frekansi** denir. "

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{ec}{E\beta}B} \dashrightarrow \omega_L = \left| \frac{ec^2}{E}B \right|$$

Hatırlatıcı

$p = \gamma m v$

$v = \beta c$

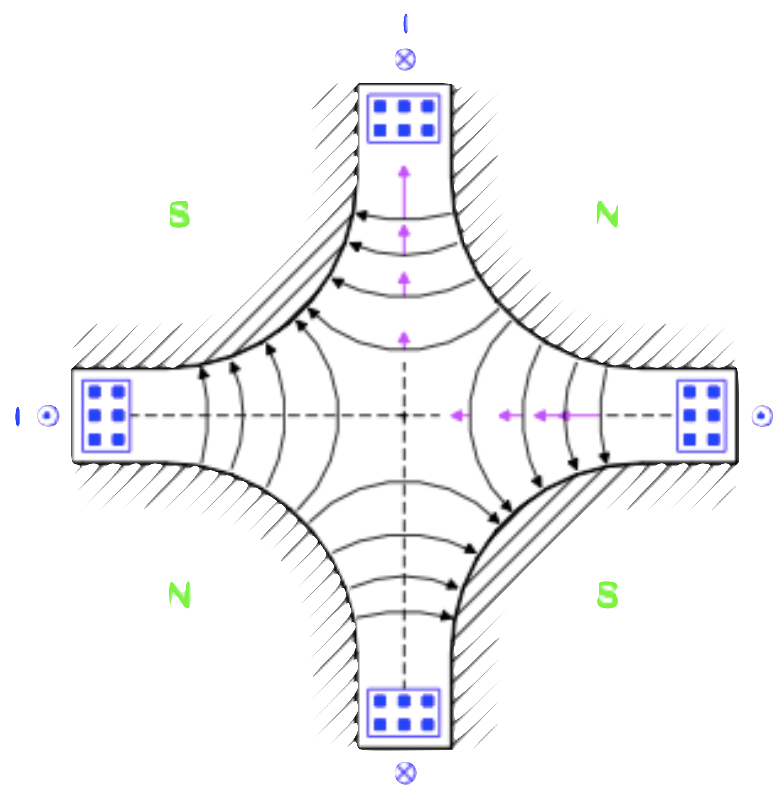
Bir Dört Kutuplunun (Quadrupole) Odaklama Kuvveti

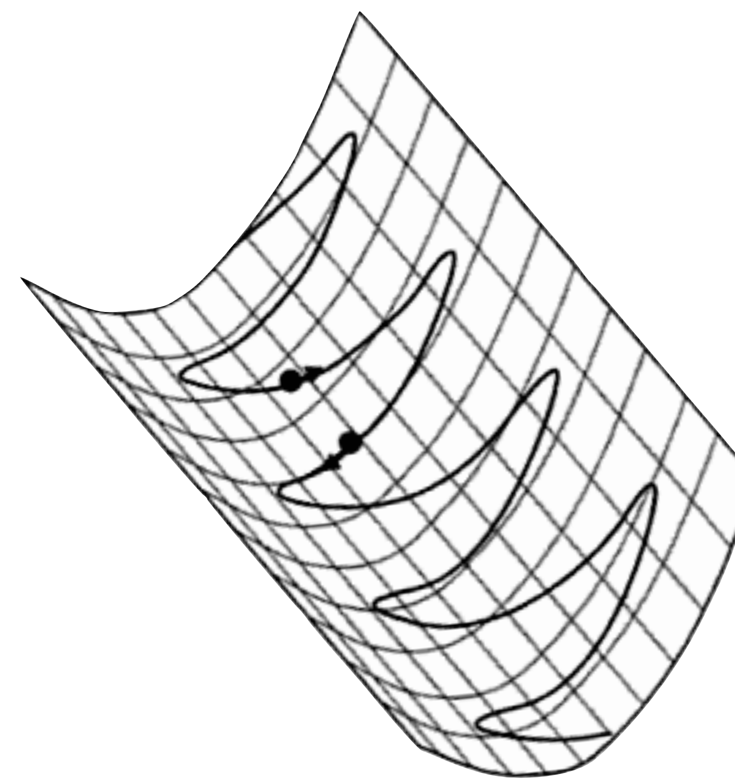
Doğrusal olarak artan bir Lorentz kuvveti gerekiyor: $B_x = gy \quad B_y = gx$

"normalize alan kuvveti" $$k[m^{-2}] = \frac{0.2998.g}{p(GeV/c)}$$

"bir dört-kutuplunun odak uzakligi" $$f = \frac{1}{k \cdot l_q}$$

Dört Kutuplu Magnet





Bundan sonrası için yapacağımız yaklaşımlar:

- Hesapları **ideal parçacığı** ve **tasarım yörüngesini** göz önünde bulundurarak yapalım.
- Diğer parçacıkların demet içinde sayılması için gereken koşul: $x, y << \rho$
- Magnetik kılavuz alan için koşul: Alanın x,y bileşenler cinsinden **sadece doğrusal terimleri** göz önünde bulundurulacak.

Yarıçapsal ivmelenme

$$\boxed{a_r = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho(\frac{d\theta}{dt})^2}$$

erek yörünge

$$\rho = constant \qquad \frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$F = m\rho(\frac{d\theta}{dt})^2 = m\rho\omega^2$$

$$\boxed{F = mv^2/\rho}$$

genel gezinge

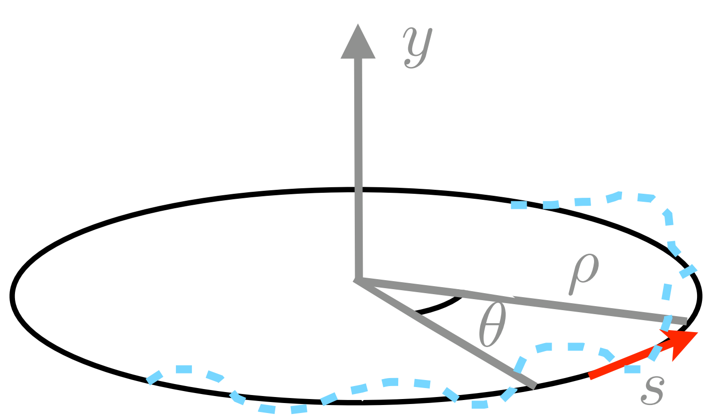
$$\rho \rightarrow \rho + x$$

$$F = m\frac{d^2}{dt^2}(x+\rho) - \frac{mv^2}{x+\rho} = eB_y v$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(x+\rho) = \frac{d^2}{dt^2}x$$

$$x \approx mm \qquad \rho \approx m$$

$$\frac{1}{x+\rho} \approx \frac{1}{\rho}(1 - \frac{x}{\rho})$$



dairesel koordinat (eşgüdüm) sistemi

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{mv^2}{\rho}(1 - \frac{x}{\rho}) = eB_y v}$$

Türetim - 1

- doğrusal yaklaşıma göre kılavuz alan

$$B_y = B_0 + x\frac{\partial B_y}{\partial x}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{mv^2}{\rho}(1-\frac{x}{\rho}) = ev(B_0 + x\frac{\partial B_y}{\partial x})$$:m $$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{v^2}{\rho}(1-\frac{x}{\rho}) = \frac{evB_0}{m} + \frac{evxg}{m}$$

- bağımsız değişkenin değişimi: t -> s

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}) = \frac{d}{ds}(\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt})\frac{ds}{dt} \qquad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = x''v^2 + \cancel{\frac{dx}{ds}\frac{dv}{ds}}v}$$

$$x''v^2 - \frac{v^2}{\rho}(1-\frac{x}{\rho}) = \frac{evB_0}{m} + \frac{evxg}{m}$$:v^2

$$x'' - \frac{1}{\rho}(1-\frac{x}{\rho}) = \frac{eB_0}{mv} + \frac{exg}{mv}$$ mv=p

$$x'' - \frac{1}{\rho} + \frac{x}{\rho^2} = \frac{B_0}{p/e} + \frac{xg}{p/e}$$ g/(p/e)=k

$$\boxed{x'' + x(\frac{1}{\rho^2} - k) = 0}$$

Özetle

- doğrusal yaklaşım altında kılavuz alanı,
- bağımsız değişken değişimi, parçacık momentumuna normalizasyon,
- ve bazı hesaplamalar,

önceki sayfa...

