HPFBU2012

Hızlandırıcı Fiziği

Boyuna Demet Dinamiği

Öznur METE

CERN, Accelerators Beam Transfer Group

oznur.mete@cern.ch

İçerik

- Enine dinamik
- **Boyuna dinamik**
- Öğrendiklerimizi simulasyon (Parmela, Superfish, Madx) çalışmaları ile pekiştireceğiz.

İçerik

- Parçacıkların boyuna hareketi
- Boyuna evre uzayı dinamiği
- Evre uzayında hareket denklemi
- Küçük salınım genlikleri
- Evre kararlılığı
- Geniş salınım genlikleri
- Yüklü parçacıkların hızlandırılması (daha doğru olarak; ivmelendirilmesi)
- Boyuna evre uzayı parametreleri
  - Ayıraç (seperatrix) parametreleri
  - Momentum kabulü
  - Bohça uzunluğu
  - Boyuna demet yayınımı
  - Evre uzayı denkleştirme
- Yüksek dereceden evre odaklama

Kaynak: "Particle Accelerator Physics". Helmut Wiedemann, Bölüm 6

- Yüklü parçacıkları hızlandırmak için, hızlanmanın gerçekleşmesini istediğimiz yönde sıfırdan farklı bileşene sahip bir kuvvet alanı uygulamalıyız.
- Bu tür alanlara, boyuna alanlar ya da hızlandırma alanları denir.

Bu derste oldukça genel olarak, hızlandırma sürecinin;

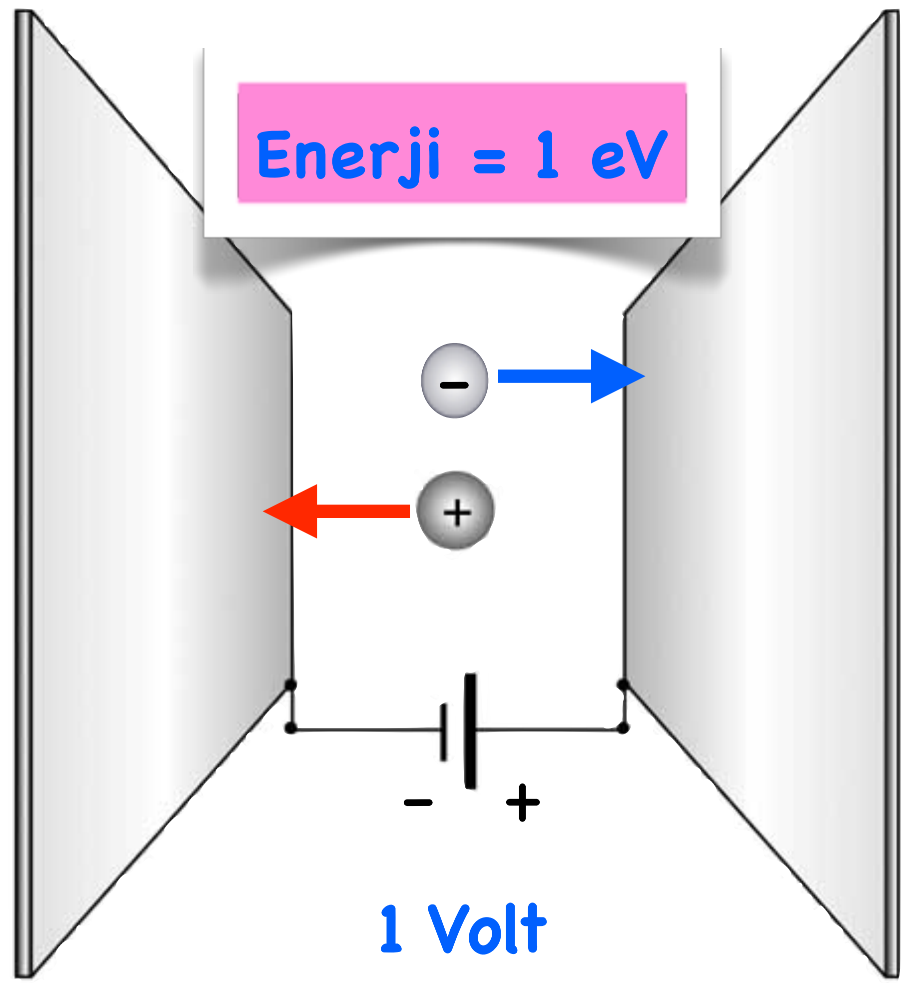
- hızlandırma alanlarının yüklü parçacıklarla etkileşimine bakarak anlaşılması,
- ölçeklendirilmesi,
- ve kararlılık sınırları konularına öğreneceğiz.

- **Parçacıkların boyuna hareketi**
- Boyuna evre uzayı dinamiği
- Evre uzayında hareket denklemi
- Küçük salınım genlikleri
- Evre kararlılığı
- Geniş salınım genlikleri
- Yüklü parçacıkların hızlandırılması (daha doğru olarak; ivmelendirilmesi)
- Boyuna evre uzayı parametreleri
  - Ayıraç (seperatrix) parametreleri
  - Momentum kabulü
  - Bohça uzunluğu
  - Boyuna demet yayınımı
  - Evre uzayı denkleştirme
- Yüksek dereceden evre odaklama

Kaynak: "Particle Accelerator Physics". Helmut Wiedemann, Bölüm 6

Hızlandırma alanları durgun, atmalı veya yüksek frekansta salınan elektromagnetik alanlar biçiminde olabilir.

Kavramsal olarak en basit hızlandırma yolu aralarında durgun elektrik alan bulunan iki elektrod kullanmaktır.



Plakalar arasındaki elektriksel gerilime bağlı olarak bir elektriksel kuvvet alanı uyarılır.

Parçacığın bir plakadan diğerine hareketi sırasında kazandığı kinetik enerji parçacığın elektrik yükü ve plakalar arası gerilimin çarpımına eşittir.

Parçacıkların boyuna hareketi

Parçacıkların boyuna hareketi

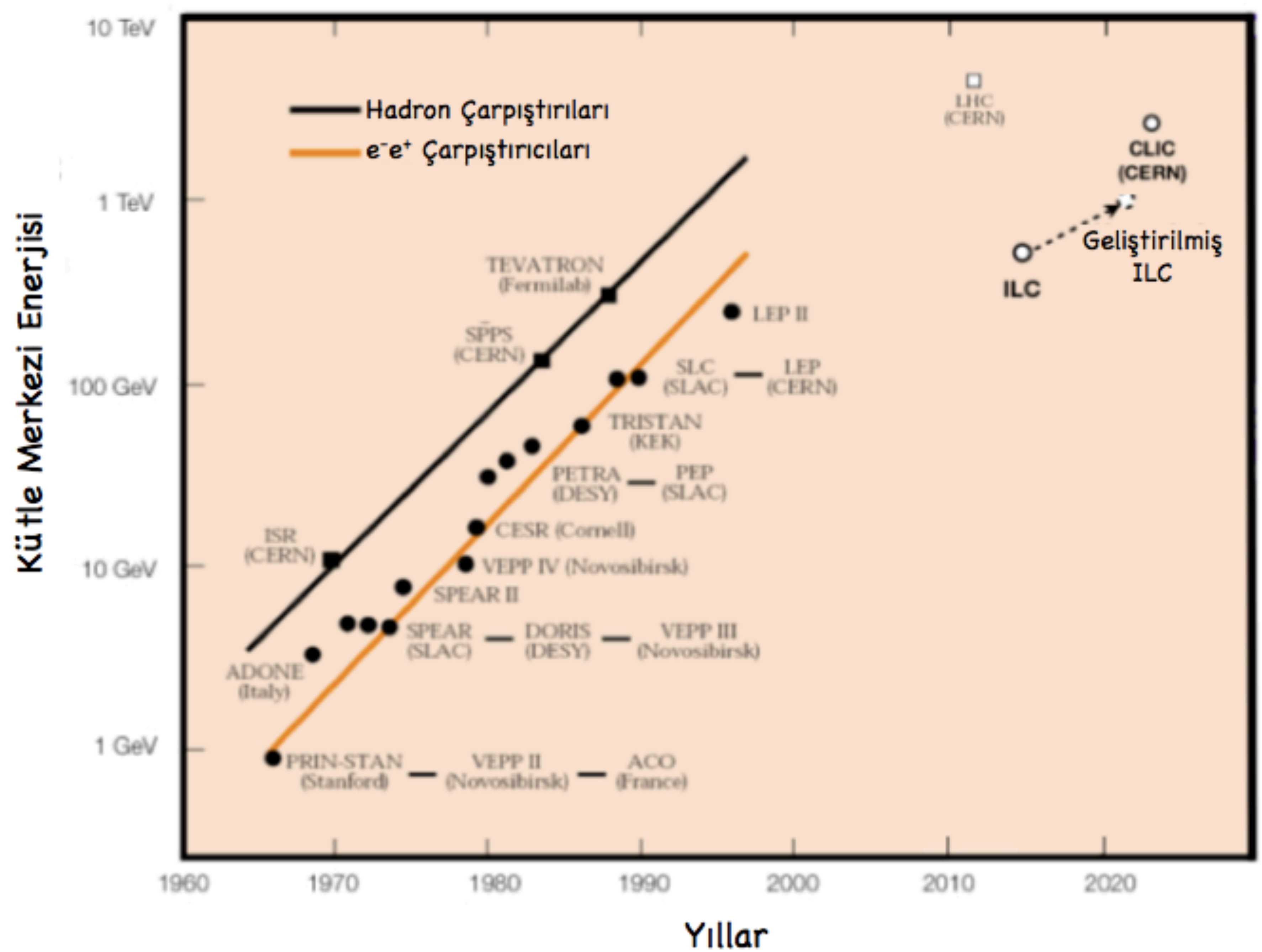
- Parçacıkların hızlandırıcı alanın şiddeti, dolayısıyla kazanacakları enerji, **"kırılma (breakdown)"** denen bir olgu ile sınırlıdır.
- Kırılma sınırı düşünüldüğünde, daha yüksek gerilimlere durgun elektrik alanı çok kısa atmalar halinde uygulayarak ulaşılabilir.
  - Bu şekilde, kırılma sınırının altında, elde edilen en yüksek gerilim 10 MV mertebesindedir.
- Daha da yüksek gerilimler elde etmek istersek, o zaman yüksek frekanslı elektromagnetik alanlar kullanmalıyız[1,2,3].
  - İçlerinde bu şekilde alanlar uyarılabilecek özel RF kovukları tasarlamalıyız.
  - Parçacıklar RF kovuklarının içinden birkez ya da kazanmaları istenilen enerjiye göre birçok kez geçerler.
  - Yüksek frekanslı RF normal iletken kovuklar kullanılarak, kırılma noktasının altında elde edilebilen en yüksek elektrik alan **100 MV/m** 'dir. Bu değere ulaşabilen kovuklar **CERN'de CLIC projesi** dahilinde üretimekte, SLAC ve KEK işbirliğinde test eilmektedir.

1 G. Ising
2 R. Wideroe
3 M.S. Livingstone

*Ödev --> Killpatrick Ölçütü ve bir kavitede uyarılabilecek en yüksek alan??

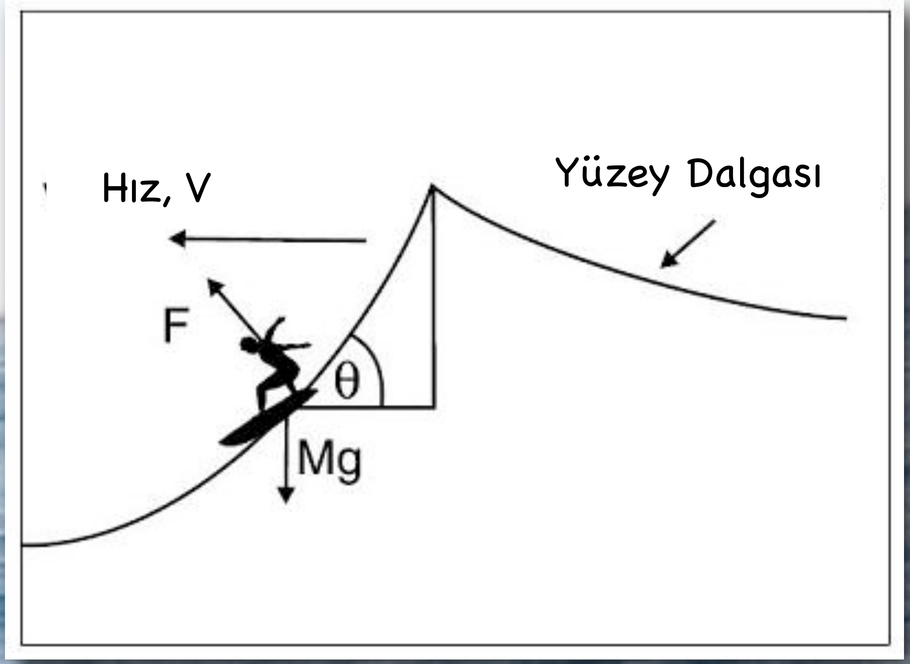
- Yüksek enerjili hızlandırıcıların tarihsel gelişimini ilk derslerde görmüştük.
- Daha yüksek enerjilere çıkmak **RF teknolojisi**ndeki gelişmelere paralel gerçekleşmiştir.

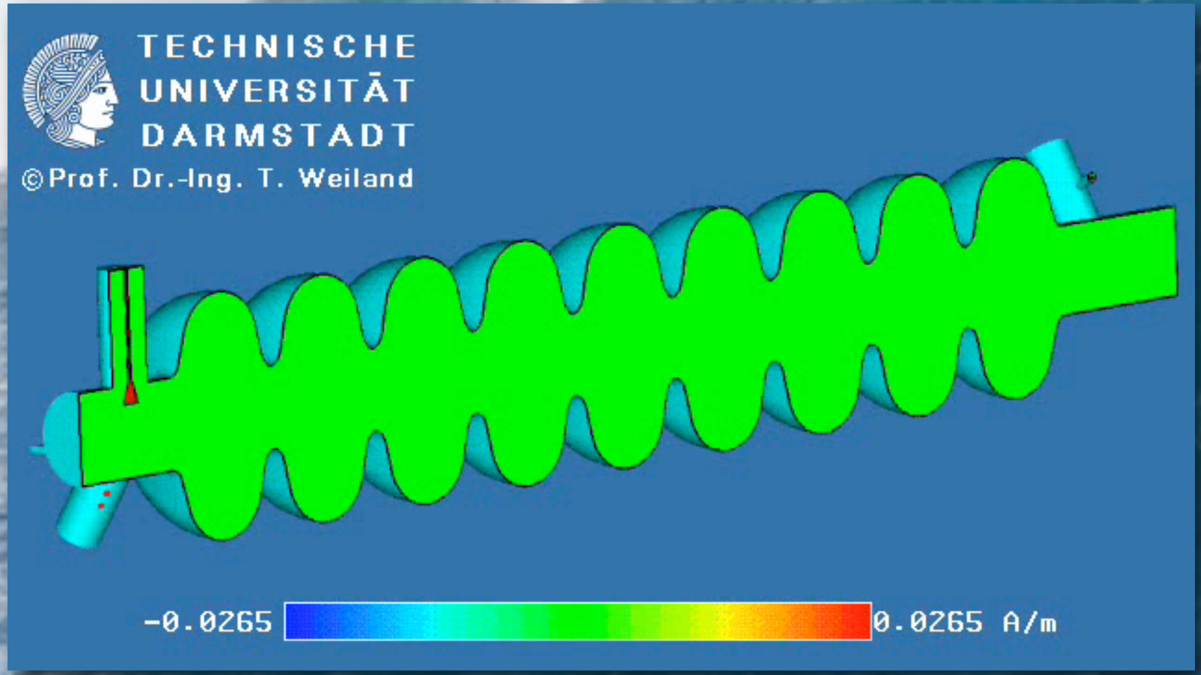
S. Livingstone'ın hazırladığı çizelgeden güncelleştirilmiştir.