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{mv^2}{\rho}(1 - \frac{x}{\rho}) = eB_y v}$$

$$\boxed{x'' + x(\frac{1}{\rho^2} - k) = 0}$$

$$k = 0, x'' = -\frac{1}{\rho^2}x$$

yorum: dört-kutuplu magnetler olmaksızın bile iki-kutuplu magnetin eğme düzleminde bir geri-çağırıcı kuvvet var. "Zayıf odaklama".

Özetle

- doğrusal yaklaşım altında kılavuz alanı,
- bağımsız değişken değişimi, parçacık momentumuna normalizasyon,
- ve bazı hesaplamalar,

önceki sayfa...

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{mv^2}{\rho}(1 - \frac{x}{\rho}) = eB_y v}$$

$$\boxed{x'' + x(\frac{1}{\rho^2} - k) = 0}$$

Equation for the vertical motion

$\frac{1}{\rho^2} = 0$ no dipoles...in general...

$k \leftrightarrow -k$ quad field changes sign

$$\boxed{y'' + ky = 0}$$

Gezinge denkleminin çözümü, matris formalizm, ince lens yaklaşımı, örgü birimleri boyunca demet iletimi...

$$\boxed{x'' + x(\frac{1}{\rho^2} - k) = 0}$$

Tanım:

Yatay düzlemde: $K = \frac{1}{\rho^2} - k$

Dikey Düzlemde: $K = k$

$$x'' - Kx = 0$$

Harmonik salınıcının hareket denklemi!

Gezinge denkleminin çözümü, matris formalizm, ince lens yaklaşımı, örgü birimleri boyunca demet iletimi...

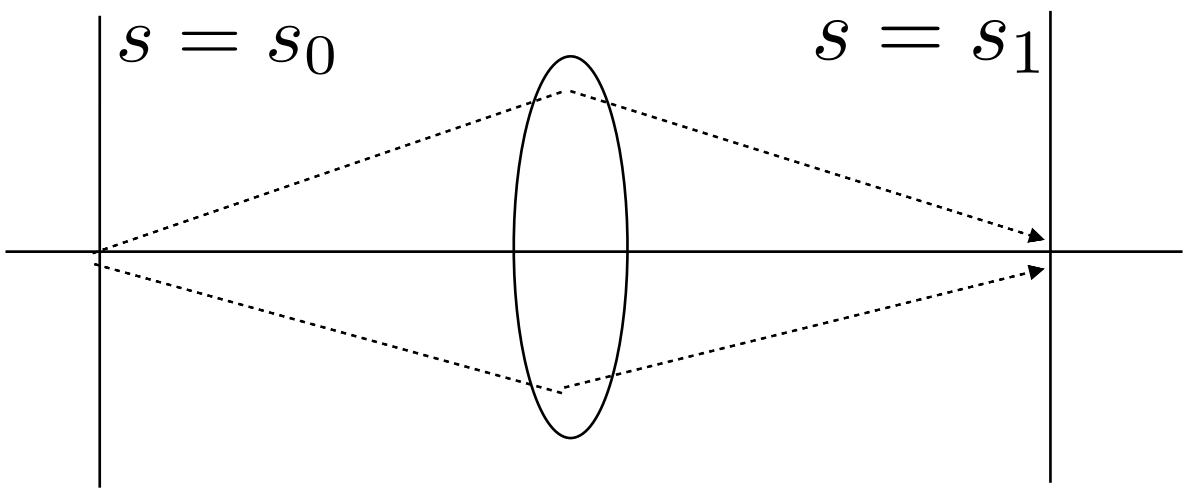
Harmonik salınıcı denklemini genel çözümü:

$$x(s) = x_0 cos(\sqrt{K}s) + \frac{x'_0}{\sqrt{K}} sin(\sqrt{K}s)$$

$$x'(s) = -x_0\sqrt{K} sin(\sqrt{K}s) + x'_0 cos(\sqrt{K}s)$$

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} cos\sqrt{|K|}s & \frac{1}{\sqrt{|K|}} sin\sqrt{|K|}s \\ -\sqrt{|K|} sin\sqrt{|K|}s & cos\sqrt{|K|}s \end{pmatrix}}$$

$K > 0$ **Odaklama**



Bir parçacığın, S_0 konumundaki (x,x′) eşgüdüm noktalarını M matrisini kullanarak S_1 konumu için hesaplayabiliriz. Bu M matrisine **"iletim matrisi"** denir.

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s_1} = M * \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s_0}$$

Gezinge denkleminin çözümü, matris formalizm, ince lens yaklaşımı, örgü birimleri boyunca demet iletimi...

$$M = \begin{pmatrix} cos\sqrt{|K|}s & \frac{1}{\sqrt{|K|}}sin\sqrt{|K|}s \\ -\sqrt{|K|}sin\sqrt{|K|}s & cos\sqrt{|K|}s \end{pmatrix}$$

Gezinge boyunca magnet yoksa... $K = 0$

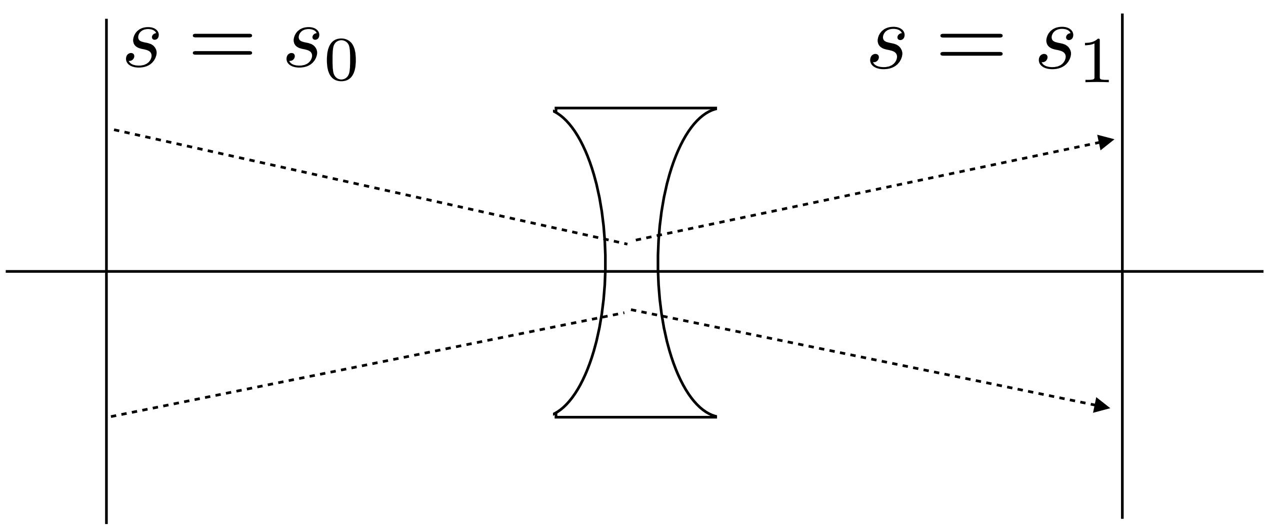
$$M = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sürüklenme boşluğu için iletim matrisi

Gezinge denkleminin çözümü, matris formalizm, ince lens yaklaşımı, örgü birimleri boyunca demet iletimi...

$$M = \begin{pmatrix} cos\sqrt{|K|}s & \frac{1}{\sqrt{|K|}}sin\sqrt{|K|}s \\ -\sqrt{|K|}sin\sqrt{|K|}s & cos\sqrt{|K|}s \end{pmatrix}$$

$K < 0$ **Dağıtma**



$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s_1} = M * \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s_0}$$

Gezinge denkleminin çözümü, matris formalizm, **ince lens yaklaşımı, örgü birimleri boyunca demet iletimi...**

Kullanışlılık açısından aşağıdaki gibi bir durum incelenebilir:

$$f = \frac{1}{kl_q} >> l_q$$

Genellikle bir magnetin uzunluğu odak uzunluğundan mertebece küçüktür.

$$l_q \to 0$$
$$kl_q = constant$$

matrix of a focusing quadrupole

$$M_{QF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

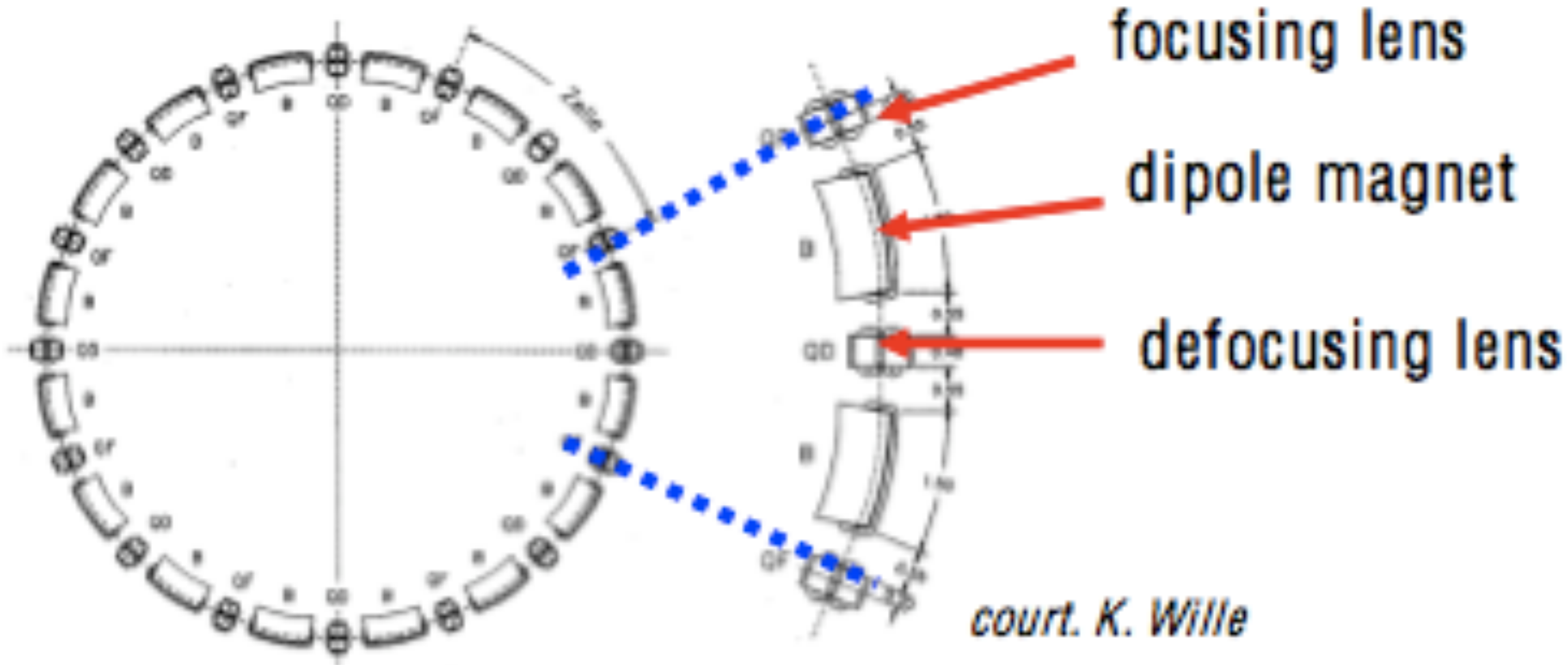
matrix of a defocusing quadrupole

$$M_{QD} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

Gezinge denkleminin çözümü, matris formalizm, **ince lens yaklaşımı, örgü birimleri boyunca demet iletimi...**

Tek örgü birimleri için ayrı ayrı bulunmuş sonuçlar, bu birimlerin iletim matrislerinin çarpılması ile birleştirilir.

$$M_{total} = M_{QF} * M_D * M_{Bend} * M_D * M_{QD} * M_D * M_{Bend} * M_{D^*} \ldots$$

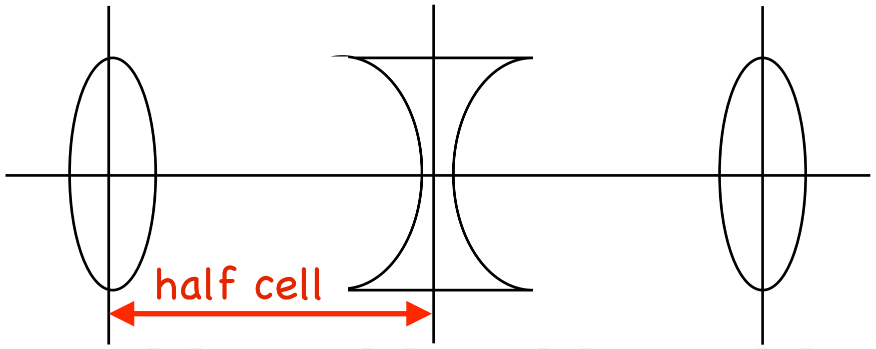


Gezinge denkleminin çözümü, matris formalizm, **ince lens yaklaşımı, örgü birimleri boyunca demet iletimi...**

Tek örgü birimleri için ayrı ayrı bulunmuş sonuçlar, bu birimlerin iletim matrislerinin çarpılması ile birleştirilir.

$$M_{total} = M_{QF} * M_D * M_{Bend} * M_D * M_{QD} * M_D * M_{Bend} * M_{D^*} \dots$$

example: FoDo Lattice

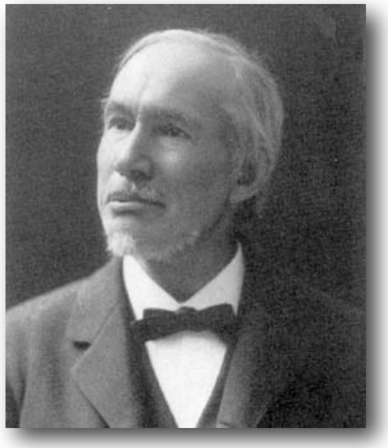


$$M_{FoDo} = M_{QF} * M_D * M_{QD} * M_D * M_{QF}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix}$$

matrix of a FODO lattice

$$M_{FoDo} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l^2}{2f^2} & 2l(1 - \frac{l}{2f}) \\ -\frac{l}{2f^2}(1 + \frac{l}{2f}) & 1 - \frac{l^2}{2f^2} \end{pmatrix}$$



Periyodik odaklama koşulları altından hareket denklemi...