Modern hızlandırıcılar yüksek enerjilere çıkmak için, güçlü RF (radyo-frekansı) sistemler kullanır.

- Yüklü parçacıklar ve EM alanlar arasındaki etkileşmeyi çalışmak için, parçacıkların ilerleme yönünde yayılan ω frekansında bir düzlem elektromagnetik dalga düşünelim.
- Serbest yayılan dalgaların boyuna bileşenleri yoktur.
- Bu yüzden, yayılma doğrultusunda bileşeni olan hızlandırma alanları üretecek "hızlandırma kovuğu" denilen fiziksel yapılar sağlanmalıdır.

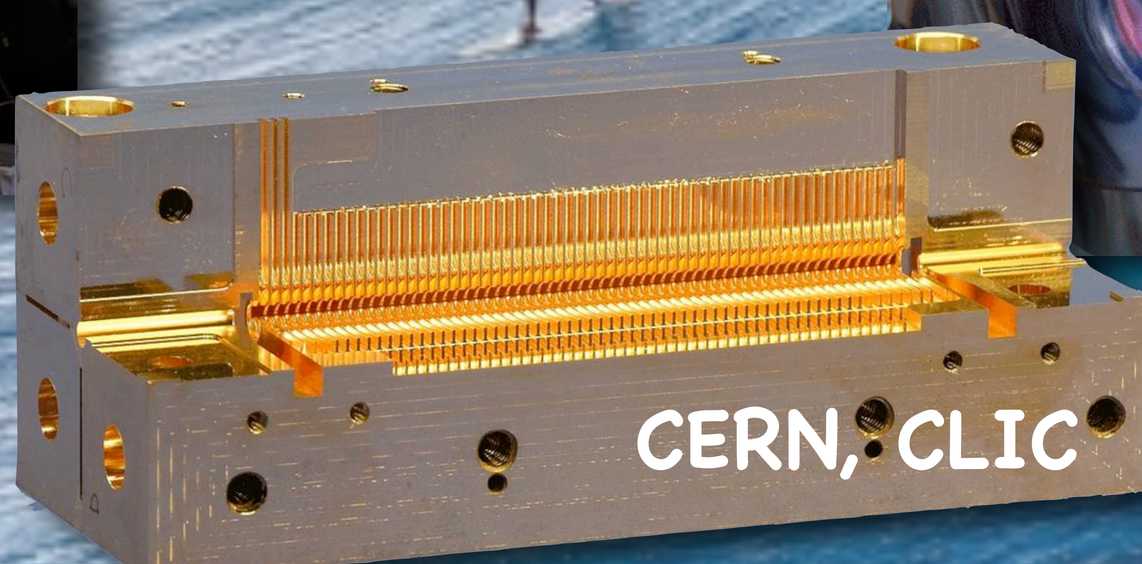




Parçacıkların boyuna hareketi

Modern hızlandırıcılar yüksek enerjilere çıkmak için, güçlü RF (radyo-frekansı) sistemler kullanır.

- Yüklü parçacıklar ve EM alanlar arasındaki etkileşmeyi çalışmak için, parçacıkların ilerleme yönünde yayılan ω frekansında bir düzlem elektromagnetik dalga düşünelim.
- Serbest yayılan dalgaların boyuna bileşenleri yoktur.
- Bu yüzden, yayılma doğrultusunda bileşeni olan hızlandırma alanları üretecek "hızlandırma kovuğu" denilen fiziksel yapılar sağlanmalıdır.



Modern hızlandırıcılar yüksek enerjilere çıkmak için, güçlü RF (radyo-frekansı) sistemler kullanır.

- Yüklü parçacıklar ve EM alanlar arasındaki etkileşmeyi çalışmak için, parçacıkların ilerleme yönünde yayılan ω frekansında bir düzlem elektromagnetik dalga düşünelim.
- Serbest yayılan dalgaların boyuna bileşenleri yoktur.
- Bu yüzden, yayılma doğrultusunda bileşeni olan hızlandırma alanları üretecek "hızlandırma kovuğu" denilen fiziksel yapılar sağlanmalıdır.

Üretilmesi gereken alan

$E(z,t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)} = E_0 e^{i\phi}$ **İlerleyen dalga kovuğu**

$E(z,t) = E_0 e^{i\omega t + \delta}$ **Duran dalga kovuğu**

δ parçacıkların duran dalga kovuğuna girdikleri evredir.

İçerik

Kaynak: "Particle Accelerator Physics". Helmut Wiedemann, Bölüm 6

Boyuna Evre Uzayı Dinamiği

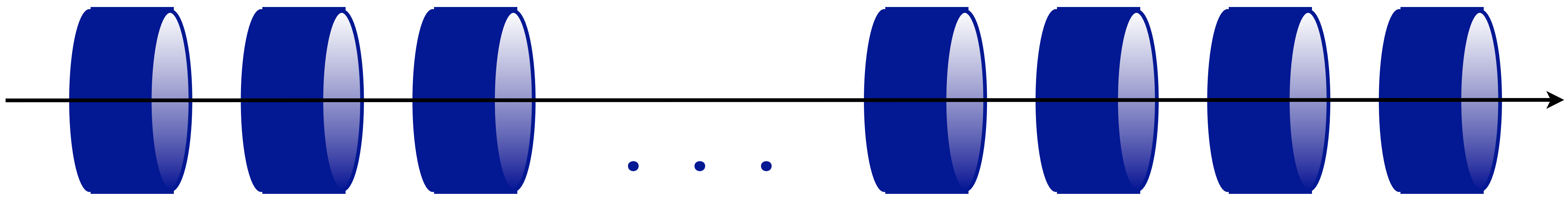
- Başarılı bir hızlandırma, yüklü parçacıklarla elektromagnetik alan arasında kararlı ve öngörülebilir bir etkileşme gerektirir.
- Rastgele etkileşmeler az hızlandırmaya ya da hiç hızlandırma elde edememeye sebep olur.
- Hızlandırma sistematik olmalıdır.
- Parçacıklar ve alan arasındaki yapıcı etkileşme daha önce Veksler[1] ve McMillan[2] tarafından çalışılmıştır.
- Bu çalışmalar "evre odaklama"nın keşfine olanak tanımıştır.
- Parçacıklar ve alan arasındaki sıradan bir çakışma, üst üste gelme mutlaka bir hızlanma ile sonuçlamaz.
- Genellikle, kimi parçacıklar alanın evre hızına göre daha hızlı iken kimileri de yavaş kalırlar. Böylece alandan evrelerine göre enerji kazanan bir parçacıklar tayfı oluşur.
- Hızlandırma miktarı, alanın parçacıklar tarafından görülen anlık evresine bağlıdır.
- Buna göre, net bir hızlanmanın sağlanması için hızlandırıcı RF-alanı bir takım özel sınır koşullarını sağlamalıdır. Bu koşullara "eşzamanlılık koşulları" diyelim.

[1] V. I. Veksler DAN (USSR), 44:393, 1944

[2] E.M. McMillan. Phys. Rev. 68:143, 1945

Eşzamanlılık Koşulları

- Bu koşulları türetmek için bir dizi hızlandırma kovuğundan oluşmuş bir sistem düşünelim.



- Sistematik bir hızlandırma için, parçacıklar ulaştığında her bir kovuktaki alanın evresi belirli bir değer almalıdır.
- Bu evreye (synchronous) "eşzamanlı evre" denir.
- Eğer N tane kovuk parçacıklar ulaştıkları zaman aynı evrede olacak şekilde ayarlanırlarsa, toplam hızlandırma tek bir kovuğun sağlayacağı hızlandırmanın N katı kadar olacaktır.

Eşzamanlılık Koşulları

ψ_s Eşzamanlı evre

$$\psi_s = \omega t - kz = sabit$$

$$\frac{d\psi_s}{dt} = \omega - k\frac{dz}{dt}$$

$$= \omega - kv$$

$$= \omega - k\beta c = 0$$

$$\omega = k\beta c = \frac{2\pi}{\Delta T}$$

$$k = \frac{2\pi}{\beta c \Delta T} \qquad L = \beta c \Delta T$$

$$k = \frac{2\pi}{L}$$

Parçacıkların βc hızı ile L mesafesini katetmeleri için gereken eşzamanlı evreyi sağlayan en düşük frekans ve dalgasayısı:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{\Delta T} \qquad k_1 = \frac{2\pi}{L}$$

En düşük frekans ve dalgasayısının, tamsayı katları da eşzamanlılık koşulunu sağlar:

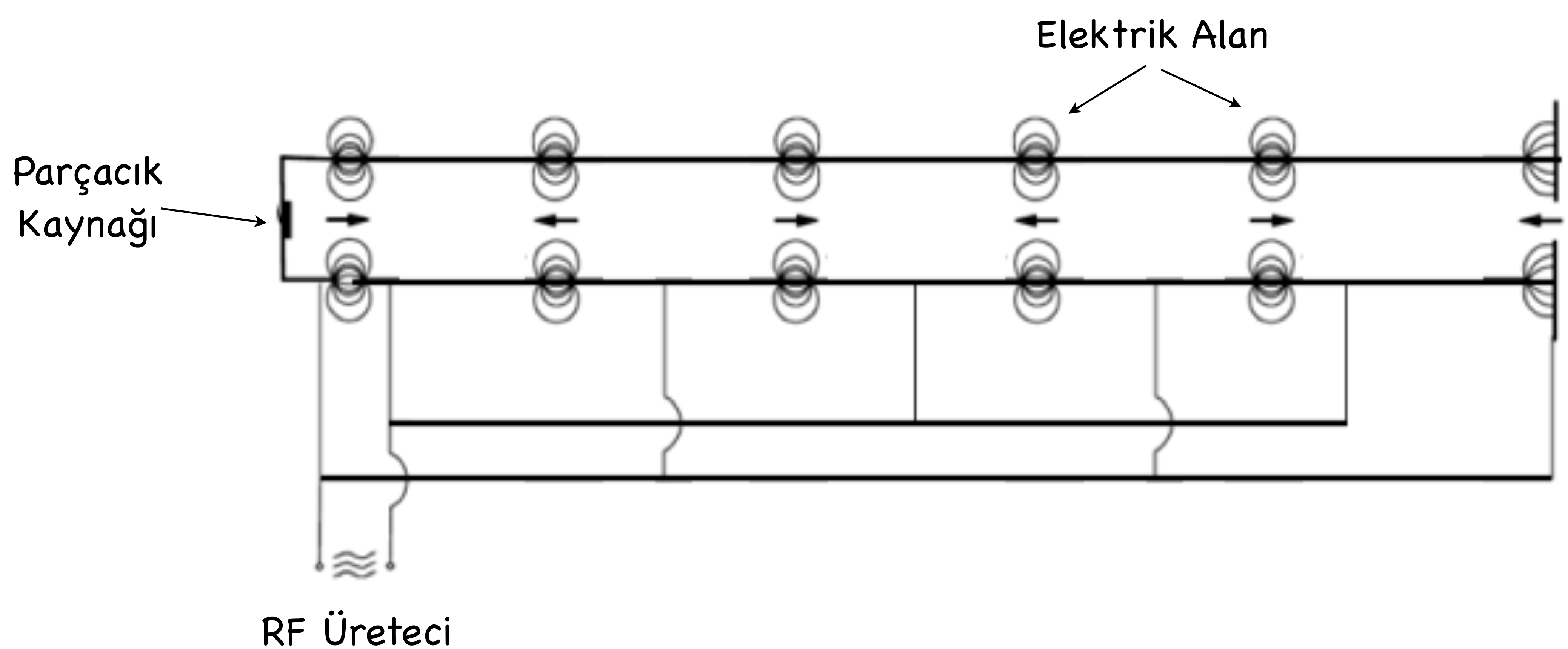
$$\omega_h = h\omega_1 = k_h \beta c = \frac{2\pi}{L} h\beta c = h\frac{2\pi}{\Delta T} \qquad k_h = hk_1$$

Eşzamanlılık Koşulları

Eşzamanlılık koşulunun bir uygulaması: Wideroe Doğrusal Hızlandırıcısı

- Alanlarının dışardan bir RF kaynağı tarafından üretildiğini ve bir dizi sürüklenme borularına uygulandığını düşünelim.
- Hızlandırma alanları borular arası boşluklarda kurulacaktır. Zaman içerisinde boşluklardaki alanlar işaret değiştirecek ve belirli zamanlarda yavaşlatıcı belirli zamanlarda hızlandırıcı olacaklardır.

Soru: Böyle bir tasarım işe yarar mı? Neden?



Eşzamanlılık Koşulları

Eşzamanlılık koşulunun bir uygulaması: Wideroe Doğrusal Hızlandırıcısı

- Sürüklenme borularının boyu parçacıkların hızına bağlı olarak belirlenmelidir.

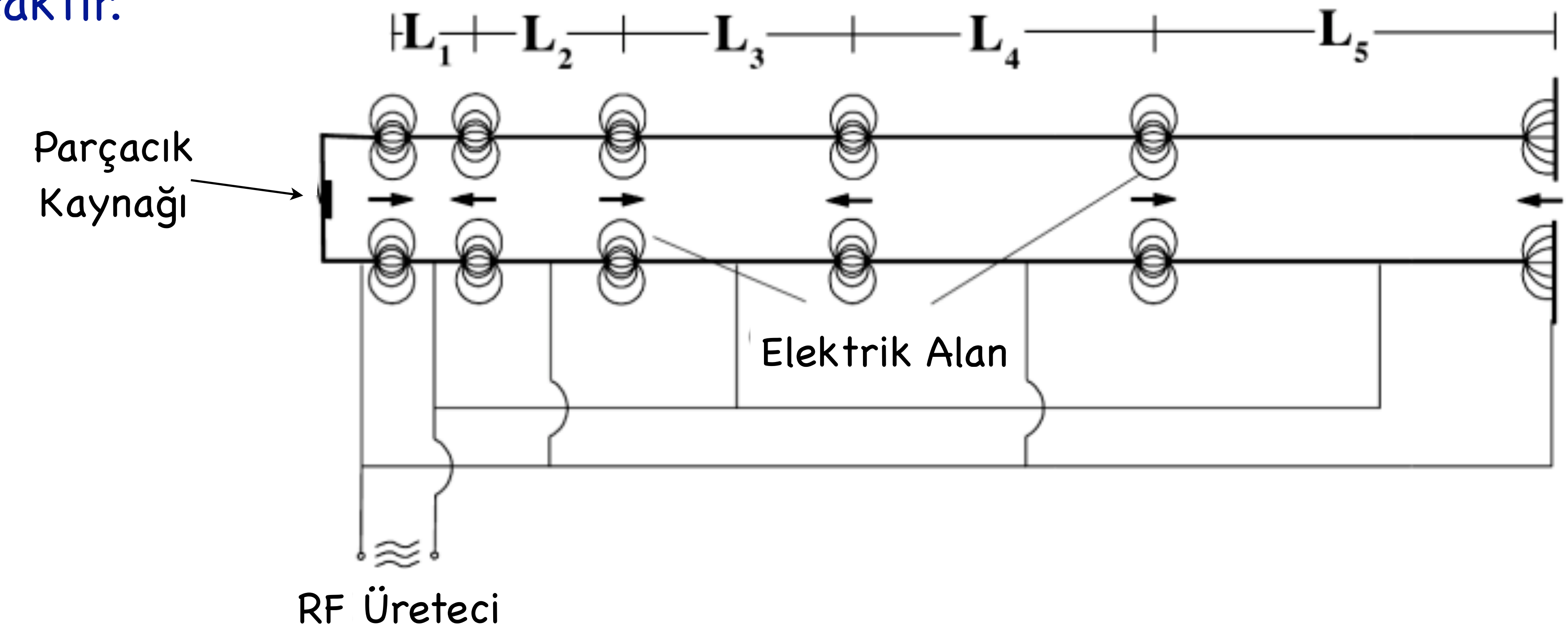
$$T_{RF}$$

RF alanın periyodu

$$L = \beta c T_{RF}$$

Parçacıkların bir periyod boyunca aldığı yol

- Aynı RF periyodu için, parçacığın enerjisi ve buna bağlı olarak hızı artarken, hızlanmanın aynı verimle devam etmesi için sürüklenme borularının uzunluğu da arttırılmalıdır.
- Prensipte, sadece, parçacıklar yüksek göreceli hızlara ulaştıklarında ve artık enerji artışına rağmen hızları ışık hızı ile sınırlandığında sürüklenme borularının boyu sabit olacaktır.