George William Hill (1838 - 1914) Mathematician - Astronomer
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hill.html

Hill Denklemi

$$x''(s) - k(s)x(s) = 0$$

k(s) demek, odaklama özellikleri hızlandırıcı boyuncaki konuma bağlı demektir.

Genel Çözümü

$$x(s) = \sqrt{\epsilon}\sqrt{\beta(s)}cos(\psi(s) + \phi)$$

(1) $$x(s) = \sqrt{\epsilon}\sqrt{\beta(s)}cos(\psi(s)+\phi) \qquad x'(s) = -\frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\beta(s)}}[\alpha(s)cos(\psi(s)+\phi)+sin(\psi(s)+\phi)]$$

(2) $$cos(\psi(s)+\phi) = \frac{x(s)}{\sqrt{\epsilon}\sqrt{\beta(s)}} \qquad sin(\psi(s)+\phi) = -\frac{\beta x' + x\alpha}{\sqrt{\beta(s)}\sqrt{\epsilon}}$$

(3) $$cos^2(\psi(s)+\phi) = \frac{x^2(s)}{\epsilon\beta(s)}$$

$$sin^2(\psi(s)+\phi) = \frac{1}{\epsilon\beta}(\beta^2(s)x'^2(s) + 2\beta(s)\alpha(s)x'(s)x(s) + \alpha^2(s)x^2(s))$$

(4) $$sin^2(\psi(s)+\phi) + cos^2(\psi(s)+\phi) = 1$$

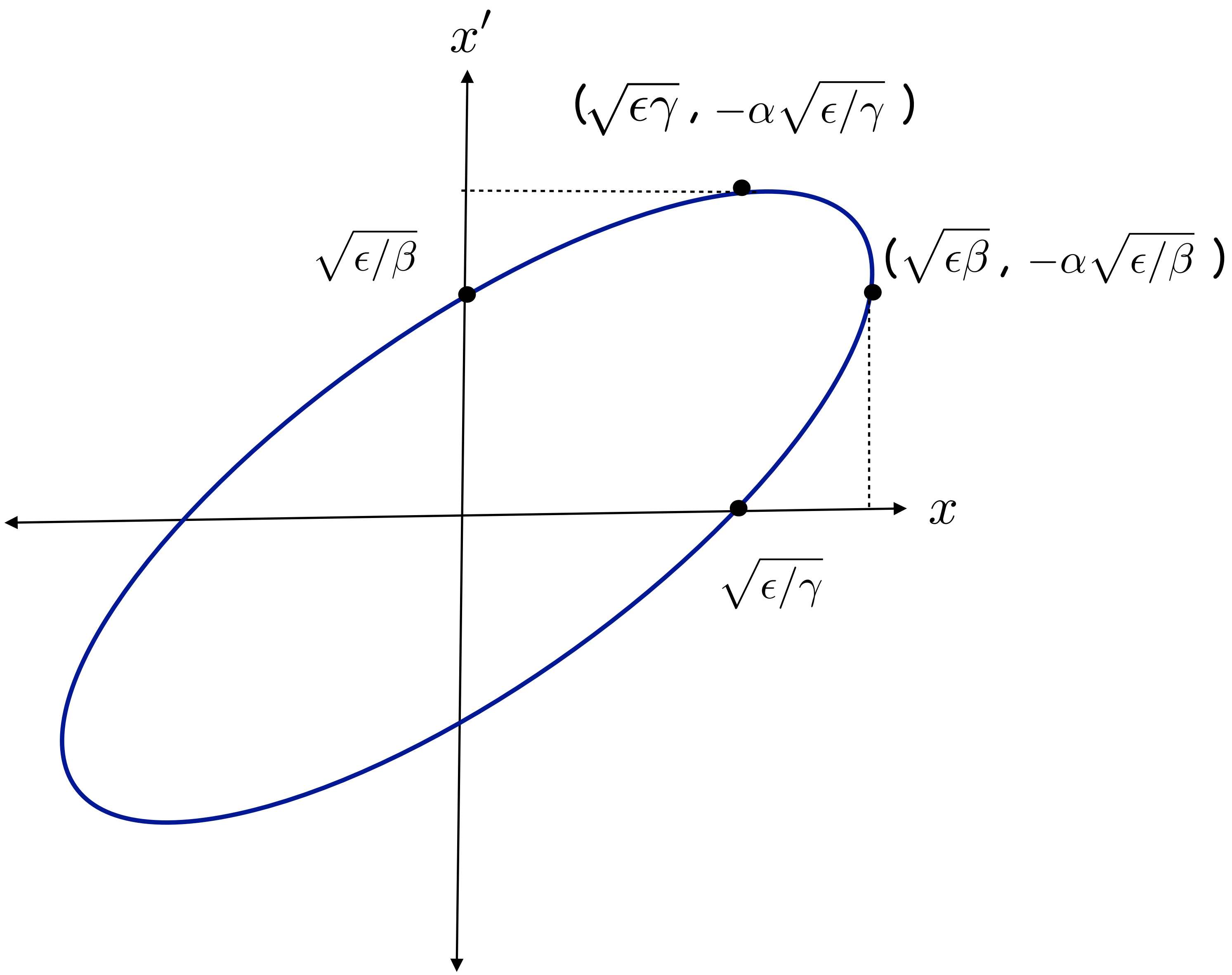
(5) $$\epsilon = \gamma(s)x(s)^2 + 2\alpha(s)x(s)x'(s) + \beta(s)x'(s)^2$$

additionally: $$\alpha(s) = -\frac{1}{2}\beta'(s) \qquad \gamma(s) = \frac{1+\alpha^2(s)}{\beta(s)}$$

Demetin faz uzayındaki yayımı (emittance) korunumludur.

- Bir onceki sayfada gosterdigimiz gibi demetin x-x′ uzayindaki davranisi, s konumuna gore parametrik bir elips ile tanimlanir.

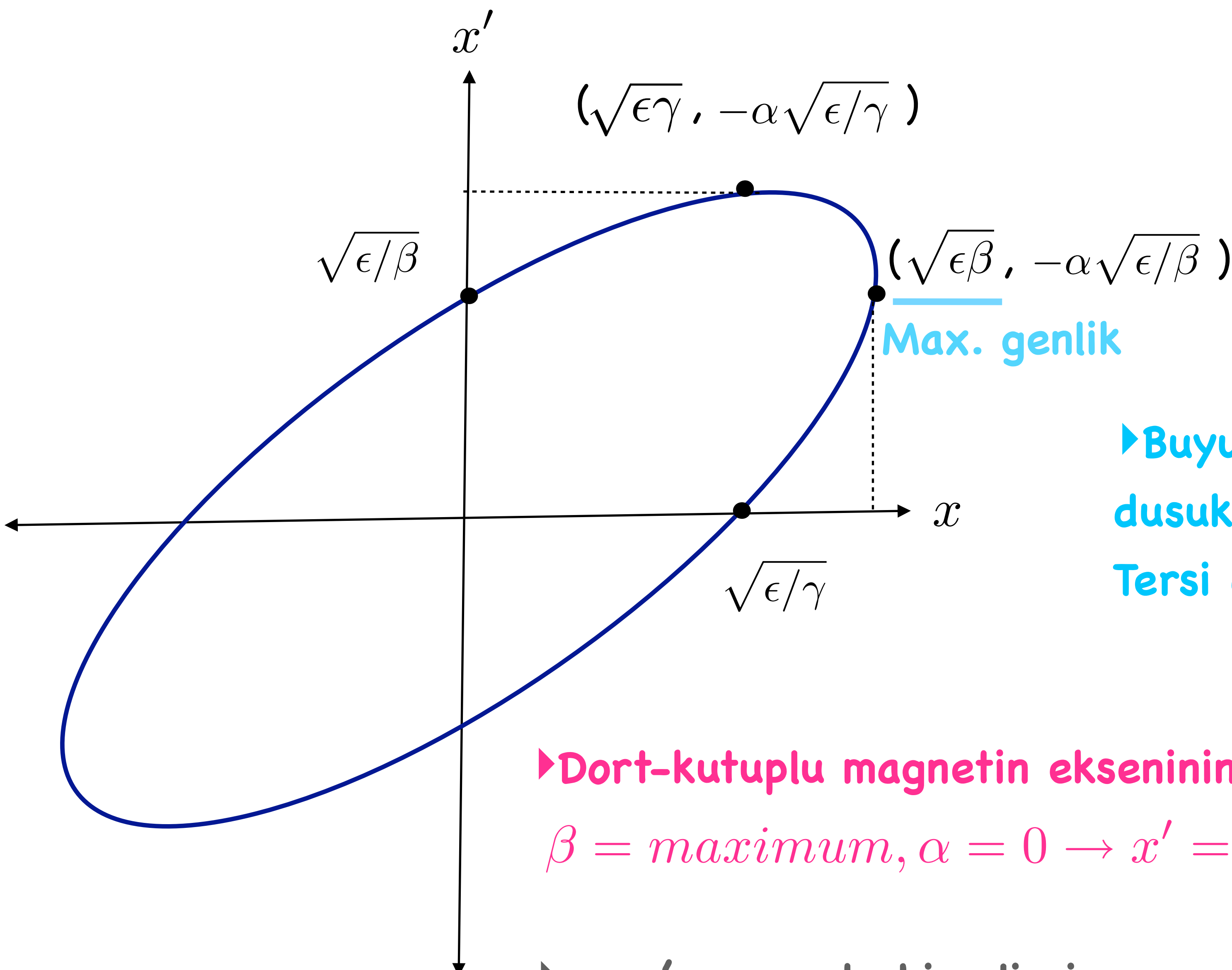
$$\epsilon = \gamma(s)x^2(s) + 2\alpha(s)x(s)x'(s) + \beta(s)x'^2(s)$$



Demetin faz uzayındaki yayımı (emittance) korunumludur.

- Bir onceki sayfada gosterdigimiz gibi demetin x-x′ uzayindaki davranisi, s konumuna gore parametrik bir elips ile tanimlanir.

$$\epsilon = \gamma(s)x^2(s) + 2\alpha(s)x(s)x'(s) + \beta(s)x'^2(s)$$



- Buyuk beta fonksiyonu genis bir demetin ve dusuk acilmanin (divergence) gostergesidir. Tersi de dogrudur.

- Dort-kutuplu magnetin ekseninin ortasinda,

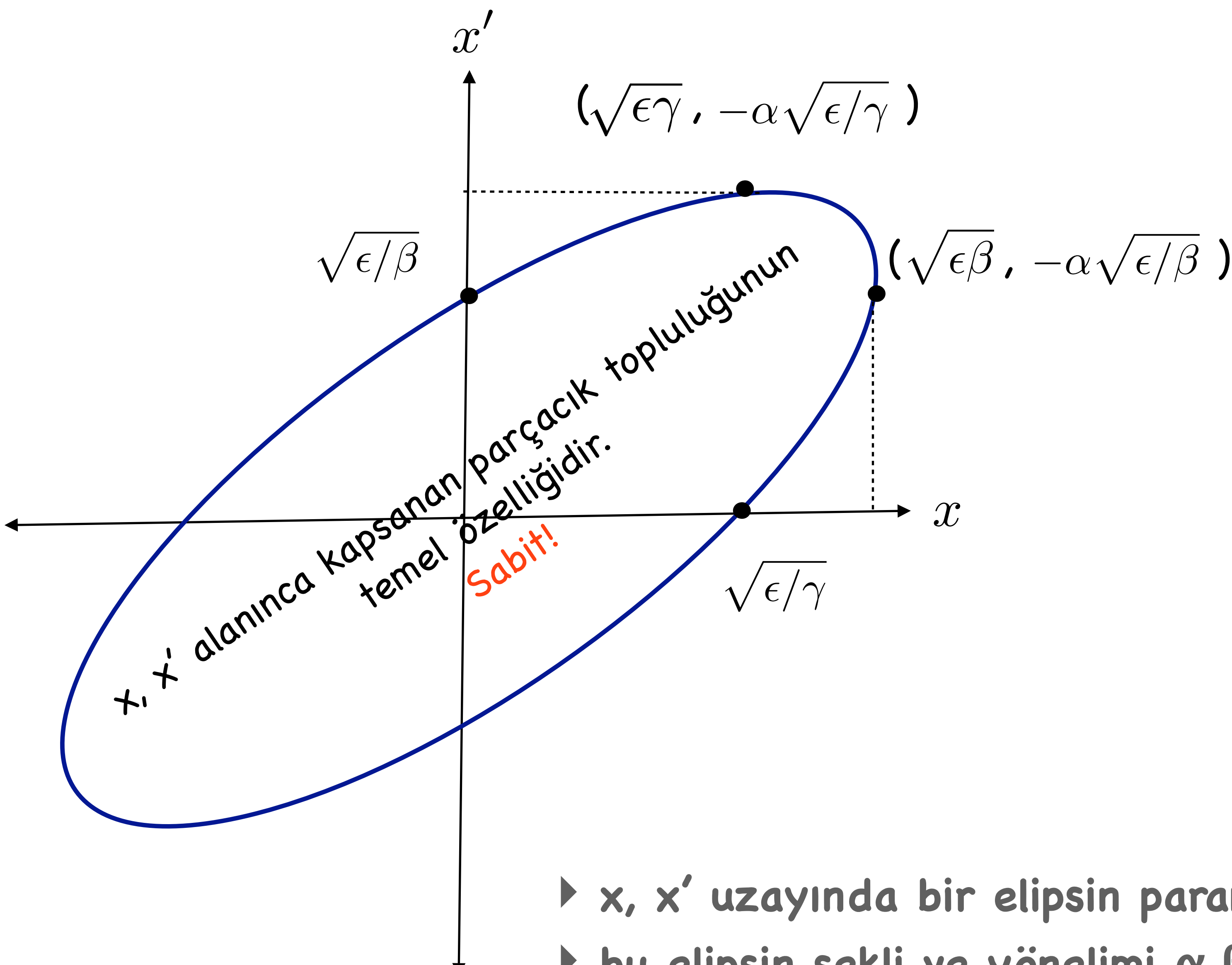
$$\beta = maximum, \alpha = 0 \rightarrow x' = 0$$

- x, x′ uzayında bir elipsin parametrik gösterimidir.
- bu elipsin şekli ve yönelimi α,β,γ parametrelerince belirlenir.