Eşzamanlılık Koşulları

Özel Durumlar

- **Elektronlar** gibi hafif parçacıklar için hızın yeterince sabit kalacağı göreli enerjilere çıkmak kolaydır. Böyle olunca hızlandırıcı yapıların boyuna eksende konumuna değişiklik gerekmeyecektir.

- **Halka şeklindeki hızlandırıcılar**da, parçacıkların hızı artarken hızlandırma kovukları arasındaki uzaklığı ya da hızlandırıcının çevresini değiştiremeyiz. Eşzamanlılık koşulu özel bir durum oluşturmakradır.

$$\omega_h = \frac{2\pi}{L} h\beta c \qquad L = \beta hc\frac{2\pi}{\omega_h}$$

- Biliyoruz

$$\downarrow$$

$$L = \beta\lambda_{RF} h \qquad C = \beta\lambda_{RF} h$$

- Buluruz

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

- Hatırlayalım

- L ve h sabit olduğu için özel durumdaki koşulumuz RF dalgaboyunun hızlanma süresince değişmesini gerektirmektedir.

- Parçacıkların hızı ışık hızına yaklaştığında ve artık sabit kaldığında halka tipli bir hızlandırıcı için; kovuklar arası uzaklığın dalgaboyunun tamsayı katları olması ve hızlandırıcının çevresinin yukarıdaki koşulu sağlaması gerekir.

Eşzamanlılık Koşulları

Eşzamanlılık koşulunun bir uygulaması: Wideroe Doğrusal Hızlandırıcısı

Resim: GSI'da bulunan 120 metre uzunluğundaki iyon demetleri üretmek için kullanılan UNILAC hızlandırıcısı. (G. Otto)

[1] L. W. Alvarez, Phys. Rev. 68:143, 1946

İçerik

Kaynak: "Particle Accelerator Physics". Helmut Wiedemann, Bölüm 6

Yol Farkı, Evre Farkı

- Düşük enerjili parçacıklar düşünüldüğünde her parçacığın bir hızlandırma boşluğundan diğerine varış zamanı bir dağılım içerisinde farklılık gösterir. Bunun sebebi parçacıklar arasındaki momentum dağılımından kaynaklanan hız dağılımıdır.
- Hızlandırıcı kovuklar arasındaki örgü eğici magnetler içeriyorsa, bu kovuklar arasında parçacıkların momentuma bağlı bir yol farkı oluşacaktır. Bu tür renksel etkilerin sonucu olarak, eşzamanlılık koşulunu da gözden geçirmek gerekecektir.
- Şimdi **dalga sayısının parçacığın momentumu ile değişimi**ne bakalım:

$$\left.\frac{\partial k}{\partial p}\right|_0 = \left.\frac{\partial k}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial p}\right|_0 = -\frac{k_h}{L_0}\left.\frac{\partial L}{\partial p}\right|_0 \left(\frac{p_0}{p_0}\right) = -\frac{k_h}{p_0}\frac{\Delta L/L_0}{\Delta p/p_0} = -\frac{k_h}{p_0}\alpha_c$$

α_c --> momentum sıkıştırma (compaction) parametresi

Yol Farkı, Evre Farkı

- s parçacığın konum vektörü olmak üzere, curvilinear koordinatlarda parçacığın aldığı yol L'yi bulalım.

$$L = \int_0^{L_0} s dz$$

$$L = \int_0^{L_0} (1 + \kappa_x x) dz$$

$$L = \int_0^{L_0} (1 + \kappa_x (x_\beta + D_x(\Delta p/p_0))) dz$$

$$L = L_0 + \langle \kappa_x x_\beta \rangle L_0 + \langle \kappa_x D_x \rangle \frac{\Delta p}{p_0} L_0$$

$$L = L_0 + \langle \kappa_x D_x \rangle \frac{\Delta p}{p_0} L_0$$

- **Soru: x_β nelere bağlıdır?**

$$x = x_\beta + D_x(\Delta p/p_0)$$

- Enine eksende herhangi bir andaki demet beneği.

$$\langle \kappa_x x_\beta \rangle = 0$$

- Betatron hareketinin salınımlı hareketinden dolayı bu terim sıfırdır.

- Momentumu değişen bir parçacık için iki hızlandırma boşluğu arasındaki uzaklık Lo'dan farklı olacaktır.

$$\Delta L / L_0 = \langle \kappa_x D_x \rangle \Delta p / p_0$$

$$\Delta L / L_0 = \alpha_c \Delta p / p_0 \qquad \alpha_c = \langle \frac{D_x}{\rho_x} \rangle$$

Enerji Kazanımı

- Hızlandırma bölümleri boyunca elektrik alanların integrali birim zaman (hızlandırıcı çevresinde bir tur) başına kazanılan enerjiyi verir.

$$e \int_L E(\Psi) dz = eV(\Psi)$$

- $V(\Psi)$ parçacıklar tarafından L uzaklığı boyunca görülen hızlandırma gerilimidir.

- İdeal yörünge üzerinde ideal enerji ile hareket eden parçacığın kazanacağı enerji $eV(\Psi_s)$'dir. Burada Ψ_s eşzamanlılık evresidir.

- Bununla birlikte, parçacıkların enerji değişimi için tek kaynak hızlandırma değildir. Aşağıdaki farklı kaynaklar enerji değişiminde rol oynayacaktır:
    - Vakum odası ortamı ile etkileşmeler,
    - dışardan etkiyen alanlar,
    - sinkrotron ışınımı,
    - parçacıklar üzerine boyuna kuvvetler uygulayan diğer kaynaklar...

- Boyuna kuvvetleri ikiye ayırabiliriz:
    - enerji değişiminin sadece evreye bağlı gerçekleştiği,
    - enerji değişiminin sadece parçacığın enerjisine bağlı gerçekleştiği.

$$\Delta E = eV(\Psi) - U(E) \qquad \ddot{\psi} + \frac{\beta c k_h (\gamma^2 - \alpha_c)}{c p_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta c p = 0$$

İçerik

Kaynak: "Particle Accelerator Physics". Helmut Wiedemann, Bölüm 6

- İdeal parçacık hızlandırma kovuğuna ideal evrede gelirken gerçek bir demeti oluşturan diğer parçacıkların çoğu ideal evreden küçük farklarla sapmış evrelerle kovuğa ulaşırlar.

$$\varphi = \Psi - \Psi_s \qquad \ddot{\varphi} + \Omega^2 \varphi = 0$$

- Dairesel bir hızlandırıcıda parçacıklar Ω frekansında boyuna salınımlar yaparlar. Bu frekansa synchrotron salınım frekansı denir.
- Hızlandırıcı gerilim küçük evre farkı çevresinde seriye açılarak ve evre uzayında hareket denklemi kullnanılarak synchrotron salınım frekansı aşağıdaki gibi elde edilir. Türetim burada yapılmayacaktır. Bunun için ders kaynağına[1] başvurabilirsiniz.

$$V(\Psi) = \hat{V_0} sin\Psi \qquad \Omega^2 = \frac{ck_h\eta_c}{cp_0T_0} e\hat{V_0} cos\Psi_s$$

- Kullanışlı birimler türünden yazmak istersek: Dairesel hızlandırıcılarda referans zaman T_0 rahatlıkla hızlandırıcı etrafında bir dönü zamanı olarak alınabilir. RF frekansı ise bu dönü frekansının tamsayı katları olmak zorundadır. Buna göre:

$$f_{RF} = hf_{rev} \qquad f_{rev} = \frac{1}{T_0} = \frac{C}{\beta c} \qquad \omega_{rev} = 2\pi f_{rev} \qquad \Omega^2 = \omega^2 \frac{h\eta_c}{2\pi\beta cp_0} e\hat{V_0} cos\Psi_s$$

[1] "Particle Accelerator Physics". Helmut Wiedemann, Bölüm 6

Küçük Salınım Genlikleri

- Enine dinamikte betatron salınımları için yaptığımız gibi burada da synchrotron salınım ayarı tanımlayabiliriz.

$$\nu_s = \frac{\Omega}{\omega_{rev}}$$

- Evre denklemi için synchrotron salınım frekansını basit bir şekilde tanımlayabiliriz:

$$\varphi = \hat{\varphi} cos(\Omega t + \chi_i)$$

evre sapma genliği

i. parçacık için

t zamanındaki rastgele evre

- Synchrotron frekansının gerçek değerleri için evre sapması ve momentum arasındaki bağlılık:

$$\delta = \frac{\Delta cp}{cp_0} = \frac{\Omega \hat{\varphi}}{h\omega_{rev}\eta_c} sin(\Omega t + \chi_i)$$

$$\delta = \hat{\delta} sin(\Omega t + \chi_i) \qquad \hat{\delta} = \frac{\Omega}{h\omega_{rev}\eta_c}\hat{\varphi} \qquad \ddot{\delta} + \Omega^2 \delta = 0$$

Küçük Salınım Genlikleri

- Evre sapması ve buna bağlı olarak momentum sapmasının davranışlarını göz önünde bulundurarak bir hareket değişmezi yazalım.

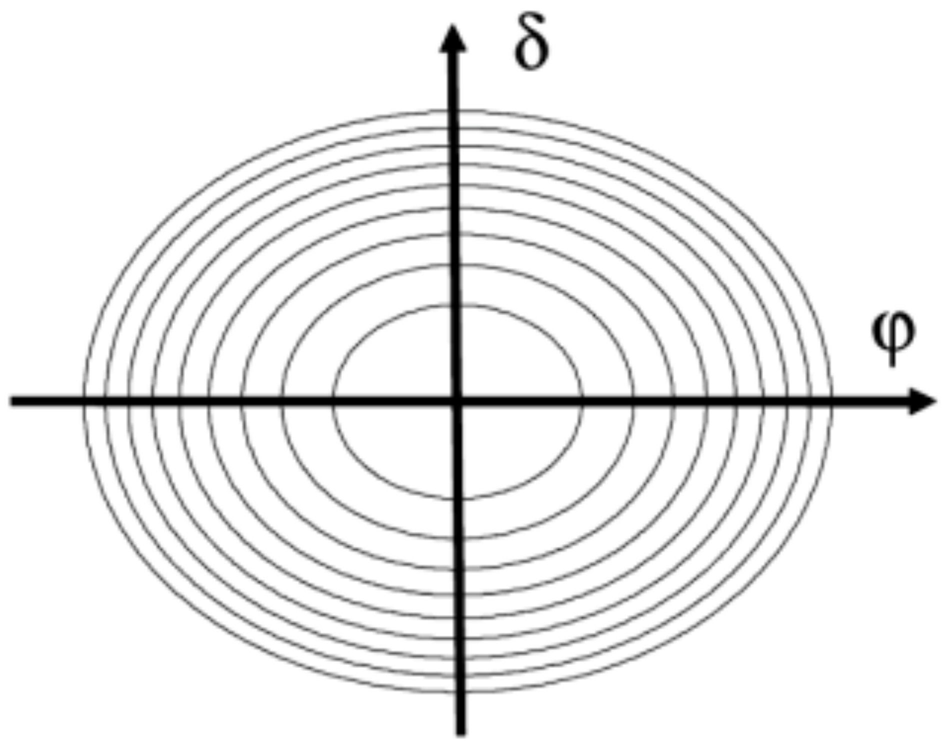
$$\varphi = \hat{\varphi} cos(\Omega t + \chi_i)$$

$$\delta = \hat{\delta} sin(\Omega t + \chi_i)$$

$$\hat{\delta} = \frac{\Omega}{h\omega_{rev}\eta_c}\hat{\varphi}$$

$$\frac{\delta^2}{\hat{\delta}^2} \pm \frac{\varphi^2}{\hat{\varphi}^2} = 1$$

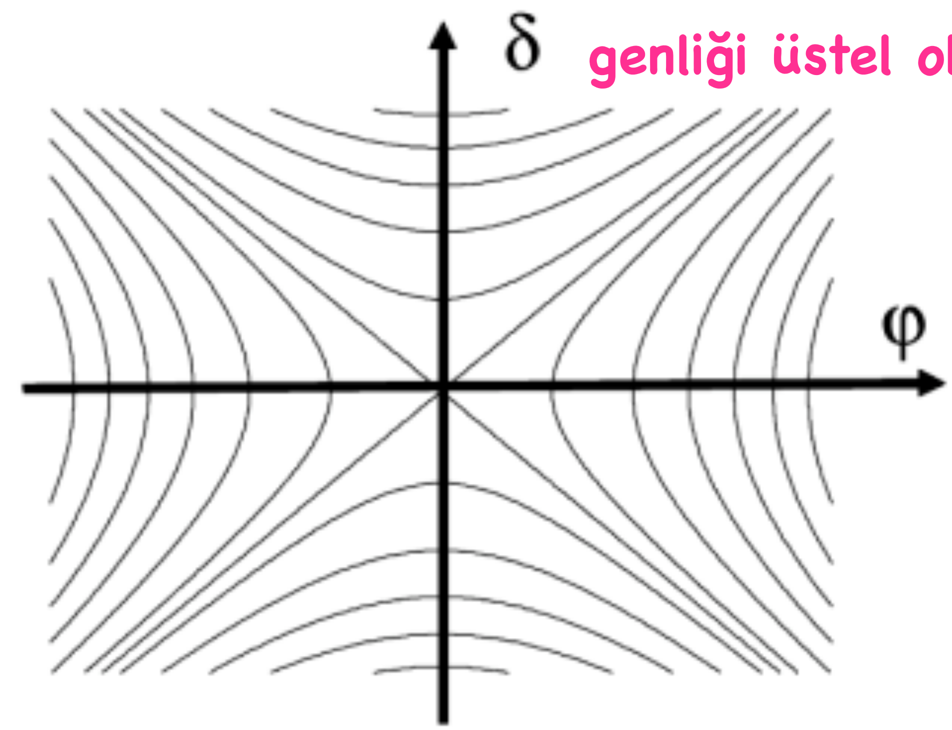
- Burada synchrotron frekansının gerçek değerleri (kararlı) için pozitif işaret, sanal değerleri (kararsız) içinse negatif işaret kullanılmaktadır.



Evre uzayında **kararlı** synchrotron salınımları

$$\Omega^2 > 0$$

Kararsız durumda salınım genliği üstel olarak büyür.