Demetin faz uzayındaki yayımı (emittance) korunumludur.

- Bir onceki sayfada gosterdigimiz gibi demetin x-x′ uzayindaki davranisi, s konumuna gore parametrik bir elips ile tanimlanir.

$$\epsilon = \gamma(s)x^2(s) + 2\alpha(s)x(s)x'(s) + \beta(s)x'^2(s)$$



Liouville Teoremi:
Faz uzayinda demet tarafindan kaplanan alan sabittir.

$$\epsilon \propto \frac{1}{\beta\gamma}$$

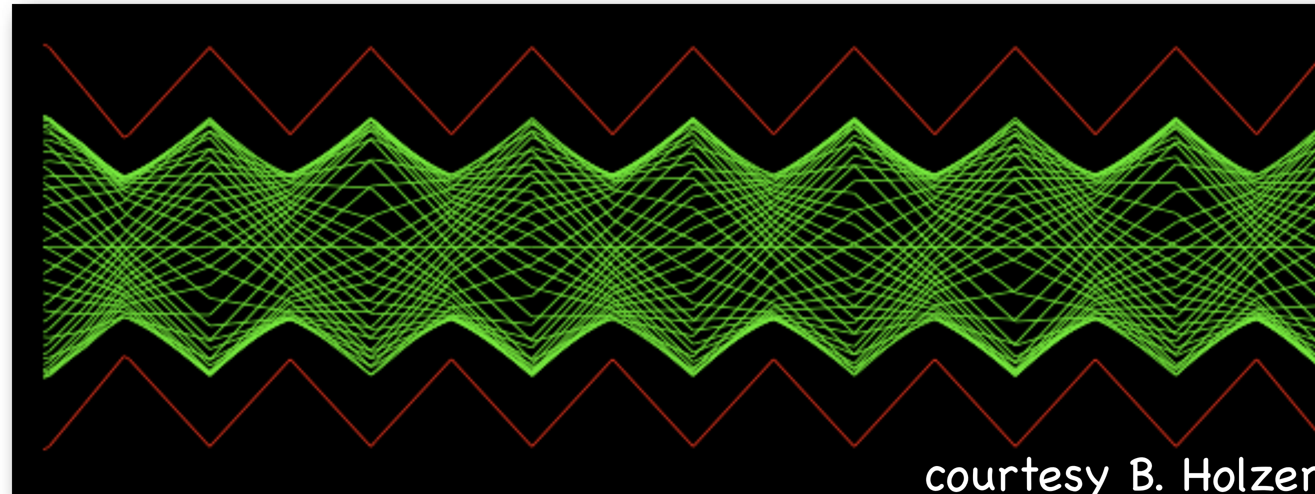
Normalize yayım (emittance):

$$\epsilon^* = (\gamma\beta)\epsilon$$

- x, x′ uzayında bir elipsin parametrik gösterimidir.
- bu elipsin şekli ve yönelimi α,β,γ parametrelerince belirlenir.
- ε, s′den bağımsız bir hareket sabitidir.

▸Hızlandırıcı boyunca magnetik örgünün odaklama özelliklerinin tanımlandığı periyodik fonksiyondur.

$$\beta(s+L) = \beta(s)$$



"0" ve "s" noktaları arasındaki "faz ilerlemesi" (phase advance)

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta(s)}$$

Tam bir devir için,
tur başına salınım sayısına "ayar" (tune) denir.

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{ds}{\beta(s)}$$

x(s) ile tanımlanan ideal yörünge civarında gerçekleşen enine salınımlara "Betatron salınımları" denir.

Daha önce görmüş olduğumuz matris formalizmi, çok parçacıktan oluşan bir sistemin, yani demetin, bileşke davranışı hakkında bilgi vermez.

"0" ve "s" noktaları arasındaki "evre ilerlemesi" (phase advance)

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{ds}{\beta(s)}$$

Tam bir devir için,
tur başına salınım sayısına "ayar" (tune) denir.

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{ds}{\beta(s)}$$

Betatron ayarı enine düzlemde parçacık hareketini tanımlamak için kullanılan önemli bir parametredir. İdeal bir hızlandırıcı (ideal magnetler ve hizalama) ve tamamen monochromatic bir demet için betatron ayar değerleri sistemdeki quadrupollerin kuvvet değerlerine uygun herhangi bir değer olabilir. Ancak gerçekte, magnetik alanlarda ve bileşenlerin hizalanmasında ufak hatalar oluşması kaçınılmazdır. Bu tür kusurlardan kaynaklanan karasızlıklardan kaçınmak için hızlandırıcının betatron ayarı çok dikkatli seçilmelidir.

Basit bir örnek verelim: Ayarın tamsayı bir değer olduğu bir hızlandırıcıda dipole alanında bir hata olduğunu düşünelim. Bu durumda parçacık perturbasyon bölgesine her turda aynı faz ilişkisi ile varacaktır. Alan hatasında kaynaklanan tekme ("kick") parçacıkların her turunda sistematik olarak eklenecek, salınımın genliği ta ki parçacıklar hızlandırıcının duvarlarında yok olana dek artacaktır.