Evre uzayında **kararsız** synchrotron salınımları

$$\Omega^2 < 0$$

İçerik

Kaynak: "Particle Accelerator Physics". Helmut Wiedemann, Bölüm 6

Evre Kararlılığı

- Evre salınımlarının kararlı olabilmesi için aşağıdaki synchrotron frekansı eşitliğinin sağ tarafının pozitif olması gerekir.
- Zaten, momentum sıkıştırma parametresi ve eşzamanlı fazın kosinüsü dışındaki parametreler pozitif olarak tanımlanmış parametrelerdir.

$$\Omega^2 = \frac{c k_h \eta_c}{c p_0 T_0} e\hat{V}_0 cos\Psi_s$$

- Momentum sıkıştırmasının aşağıdaki gibi ifade edilim.

$$\eta_c = \gamma^{-2} - \alpha_c$$

- Momentum sıkıştırması düşük enerjilerde pozitif iken yüksek enerjilerde negatif olur. MS'in işaret değiştirdiği enerjiye ise **geçiş enerjisi** (transition energy) denir.

$$\gamma^{-2} > \alpha_c \qquad \eta_c > 0$$

- **Evre salınımlarının kararlı**

$$\gamma^{-2} < \alpha_c \qquad \eta_c < 0$$

- **Evre salınımlarının kararsız**

$$\gamma_{tr} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c}}$$

- **geçiş enerjisi**

$$\gamma_{tr} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c}}$$ geçiş enerjisi

elektronlar için ~ MeVs

protonlar için ~ GeVs

$$\gamma < \gamma_{tr} \rightarrow 0 < \Psi < \pi/2$$

$$\gamma > \gamma_{tr} \rightarrow \pi/2 < \Psi < \pi$$

- Dairesel hızlandırıcılarda:
  - Elektronlar için püskürtme (?) (injection) enerjisi herzaman geçiş enerjisinin oldukça üstünde olur. Bu yüzden de geçiş enerjisi eşiğinin atlanması yüzünden bir kararsızlık problemi yaşanmaz.
  - Protonları ~10 GeV'nin üzerine çıkartmanın ederi yüksektir. Bu yüzden protonları ve iyonları henüz eşiği atlamadan püskürtmek zorunda kalırız. Bu durumda, geçiş eşiği atlandığında RF evresi çabucak değiştirilmelidir.
  - RF evresinin aniden değişmesinden kaynaklanacak bu teknik zorluk, kısa bir süreliğine de olsa atmalı dört kutuplular kullanılarak iyileştirilebilir. Atmalı magnetler dağılım (dispersion) fonksiyonunu perturbe ederek kısa süre için de olsa momentum sıkıştırma faktörünü küçültebilirler.
  - RF evresi parçacık enerjisinin geçiş enerjisinin altında ya da üstünde oluşuna göre seçilir. Kararlı bir evre dinamiği için yukarıdaki eşzamanlılık evresi üzerine koşullar unutulmamalıdır.

İçerik

Kaynak: "Particle Accelerator Physics". Helmut Wiedemann, Bölüm 6

Geniş Salınım Genlikleri

- Geniş salınım genlikleri için hesaplarımızda $sin(\theta) \approx \theta$ yaklaşımını yapamayacağımız için hesaplarımız öncekilerden farklı olacaktır.
- Parçacıkların boyuna salınımları mekanik bir sarkaçla özdeştir. Hareket denklemi aşağıdaki gibi yazılan Hamiltonian'dan türetilebilir.

$$H = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \Omega^2 cos(\varphi) \qquad \ddot{\theta} = -\Omega^2 sin(\varphi)$$

- Sarkaç benzetmesinin bir sonucu olarak Poincaré integralinin değişmezliğinin geçerliliğini bekleriz.

$$J_1 = \int_z d\dot{\varphi} d\varphi = sabit$$

- Synchrotron salınımları sırasında parçacık hareketleri bir dizi kanonik dönüşüm* ile açıklanabilir. Bu yüzden $(\varphi, \dot{\varphi})$ uzayında parçacık yoğunluğunu bir hareket değişmezi olarak alabiliriz.
- Enine harekette olduğu gibi boyuna harekette de yayınım (emittance) tanımlayabiliriz. "Evre uzayında demetin kapladığı alan."

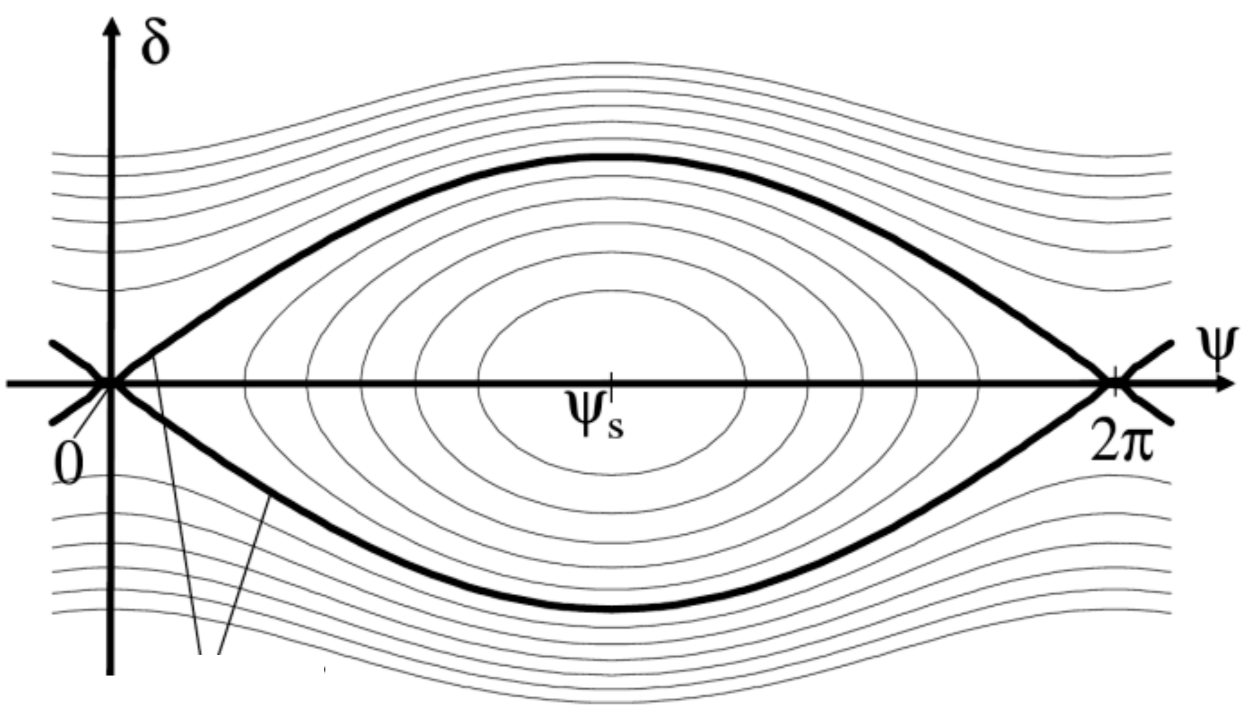
*Goldstein, Klasik Mekanik

Geniş Salınım Genlikleri

- Tartışma konusu olan fizik ile ilgili olarak farklı kanonik değişkenler tanımlanabilir ya da vurgulanması gerekebilir. Benzer şekilde, genellikle $\dot{\varphi}$ yerine parçacığın momentumunu kullanmayı uygun buluruz. Aşağıdaki ilişkiyi hatırlayalım:

$$\dot{\psi} = -\beta c k_h (\gamma^{-2} - \alpha_c) \frac{\Delta cp}{cp_o}$$

- Farklı parçacıkların gezingeleri, sistem Hamiltonian'ının farklı parçacık enerjileri için çözümlerinden türetilebilir. Harmonik salınıcıdan da bildiğimiz bu tür gezingeler aşağıda görülmektedir.

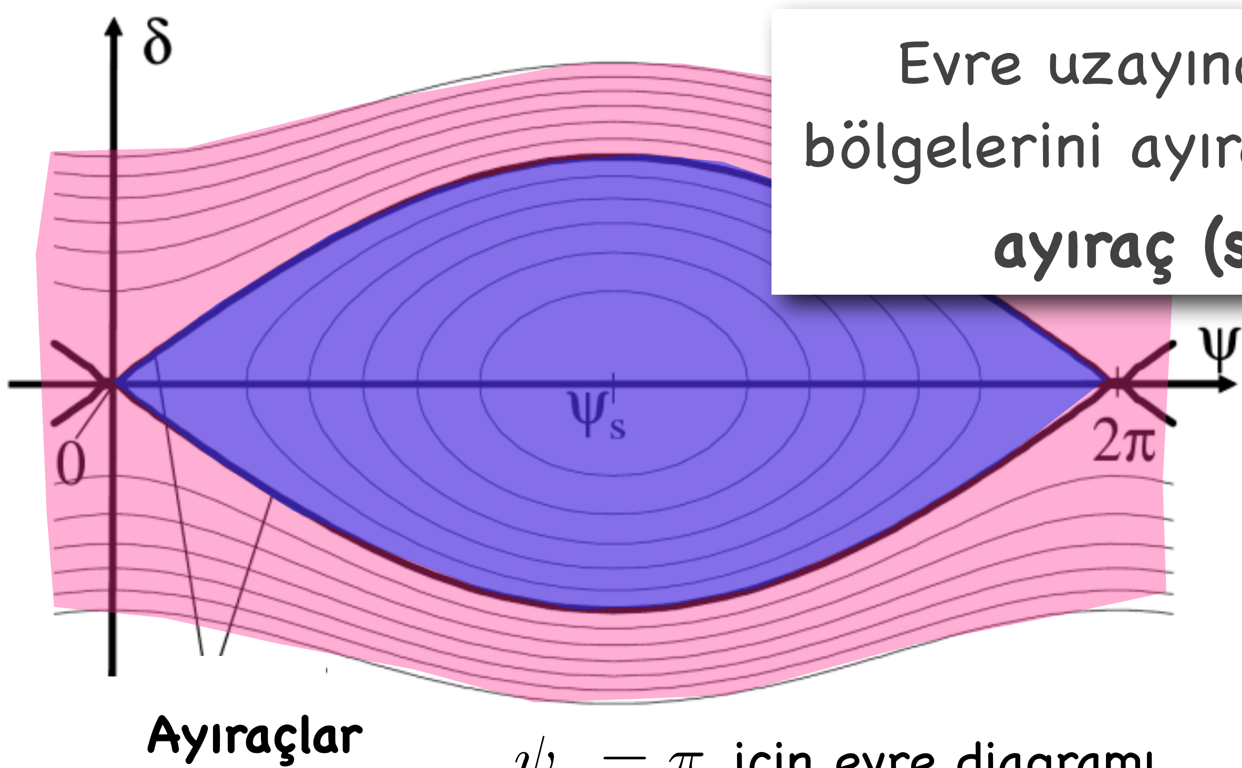


Ayıraçlar

$\psi_s = \pi$ için evre diagramı

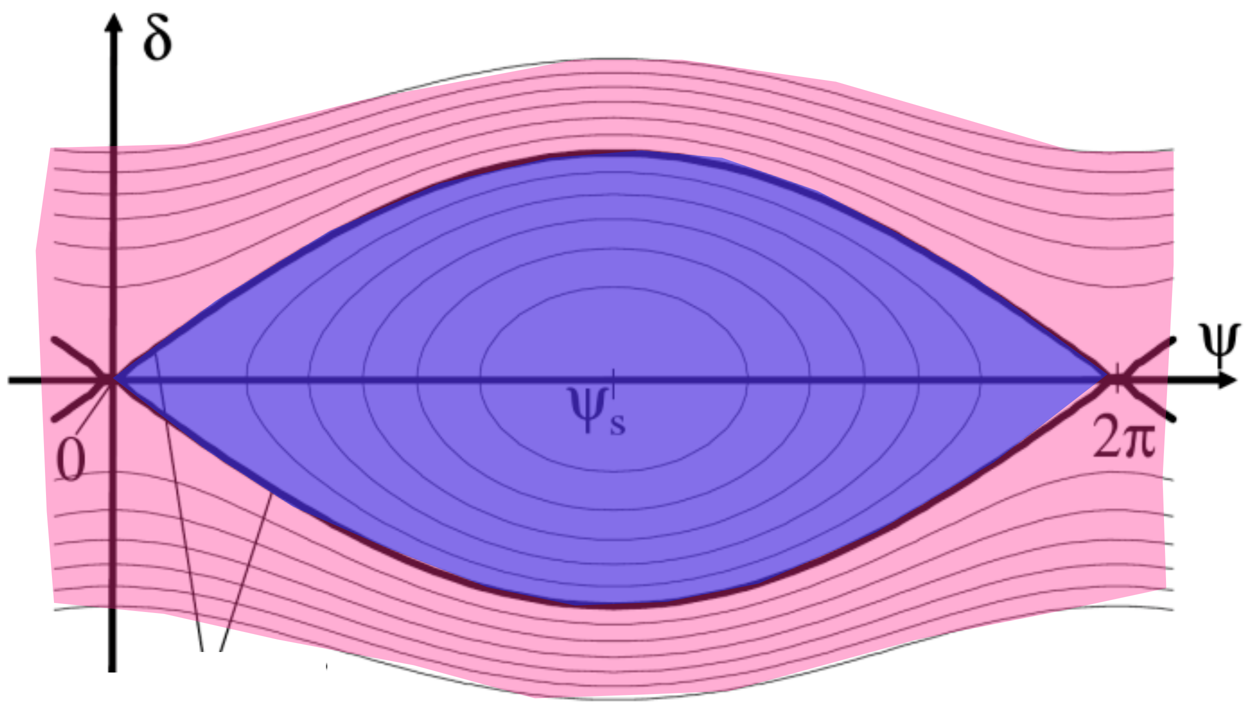
Geniş Salınım Genlikleri

- Evre uzayındaki parçacık gezingelerini iki ayrı türe ayırabiliriz.
  - Birincisi, yatay eksen üzerinde 2π aralıklarla yerleşmiş denge noktaları çevresinde tamamen bölgesel salınımları tanımlar.
  - İkincisi, evre uzayında herhangi bir bölge ile sınırlı olmayan, salınımdan (oscillation) çok bir dönme (libration) hareketi tanımlar.
- Bu olgu, mekanik sarkaçtaki olası iki duruma karşı gelir.
  - Küçük salınım genliklerinde sarkaç bir denge noktası çevresinde periyodik hareket yapar.
  - Bununla birlikte büyük genlikler söz konusu ise, salınım hareketi, sarkaç tepeye kadar ulaşıp devam ettiğinde dönmeye hareketine dönüşür.



Evre uzayında, dönme ve salınım bölgelerini ayıran varsayımsal çizgilere **ayıraç (seperatrix)** denir.

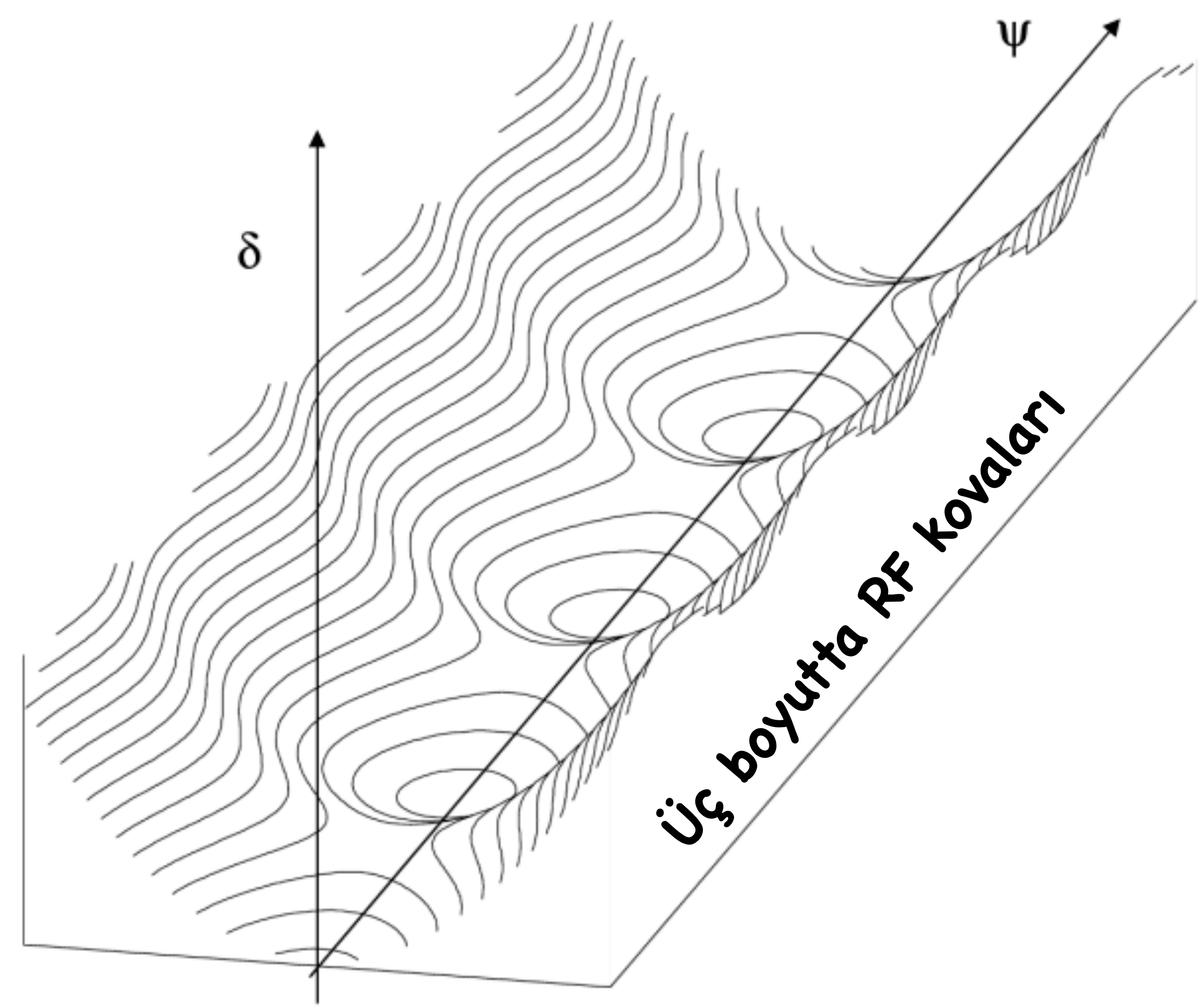
$\psi_s = \pi$ için evre diagramı



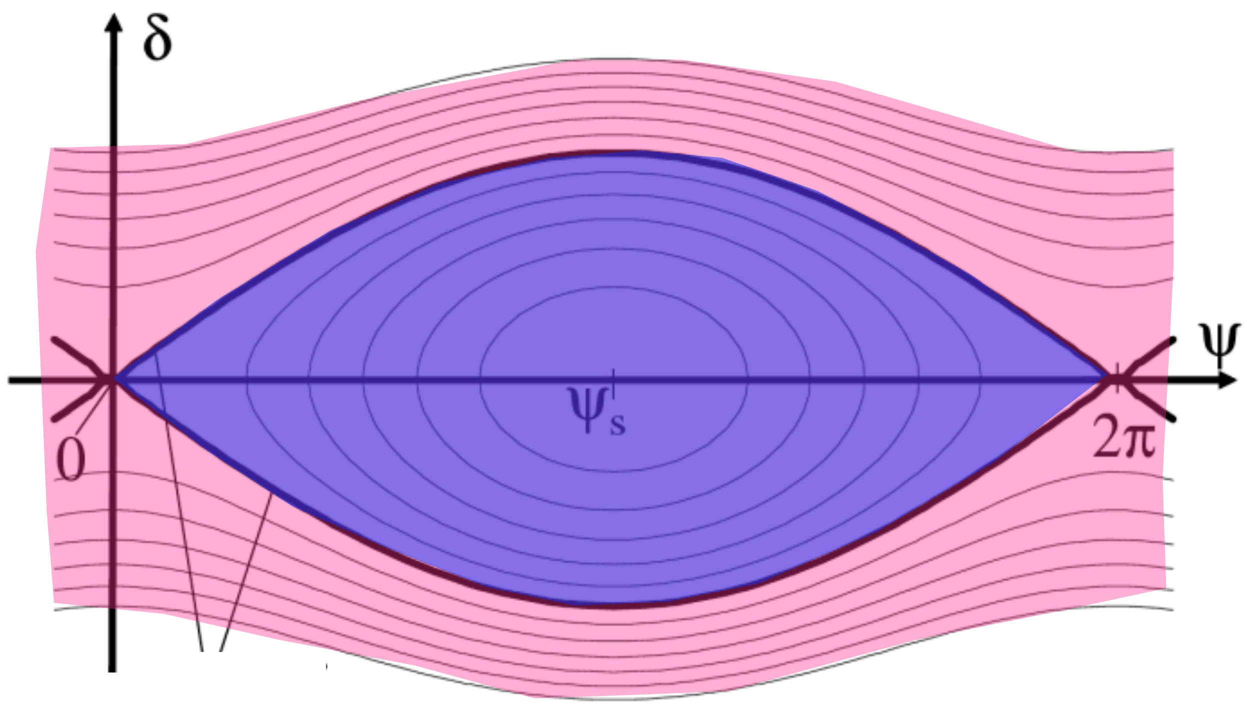
Ayıraçlar $\psi_s = \pi$ için evre diagramı

Evre uzayında, dönme ve salınım bölgelerini ayıran varsayımsal çizgilere **ayıraç (seperatrix)** denir.

- Ayıraçlar içindeki parçacık hareketi **kararlıdır**.
- Bu gösterimde Hamiltonian'in kosinüslü terimi potansiyel kuyusunun **odaklama özelliğini** göstermektedir.
- Bu ayıraçlarla belirlenmiş **"kararlılık adalarına" "RF kovası" (RF bucket)** da denir.



Geniş Salınım Genlikleri



Ayıraçlar $\psi_s = \pi$ için evre diagramı

Bu ayıraçlarla belirlenmiş **"kararlılık adalarına"** durgun **"RF kovası" (RF bucket)** da denir.

- Kararlı evre adalarının içinde parçacıkların evre hareketleri salınımsal olduğundan ortalama enerji kazanımı sıfırdır.

$$V(\psi_s+\varphi) = \hat{V}_0(sin\psi_s cos\varphi + sin\varphi cos\psi_s)$$

$\psi_s = \pi$ **ise**

$$V(\psi_s+\varphi) = \hat{V}_0 sin\varphi$$

$$<\varphi>=0$$

salınımsal evre değerlerinin ortalaması sıfırdır.

İçerik

- Parçacıkların boyuna hareketi
- Boyuna evre uzayı dinamiği
- Evre uzayında hareket denklemi
- Küçük salınım genlikleri
- Evre kararlılığı
- Geniş salınım genlikleri
- **Yüklü parçacıkların hızlandırılması (daha doğru olarak; ivmelendirilmesi)**
- Boyuna evre uzayı parametreleri
  - Ayıraç (seperatrix) parametreleri
  - Momentum kabulü
  - Bohça uzunluğu
  - Boyuna demet yayınımı
  - Evre uzayı denkleştirme
- Yüksek dereceden evre odaklama

Kaynak: "Particle Accelerator Physics". Helmut Wiedemann, Bölüm 6

- Şimdiye kadar rastgele bir şekilde eşzamanlı evre için ψs=0 ya da π varsayımı yapıldı.
- Sonuç olarak durgun veya hızlandırmayan RF kovalarını (adalarını) elde ettik.
- Bu durumda hızlandırma olmadı çünkü parçacıklar kaviteleri RF alan sıfır iken geçtiler.
- Parçacıkların hızlanması istenildiğinde, sonlu sıfırdan farklı bir eşzamanlı evre seçilir.

Sıfırdan farklı bir eşzamanlı evre ile enerji kazanımı bu biçimi alır.

$$\Delta E = V(\phi_s) = \hat{V}_0 sin\phi_s$$

Buna göre daha genel bir evre denklemi bu şekilde yazılır.

$$\ddot{\varphi} + \frac{\Omega^2}{cos\psi_s}[sin(\psi_s + \varphi) - sin\psi_s] = 0$$

Trigonometrik terimleri düzenlersek:

$$\ddot{\varphi} + \frac{\Omega^2}{cos\psi_s}[sin\psi_s cos\varphi + sin\varphi cos\psi_s - sin\psi_s] = 0$$

Bu denklem aşağıdaki Hamiltonian'dan da türetilebilirdi.

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{\Omega^2}{cos\psi_s}(cos(\psi_s + \varphi) - cos\psi_s + \varphi sin\psi_s) = H$$

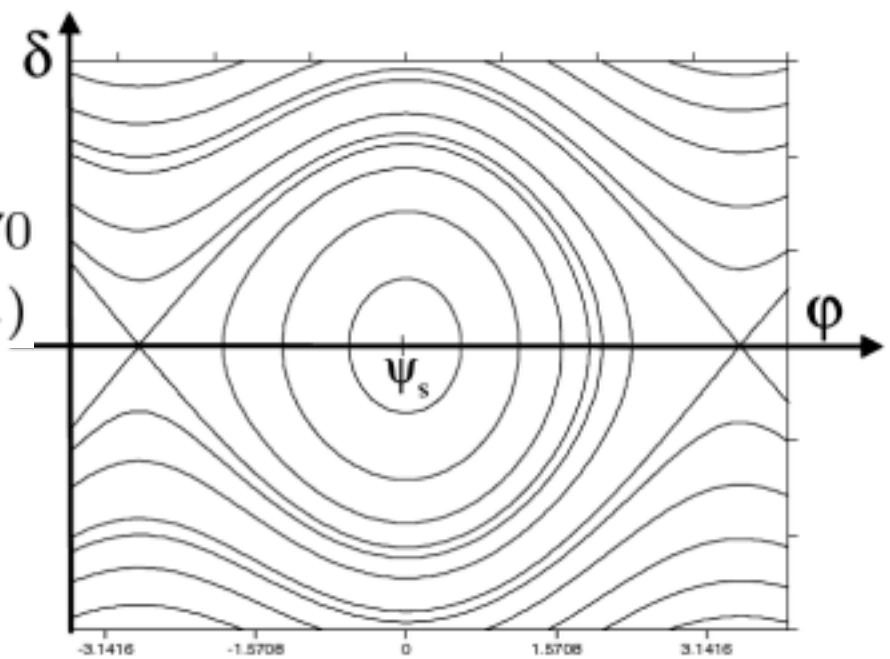
Evre uzayı gezingeleri ya da diagramları bu durumda farklı bir biçim alacaktır.

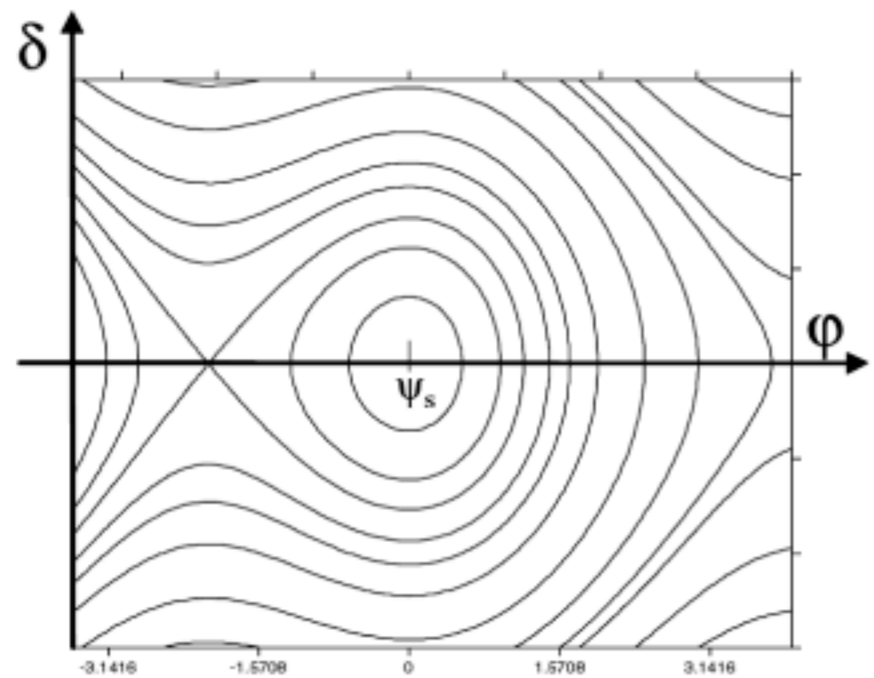
Evre uzayındaki gezingeler aşağıdaki Hamiltonian'dan da türetilebilir.

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{\Omega^2}{cos\psi_s}(cos(\psi_s + \varphi) - cos\psi_s + \varphi sin\psi_s) = H$$

Evre uzayı gezingeleri ya da diagramları bu durumda farklı bir biçim alacaktır.