Rezonans Diagramı

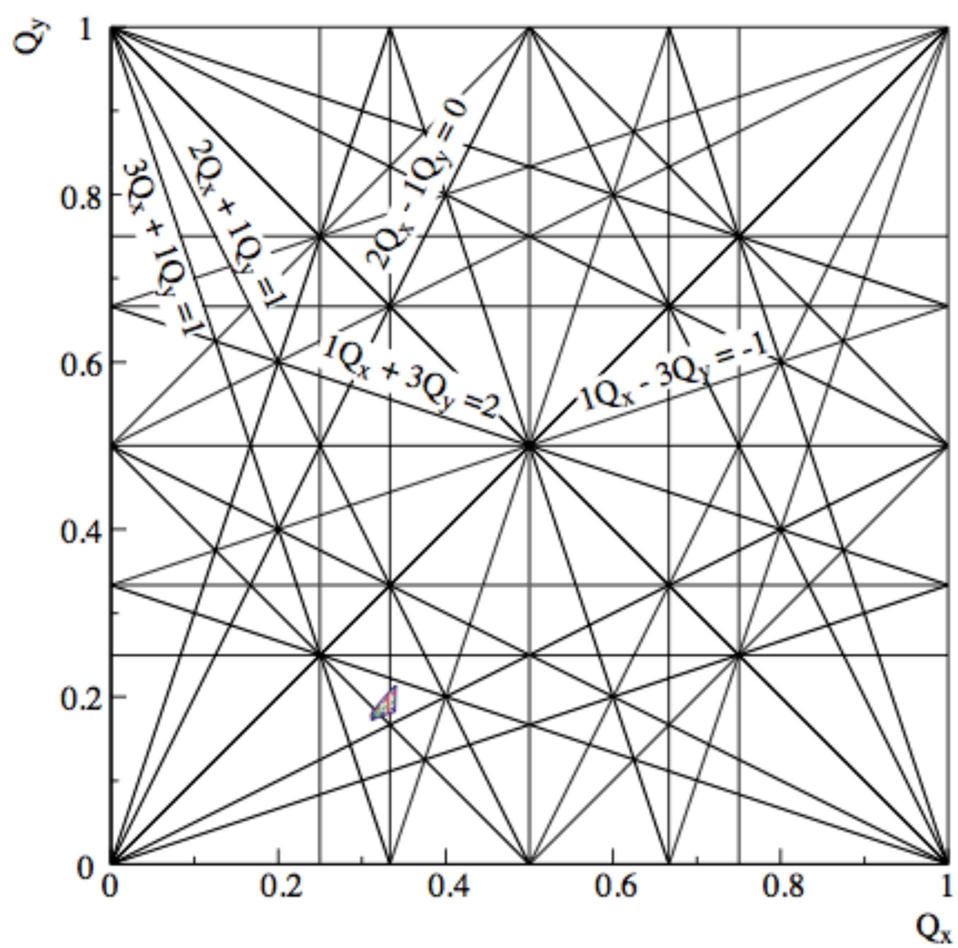


Figure 7: Illustration of a tune diagram for resonances up to 4th order. The typical tune area, occupied by a colliding beam at LEP1 is also shown as shaded area ($Q_x \approx 0.31 - 0.34$ and $Q_y \approx 0.17 - 0.214$).

CERN-SL-2000-037-DI

$$pQ_x + qQ_y = m$$

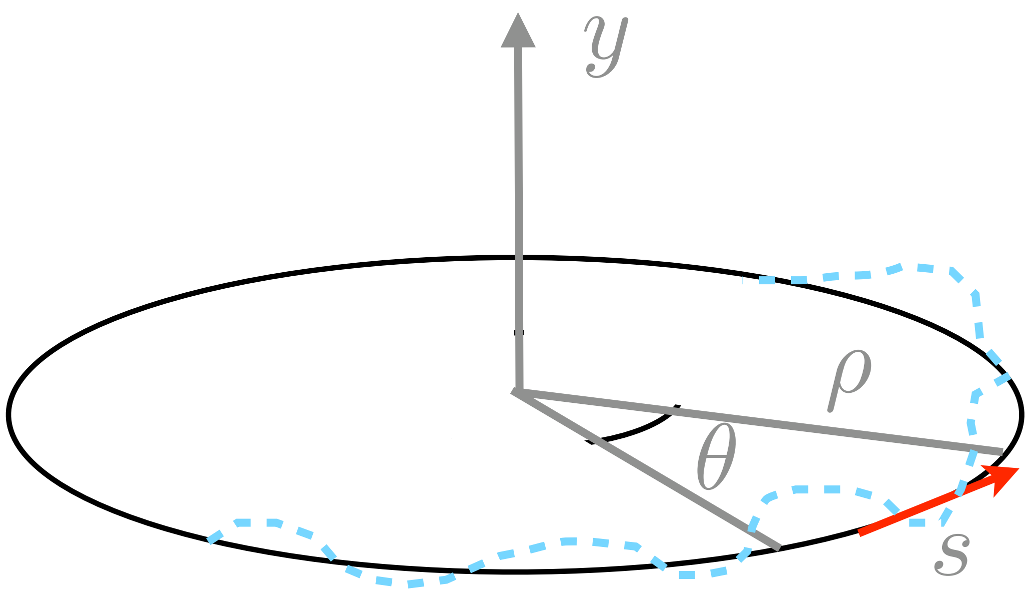
Rezonanslara sebep olan istenilmeyen ayar kombinasyonları bir ayar diagramında gösterilebilir. Demetin ayar uzayında kapladığı alana "ayar ayakizi (tune footprint)" denir.

Hızlandırıcının performansı ve deneylerdeki parçacık ardalanı ayar diagramındaki ayakizine hassas bir şekilde bağlıdır.

homojen olmayan hareket denklemi için parçacık gezingeni

$$\Delta p/p \neq 0$$

- Demet içinde momentum yayılımının sıfırdan farklı olduğu durumu inceleyelim.



dairesel koordinat sistemi

$$x'' + x(\frac{1}{\rho^2} - k) = \frac{\Delta p}{p_0}\frac{1}{\rho}$$

Sonraki sayfaya gidiniz. -->

homojen olmayan hareket denkleminin çözümü

$$x(s) = x_\beta(s) + D(s) \cdot \frac{\Delta p}{p}$$

Türetim - 3

Homojen olmayan hareket denkleminin türetilmesi

Türetim 2'den hatırlayalım: $$x'' - \frac{1}{\rho}(1 - \frac{x}{\rho}) = \frac{eB_0}{mv} + \frac{exg}{\boxed{mv}} \qquad \boxed{p = p_0 + \Delta p}$$

Hesabımızı küçük bir momentum hatası olduğunu göz önüne alarak yineleyelim:

$$\Delta p << p_0 \rightarrow \frac{1}{p_0 + \Delta p} \approx \frac{1}{p_0} - \frac{\Delta p}{p_0^2}$$

$$x'' - \frac{1}{\rho} + \frac{x}{\rho^2} \approx \underbrace{\frac{eB_0}{p_0}}_{-\frac{1}{\rho}} - \frac{\Delta p}{p_0^2} eB_0 + \underbrace{\frac{exg}{p_0}}_{k * x} - \underbrace{xeg \frac{\Delta p}{p_0^2}}_{\approx 0 \quad (x, \Delta p \rightarrow small)}$$

$$x'' + x(\frac{1}{\rho^2} - k) = \frac{\Delta p}{p_0} \frac{1}{\rho}$$

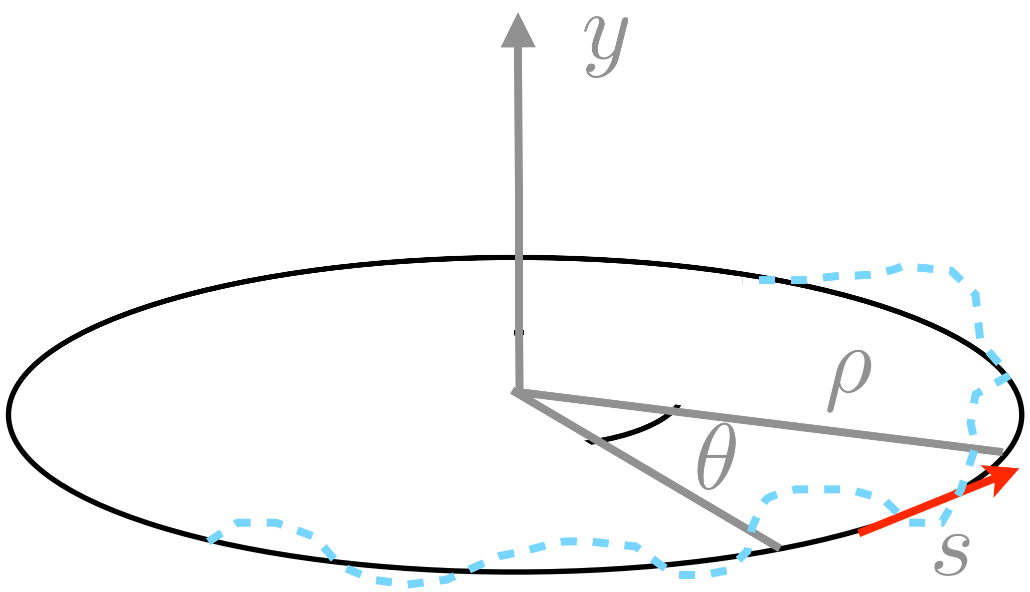
Momentum yayılımı hareket denkleminin sağ tarafına ek bir terim getiriyor.