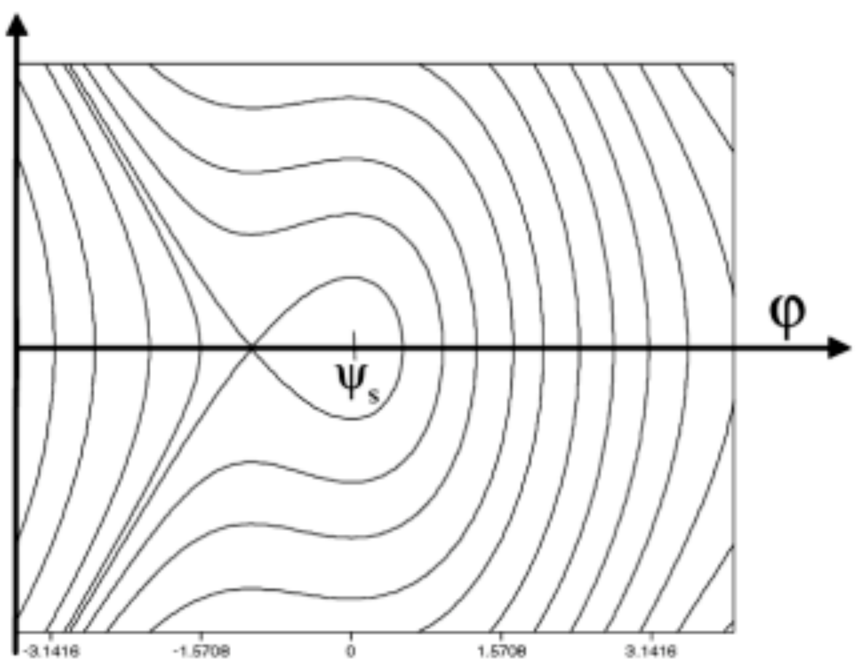
$\psi_s = 170$
$(\gamma > \gamma_{tr})$





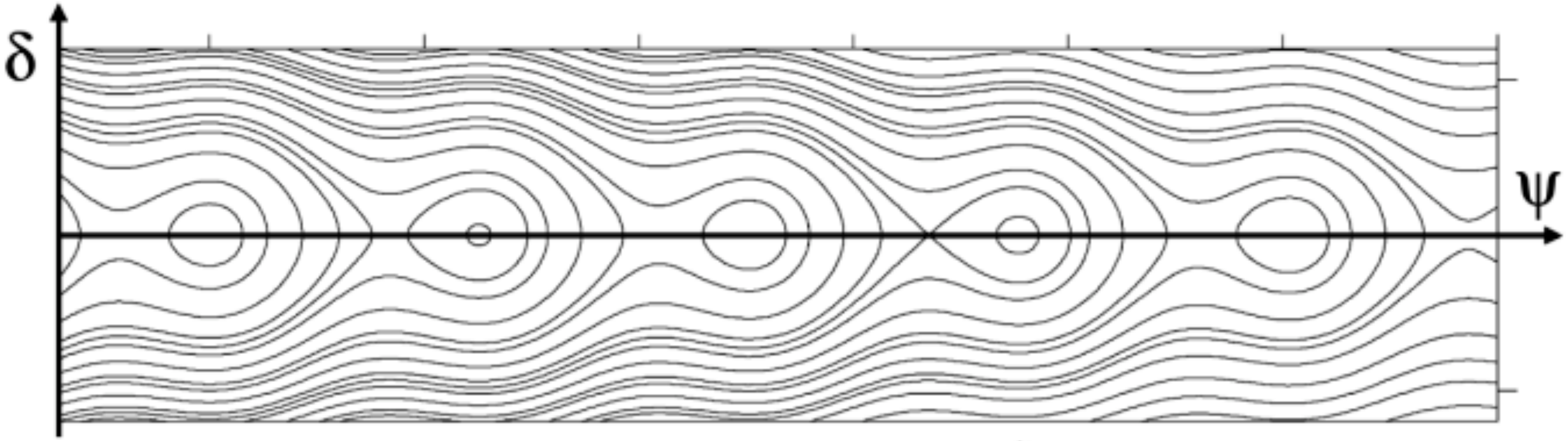
$5\pi/6$
$(\gamma > \gamma_{tr})$

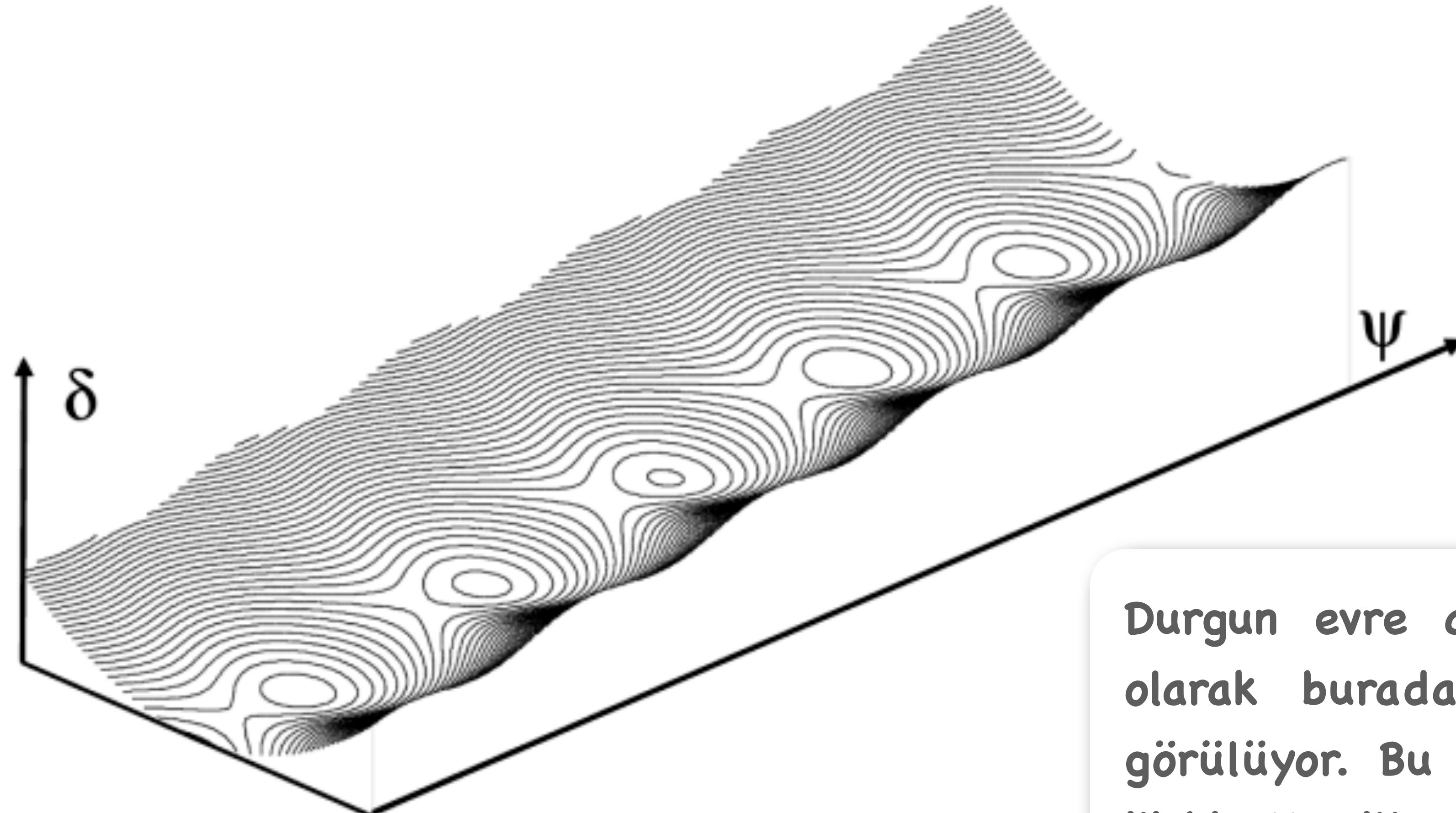
$2\pi/3$
$(\gamma > \gamma_{tr})$



Kararlı evre adalarının dışında kalan parçacıklar kararsız gezingeler izlerler bu da momentum sıkıştırmanın işaretine göre sürekli bir enerji kazanımı ya da kaybına sebep olur. Bu resimlerde farklı eşzamanlı fazlar için evre uzayı haritaları görülmektedir.

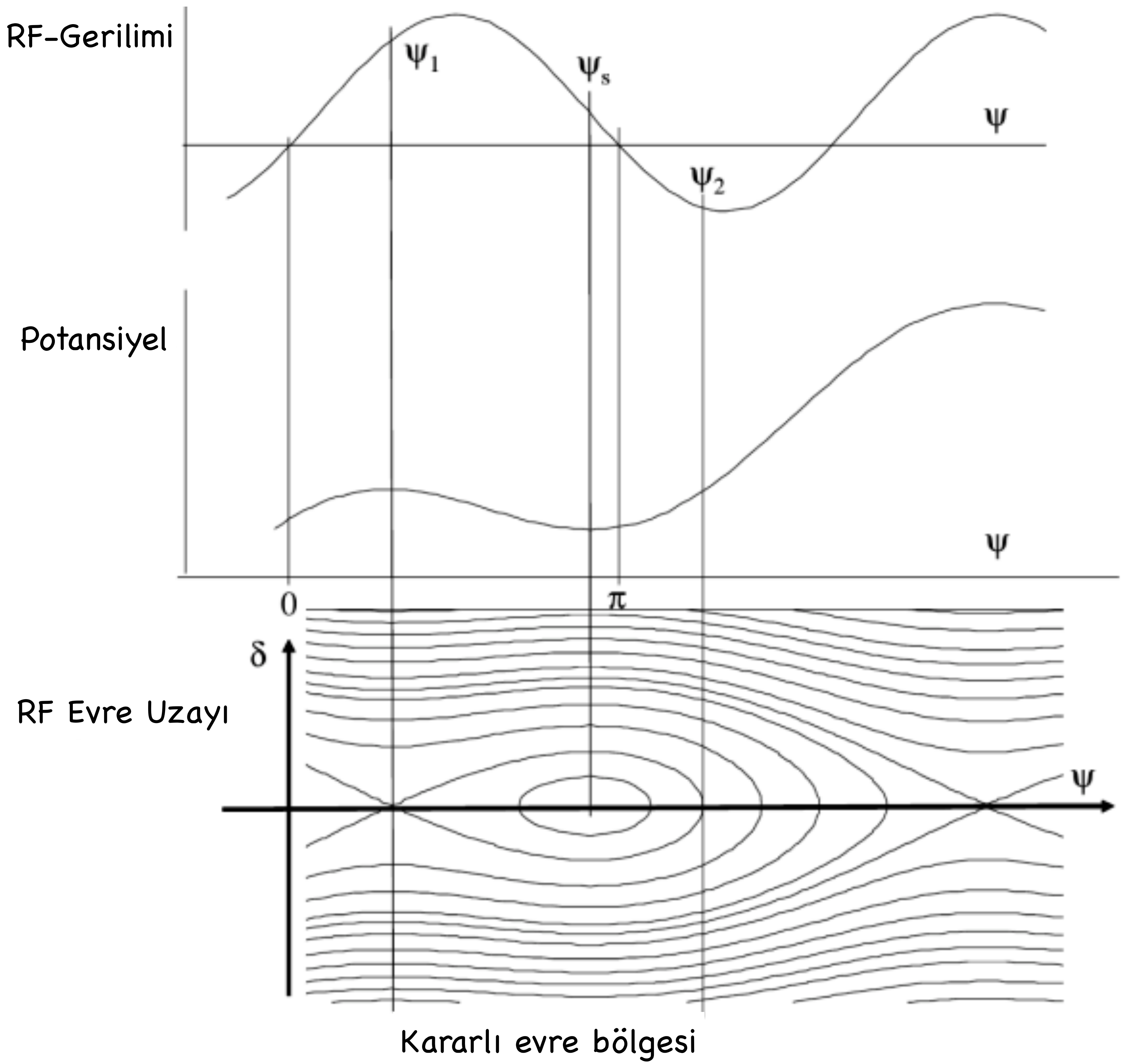
$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{\Omega^2}{cos\psi_s}(cos(\psi_s + \varphi) - cos\psi_s + \varphi sin\psi_s) = H$$

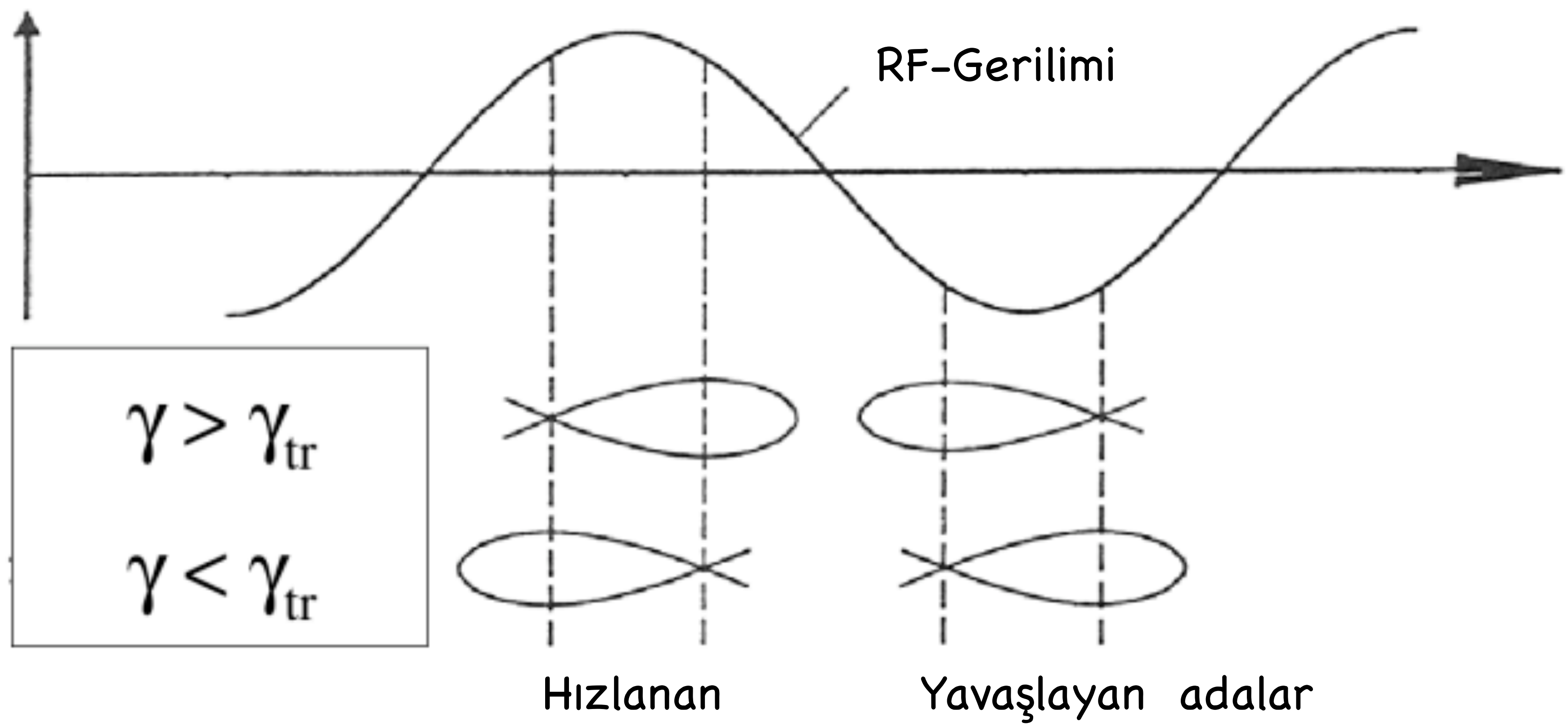




Durgun evre adaları için Hamiltonian'dan farklı olarak burada φ'e göre doğrusal bir terim görülüyor. Bu terimden dolayı ilerleyen adalara ilişkin Hamiltonian için gösterilen evre uzayındaki potansiyel kuyuları eğrilmiştir.

Bu ada hızlanıyor mu yavaşlıyor mu?





Bundan sonraki sayfalarda boyuna evre uzayı parametrelerini inceleyeceğiz.

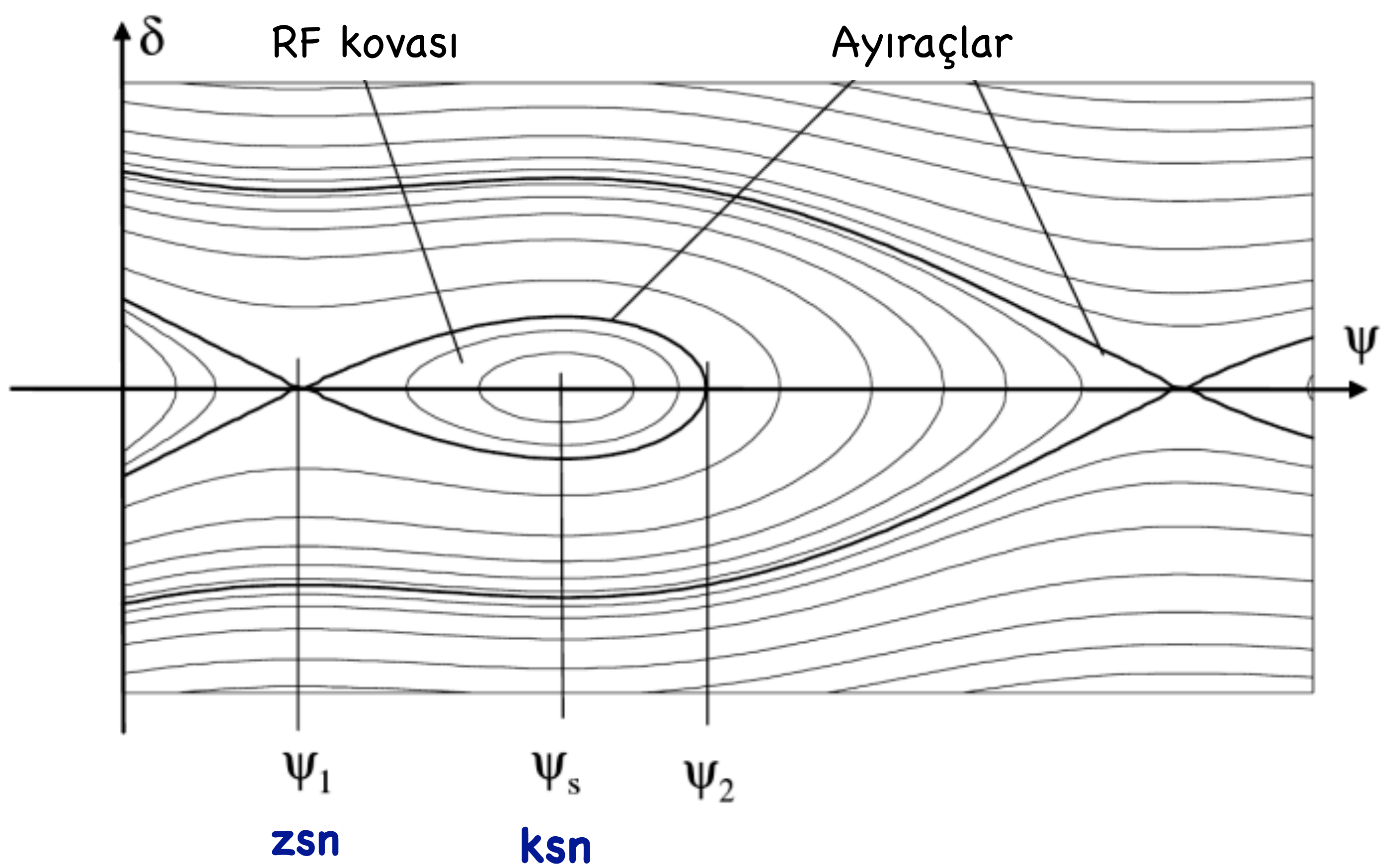
Boyuna kararlılık sınırı ile ilgili ifadeleri türetip, bulgularımızı bir adanın momentum kabulünü bulmak için kullanacağız.

- Parçacıkların boyuna hareketi
- Boyuna evre uzayı dinamiği
- Evre uzayında hareket denklemi
- Küçük salınım genlikleri
- Evre kararlılığı
- Geniş salınım genlikleri
- Yüklü parçacıkların hızlandırılması (daha doğru olarak; ivmelendirilmesi)
- **Boyuna evre uzayı parametreleri**
  - Ayıraç (seperatrix) parametreleri
  - Momentum kabulü
  - Bohça uzunluğu
  - Boyuna demet yayınımı
  - Evre uzayı denkleştirme
- Yüksek dereceden evre odaklama

Kaynak: "Particle Accelerator Physics". Helmut Wiedemann, Bölüm 6

Ayıraç (seperatrix) parametreleri

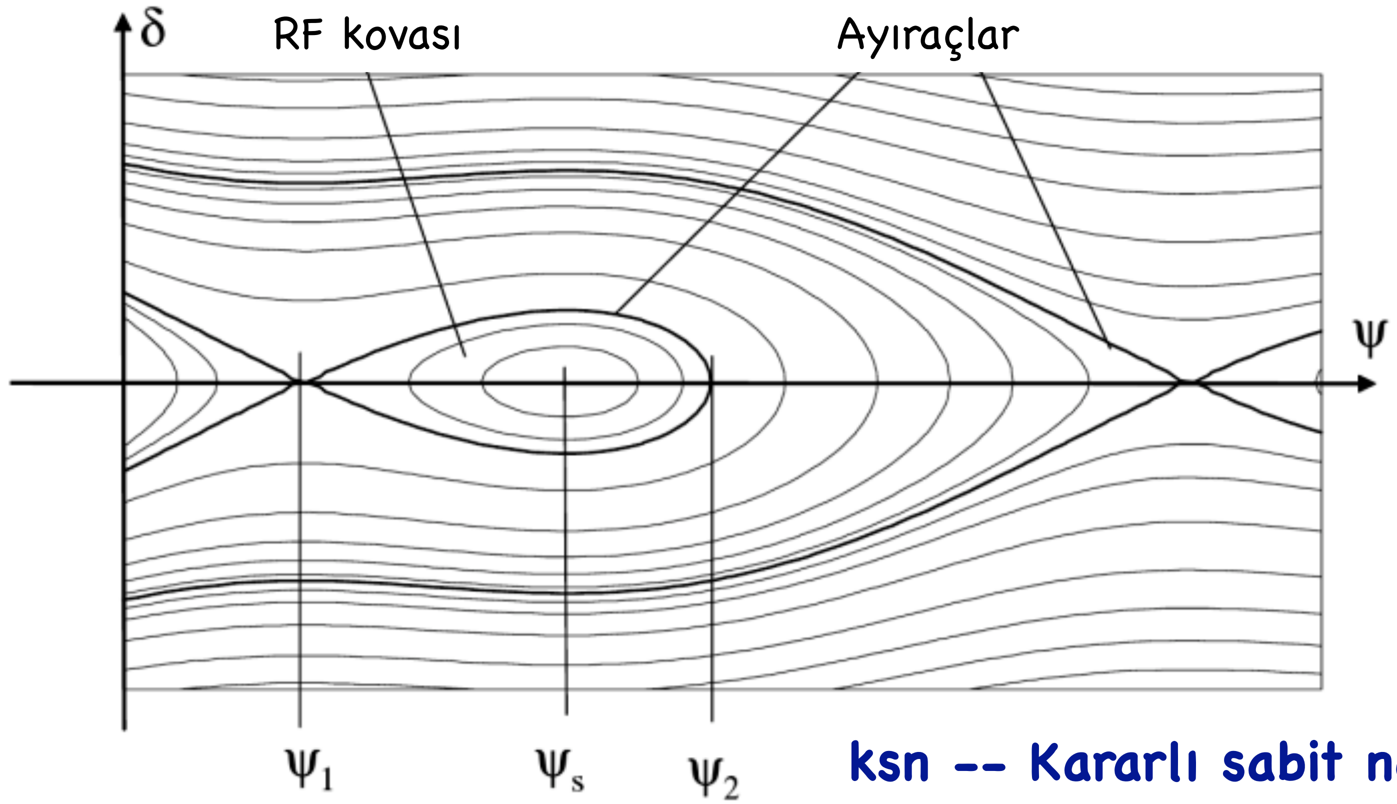
- Şu ana kadar parçacıkların evre uzayındaki dinamiğini inceledik.
- Kararlı ve kararsız evre bölgelerini ve bu bölgeleri birbirinden ayıran özel gezingeleri, **"ayıraçları"**, tanımladık.
- Kararlı evre bölgelerindeki parçacık gezingelerinin bir eşzamanlı evre ve ideal momentum çevresinde salınım hareketi yaptığını öğrendik.
- Kararsız evre bölgelerinde ise parçacıkların eşzamanlı evreden ve ideal momentumdan sapmalarına yol açan gezingeler izlediklerini öğrendik.
- **Bundan sonra ise, evre uzayında hareketin önemli özelliklerini ve parametrelerini araştıracağız.**
- **Bu parametreleri kullanarak kararlılık ölçütlerini bulacağız.**



ksn -- Kararlı sabit nokta

zsn -- Kararsız sabit nokta

Ayıraç (seperatrix) parametreleri



zsn ksn

ksn -- Kararlı sabit nokta

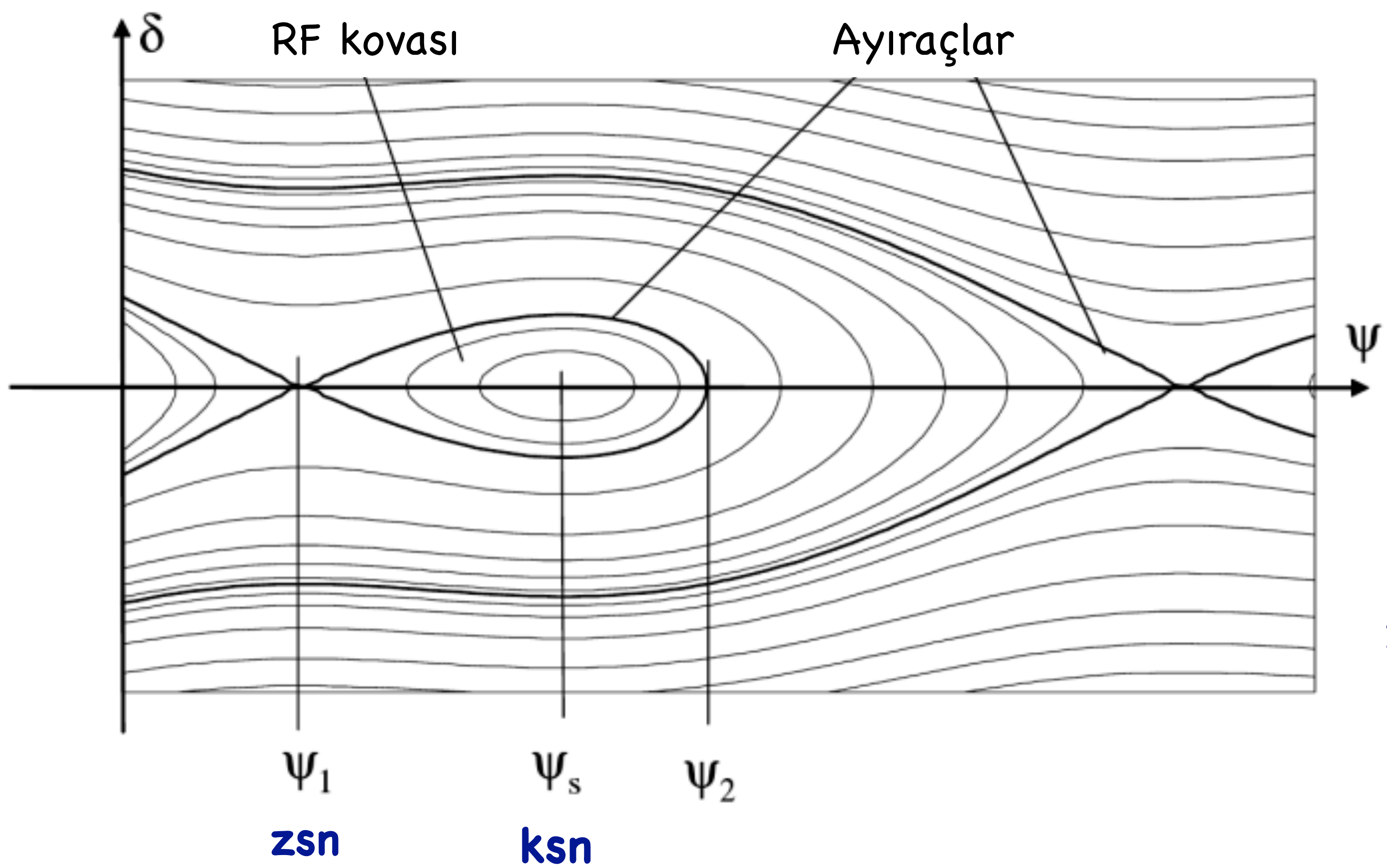
zsn -- Kararsız sabit nokta

- Evre uzayındaki odak noktasına "kararlı sabit nokta (ksn)" diyeceğiz.
- İki ayıraç çizgisinin kesiştiği noktalara ise "kararsız sabit nokta (zsn)" diyeceğiz.
- Sabit noktaların konumlarını aşağıdaki iki koşulu kullanarak bulalım:

Sabit noktalar için koşullar: $\frac{\partial H}{\partial \dot{\psi}} = 0 \qquad \frac{\partial H}{\partial \psi} = 0$

Evre uzayında hareket için genel Hamiltonian: $H = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{\Omega^2}{cos\psi_s}(cos(\psi_s + \varphi) - cos\psi_s + \varphi sin\psi_s)$

Ayıraç (seperatrix) parametreleri

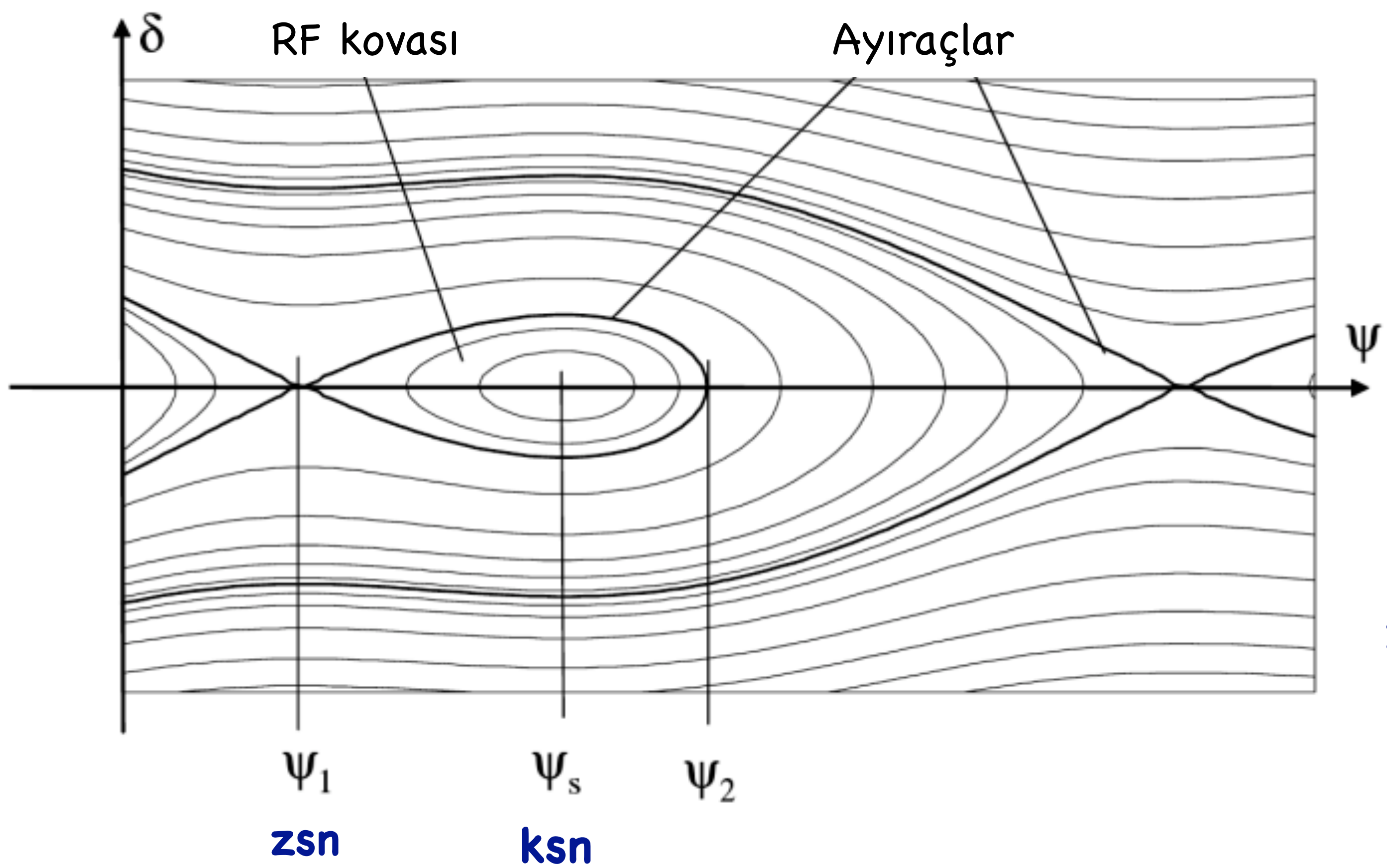


ksn, Kararlı sabit nokta
zsn, Kararsız sabit nokta

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{\psi}} = 0 \longrightarrow \dot{\psi}_{sn} = 0$$

- Evre uzayındaki sabit noktalara ilişkin birinci koşulun sonucuna göre, **evre uzayında tüm sabit noktalar ψ ekseninde bulunmaktadır.**

Ayıraç (seperatrix) parametreleri



ksn, Kararlı sabit nokta

zsn, Kararsız sabit nokta

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{\Omega^2}{cos\psi_s}(sin(\psi_s + \varphi) - sin\psi_s) = 0 \qquad sin(\psi_s + \varphi) - sin\psi_s = 0 \qquad sin\psi_{sn} - sin\psi_s = 0$$

$$(\psi_{ksn}, \dot{\psi}_{ksn}) = (\psi_s, 0)$$

$$(\psi_{zsn}, \dot{\psi}_{zsn}) = (\pi - \psi_s, 0)$$

- Kararlı ve kararsız noktalar arasındaki ayırım bu noktalarda sırasıyla, birer potansiyel minimum ve maksimumun varlığı ile yapılır.
- 44. sayfada, kararlı noktanın potansiyel minimumunda, kararsız noktanın ise potensiyelin sırt noktasında olduğunu hatırlayalım.
- Maksimum kararlı evre uzanımı ya da bohça uzunluğu (bunch length) ayıraç ve iki sınır noktası ψ_1 ve ψ_2 ile sınırlıdır.