homojen olmayan hareket denklemi için parçacık gezingeni

$$\Delta p/p \neq 0$$

$$x'' + x(\frac{1}{\rho^2} - k) = \frac{\Delta p}{p_0}\frac{1}{\rho}$$

$$x(s) = x_\beta(s) + D(s) \cdot \frac{\Delta p}{p}$$



dairesel koordinat sistemi

$$x(s) = x_h(s) + x_i(s)$$

$$x_h''(s) + K(s) \cdot x_h(s) = 0$$

$$x_i''(s) + K(s) \cdot x_i(s) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta p}{p}$$

Dağılma (Dispersion)

$$D(s) = \frac{x_i(s)}{\Delta p/p}$$

homojen olmayan hareket denklemi için parçacık gezingeni

matris formalizmi

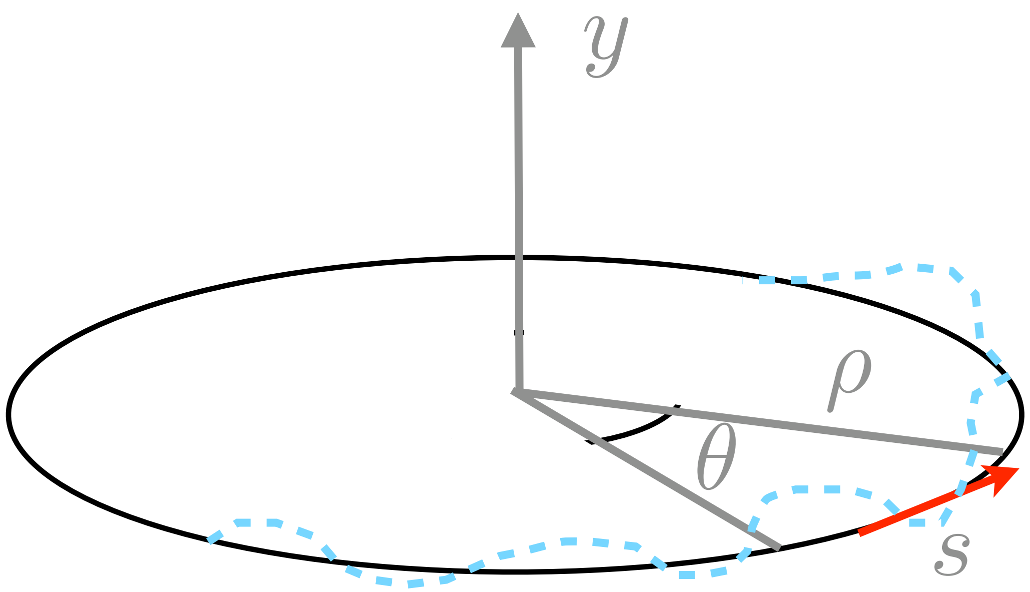
$$x(s) = x_\beta(s) + D(s) \cdot \Delta p/p$$

$$x(s) = C(s) \cdot x_0 + S(s) \cdot x_0' + D(s) \cdot \Delta p/p$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 + \frac{\Delta p}{p} \begin{pmatrix} D \\ D' \end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \Delta p/p \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} C & S & D \\ C' & S' & D' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \Delta p/p \end{pmatrix}_0$$

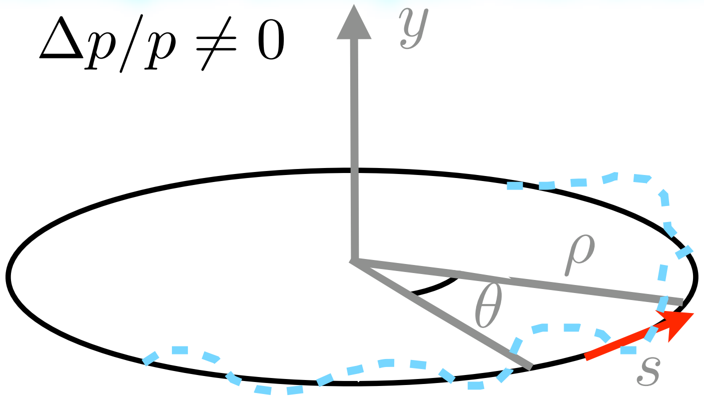


dairesel koordinat sistemi

- Dağılıma iki-kutuplu magnetler sebep olur.
- Çarpıştırıcıların etkileşme noktalarında dağılım değeri sıfır olmalıdır.

- İdeal parçacığın sahip olduğu yörünge dp/p = 0 için tanımlıdır.
- Herhangi bir parçacığın yörüngesi ise x_β ve dağılımdan gelen terimin toplamına eşittir.
- D(s), örgünün odaklama özelliklerine bağlı diğer bir yörüngeyi tanımlar.

homojen olmayan hareket denklemi için parçacık gezingeni



dairesel koordinat sistemi

Momentum Sıkıştırması (compaction) Katsayısı

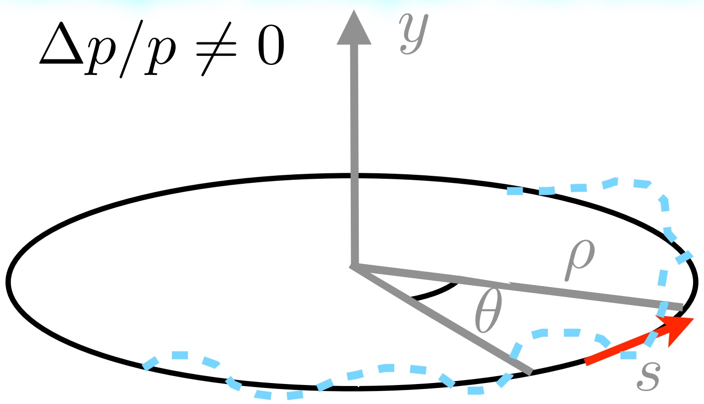
Dağılım fonksiyonu aracılığı ile parçacığın momentum dağılımı ve boyuna hareketini ilişkilendirir.

Momentumu sapmış parçacıklar için yörüngenin uzaması:

$$\frac{\delta l_\epsilon}{L} = \alpha_{cp} \frac{\Delta p}{p} \qquad \alpha_{cp} \approx \frac{2\pi}{L} < D > \approx \frac{< D >}{R}$$

$$\alpha_{cp} = \frac{1}{L} \oint \frac{D(s)}{\rho(s)} ds$$

homojen olmayan hareket denklemi için parçacık gezingeni



Dört Kutuplu Hataları ve Renklilik (Quadrupole Error and Chromaticity)

- Quadrupole hataları ayar (tune) kaymasına sebep olur.
- ΔQ quadrupole içindeki β fonksiyonu ile orantılıdır.
- Renklilik momentumdaki hatayı ayar kayması ile ilişkilendiren katsayıdır.

$$\Delta Q = \int_{s_0}^{s_0+l} \frac{\Delta K(s)\beta(s)ds}{4\pi} \qquad Q' = -\frac{1}{4\pi}\oint K(s)\beta(s)ds$$

$$\boxed{\Delta Q = Q'\frac{\Delta p}{p}}$$

Örnek Problemler
ve
Ödevler