Momentum Kabulü

- Parçacıklar ayıraçların içindeki gezingelerde synchrotron salınımı yaparken ideal evre ve momentumdan sapmalarının ulaştığı maksimum noktalar vardır.
- Böylece, bir parçacığın kararlı synchrotron salınımlarını bozmadan yapabileceği maksimum evre ve momentum sapması ayıraçların önemli bir özelliği olarak ortaya çıkar.
- Parçacıkların evre uzayının kararlı bölgesinde ulaşacağı maksimum momentum sapmasına **"momentum kabulü"** denir.

$$\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2\Bigg|_{maks,durgun} = \frac{2eV_0}{\pi h|\eta_c|cp_0}$$

$$\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2\Bigg|_{maks,ilerleyen} = \frac{F(q)}{2q}\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2\Bigg|_{maks,durgun}$$

$$F(q) = 2\left(\sqrt{q^2-1} - arccos\frac{1}{q}\right)$$

$$q = \frac{eV_0}{U_0} = \frac{1}{sin\psi_s}$$

$$\frac{\Delta E}{\omega_{rf}}\Bigg|_{maks,durgun} = \sqrt{\frac{2eV_0E_0\beta}{\pi h|\eta_c|\omega_{rf}^2}} \quad [eVs]$$

- Evre uzayını tanımlamak için, geleneksel olarak sıklıkla, enerji sapması da kullanılır.

Momentum Kabulü

- Görüldüğü gibi momentum kabulü çeşitli örgü ve RF parametrelerine bağlıdır.
- RF geriliminin karekökü ile orantılıdır.
- Güçlü odaklama momentum sıkıştırma parametresini küçültecek, dolayısıyla momentum kabulünü artıracaktır.
- Bunun yanında çok yüksek RF frekanslı hızlandırma sistemlerinde momentum kabulünün oldukça küçük olacağı görülmektedir. Buna karşı bu tür sistemler tekenerjili (monoenergetic) demetler için daha uygun olacaktır.

$$\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2\Bigg|_{maks,durgun} = \frac{2eV_0}{\pi h|\eta_c|cp_0}$$

$$\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2\Bigg|_{maks,ilerleyen} = \frac{F(q)}{2q}\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2\Bigg|_{maks,durgun}$$

$$F(q) = 2\left(\sqrt{q^2-1} - arccos\frac{1}{q}\right)$$

$$q = \frac{eV_0}{U_0} = \frac{1}{sin\psi_s}$$

$$\frac{\Delta E}{\omega_{rf}}\Bigg|_{maks,durgun} = \sqrt{\frac{2eV_0E_0\beta}{\pi h|\eta_c|\omega_{rf}^2}} \quad [eVs]$$

- Evre uzayını tanımlamak için, geleneksel olarak sıklıkla, enerji sapması da kullanılır.

Bohça Uzunluğu

- Bir demetin tüm parçacıkları ortak bir nokta civarında bağdaşmaz (incoherent) salınımlar yaparlar ve buna göre boyuna sabit parçacık dağılımları görünümünü sergilerler.
- İşte bu boyuna parçacık dağılımlarına "bohça" (bunch) diyoruz.
- Bir bohçanın toplam uzunluğu parçacıkların bohçanın merkezinden olan maksimum uzanımlarının iki katı olarak tanımlanır:

$$\frac{\ell}{2} = \pm \frac{c}{h\omega_{rev}} \hat{\varphi} = \pm \frac{\lambda_{rf}}{2\pi} \hat{\varphi}$$

maksimum evre sapması

- **Dairesel e- hızlandırıcılarında,** genellikle, RF parametreleri demet çekirdeğinden (1σ) çok daha büyük (>5σ) bir RF kova üretilecek şekilde seçilir.
- Sebep: İstatistiksel olarak yayımlanan synchrotron ışınımı parçacıkların evre uzayında Gaussian olarak dağılmalarına sebep olur. Dolayısıyla RF kabulü, kararlı bölgenin bu dağılımın uçlarına kadar genişleyebilmesini sağlayacak şekilde ayarlanır.
- Buna rağmen, demetin özellikleri belirlenirken, demetin çekirdeği ile ilgilenilir.
- Böylece bohça uzunluğu veya enerji sapması durumlarında sadece küçük salınım genliklerini göz önünde tutarız.

Bohça Uzunluğu

- Böylece bohça uzunluğu veya enerji sapması durumlarında sadece küçük salınım genliklerini göz önünde tutarız.

$$\frac{\ell}{2} = \pm\frac{c}{h\omega_{rev}}\hat{\varphi} = \pm\frac{\lambda_{rf}}{2\pi}\hat{\varphi}$$

maksimum evre sapması

$$\hat{\delta} = \frac{\Omega}{h\omega_{rev}\eta_c}\hat{\varphi} \qquad \Omega^2 = \omega_{rev}^2\frac{h\eta_c e\hat{V}_0 cos\psi_s}{2\pi\beta c p_0}$$

hatırlayalım

$$\frac{\ell}{2} = \frac{c|\eta_c|}{\Omega}\left.\frac{\Delta p}{p_0}\right|_{maks}$$

$$\frac{\ell}{2} = \frac{c\sqrt{2\pi}}{\omega_{rev}}\sqrt{\frac{\eta_c c p_0}{he\hat{V}cos\psi_s}}\left.\frac{\Delta p}{p_0}\right|_{maks}$$

- **Dairesel elektron hızlandırıcılarında bohça uzunluğu çeşitli RF ve örgü parametrelerine bağlıdır.**

Bohça Uzunluğu

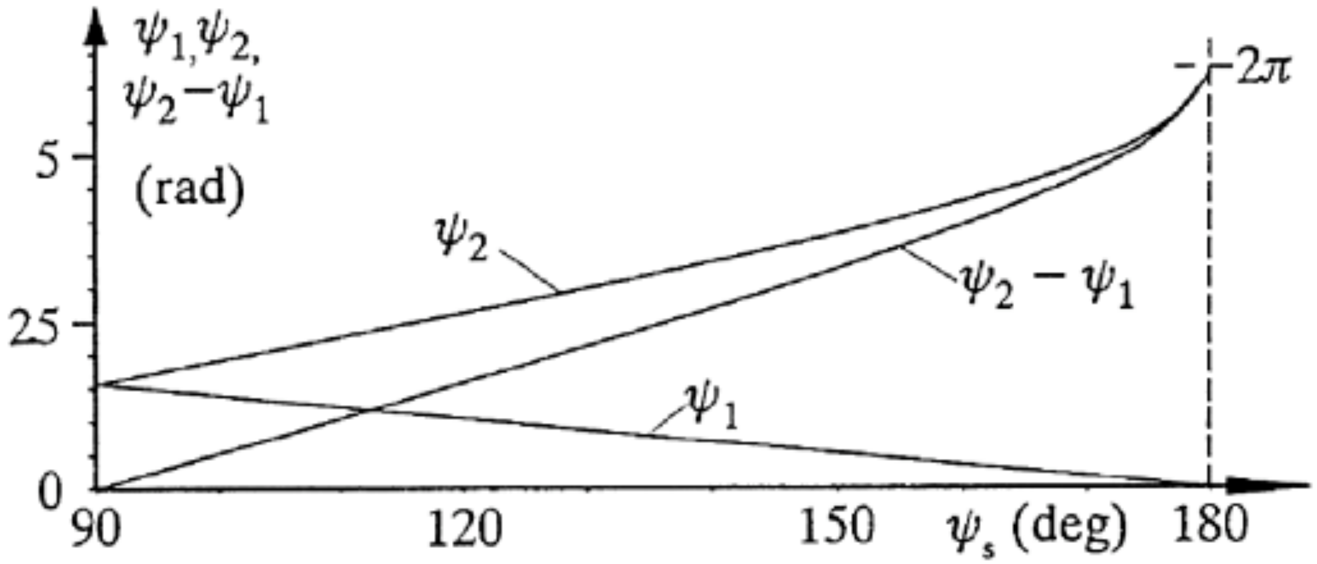
- **Dairesel proton ya da iyon hızlandırıcılarında,** evre uzayındaki Gaussian uç noktalarının korunması ile ilgilenmek zorunda değiliz.
- Böylece tüm RF kovasını demetle doldurabiliriz.
- Bu durumda bohça uzunluğu ayıracın evre eksenindeki uç noktalar olan ψ_1 ψ_2 ile sınırlı olacaktır.

$$\frac{\ell}{2} = \frac{\lambda_{rf}}{2\pi}\left(\psi_2 - \psi_1\right)$$

- Evre uzayı dinamiğinin Hamiltonian'inde ayıraçların potansiyeli ifadesini yerine yazdığımızda, $\dot{\varphi} = 0$ için aşağıdaki denklem bulunur.

$$cos\psi_{1,2} + \psi_{1,2} sin\psi_s = (\pi - \psi_s) sin\psi_s - cos\psi_s$$

- Bu denklemin 2π'nin modları olarak iki çözümü vardır. Bunlardan birisi ψ_1 diğeri ise ψ_2'dir.



- **İlerleyen RF kovalarının uzanımını belirleyen maksimum evre değerleri.**

Boyuna yayınım (emittance)

- Ayıraçlar, evre uzayındaki kararlı ve kararsız bölgeleri ayırdederler.
- Evre uzayındaki kararlı bölgenin alanına, enine dinamikle benzer şekilde, **boyuna yayınım** denir.
- Yayınımı aşağıdaki integrali hesaplayarak buluruz. Burada p ve q synchrotron hareketini anlatan eşlenik (conjugate) değişkenlerdir.

$$\oint pdq$$

- Burada yine, enine dinamiğe benzer şekilde, demet yayınımı ve kabulünü tanımlayabiliriz.
- Demet kabulü, bir demetin hızlandırıcı bileşenleri ya da iletim hattından geçmesine izin verecek şekilde sahip olacağı en yüksek yayınım değeridir.
- Boyuna evre uzayında, demet kabulü ayıraçın alanına denir.

Boyuna yayınım (emittance)

- Boyuna demet yayınımını aşağıdaki gibi tanımlarız:

$$\epsilon_\varphi = \int_s \frac{\Delta E}{\omega_{rf}} d\varphi$$

- Ayıraçlar için denklem de aşağıdaki gibi türetilebilir (6.54, 6.59, 6.17 ve 6.35'i kullanarak):

$${\frac{\Delta cp}{cp_0}}^{2} = \frac{eV_0}{\pi h |\eta_c| cp_0} (cos\varphi + 1 + (2\psi_s + \varphi - \pi) sin\psi_s)$$

- Dikkat edersek, durgun RF kovaları için boyuna yayınım enerji kabulünün 8 katı olarak veriliyor.

$$\epsilon_{\varphi,kbl} = 8\sqrt{\frac{2eV_0 E_0 \beta}{\pi h |\eta_c| \omega_{rf}^2}}$$

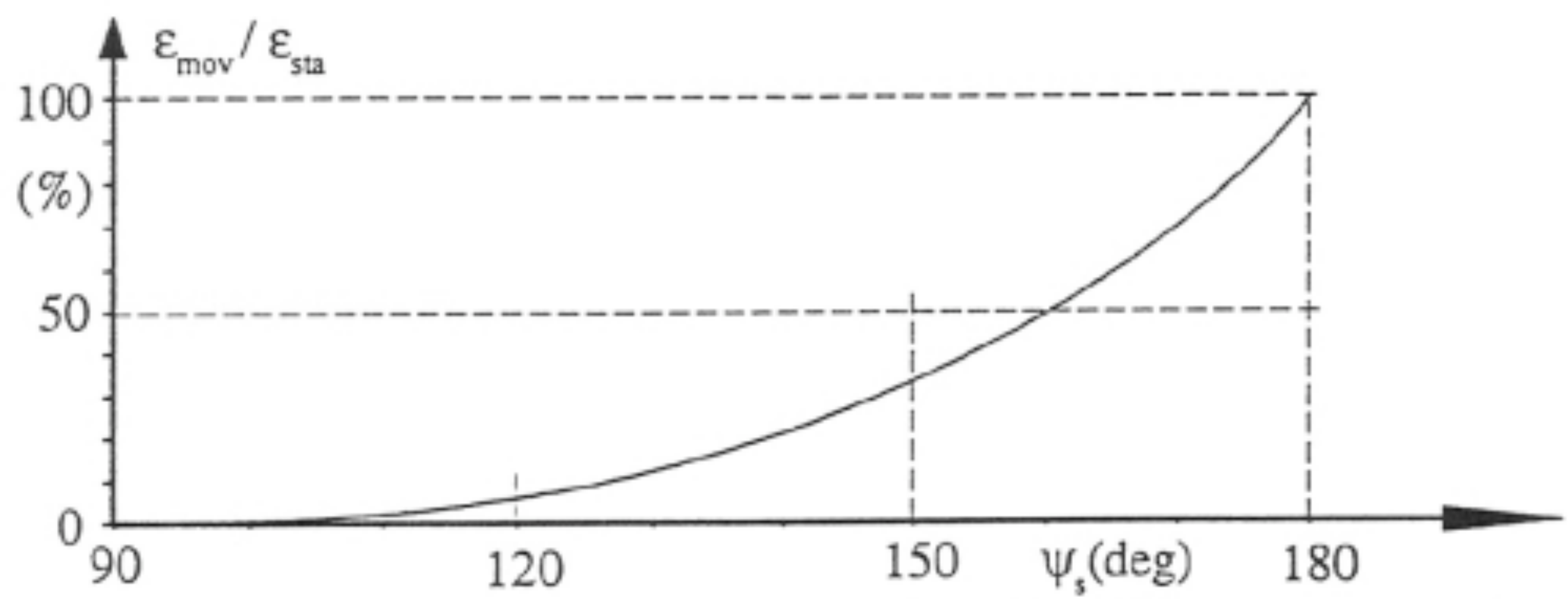
$$\epsilon_{\varphi,kbl} = 8 \left.\frac{\Delta E}{\omega_{rf}}\right|_{maks,durgun}$$

- İlerleyen RF kovaları için boyuna yayınımı bulmak için yukarıdaki integrali ψ_1 ve ψ_2 arasında almamız gerekir.

Boyuna yayınım (emittance)

$$\epsilon_\varphi = \int_s \frac{\Delta E}{\omega_{rf}} d\varphi$$

- İlerleyen RF kovaları için boyuna yayınımı bulmak için yukarıdaki integrali ψ1 ve ψ2 arasında almamız gerekir.
- Bu durumda durgun ve ilerleten kovaların yayınım oranları synchronous evrenin bir fonksiyonu olarak aşağıdaki çizimde görülmektedir.



Evre uzayı denkleştirme

- Demeti bir hızlandırıcıdan diğerine aktarırken, enine evre uzayında denkleştirme yapmak gereklidir.
- Aynı şey boyuna evre uzayı için de geçerlidir.
- Denkleştirme yapılmadığı durumda, demetin bir bölümünün kaybedilmesi söz konusudur.
- Denkleştirme yapılmadığında gerçekleşecek sorunlara bir örnek olarak demetin RF kovası ile üst üste gelememesi verilebilir.