

# KRD Toplam Kurallarının Ters Problem Yaklaşımı

Halil Mutuk

Fizik Bölümü, Fen Fakültesi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

*hmutuk@omu.edu.tr*

YEFİST 2025, Marmara Üniversitesi

- 1 KRDTK Toplam Kuralları (KRDTK)
- 2 Ters Problem Yaklaşımı
- 3 Uygulamalar
- 4 Son Söz

# KRD Toplam Kuralları

KRD kuvvetli etkileşmeleri betimleyen kuantum alan teorisidir.



Figure: KRD faz diyagramı

M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov. QCD and Resonance Physics. Theoretical Foundations. Nucl. Phys. B 147, 385-447 (1979)

M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov. QCD and Resonance Physics: Applications. Nucl. Phys. B 147, 448-518 (1979)

Kuark kütlelerinin belirlenmesi

Mezon ve baryonların kütle ve bozunma sabitlerinin hesaplanması

Mezon ve baryonların form faktörlerinin hesaplanması

Mezon ve baryonların manyetik momentlerinin hesaplanması

KRDTK yönteminde bir hadrona iki farklı yönden bakıyoruz:

1) dışarıdan 2) içeriden

KRDTK yönteminde korelasyon fonksiyonu olarak adlandırılan bir çeşit geçiş genliği ele alınır

$$\Pi(q^2) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T[j(x)j^\dagger(0)] | 0 \rangle \quad (1)$$

Burada  $j(x)$  incelenen hadronun kuantum sayılarına sahip bir interpolasyon akımı olup  $T$  iki akımın zaman sırasına göre çarpımıdır.

# KRD Toplam Kuralları

Denklem (1) ile verilen korelasyon fonksiyonu iki farklı yaklaşımla hesaplanır:

- 1) Fenomenolojik tarafta, aynı çeşni kuantum sayılarına sahip hadronların serbestlik derecelerine bağlı olarak hesaplanır.
- 2) Kuark düzeyinde, hadronu, KRD vakumunda (KRD tarafında) işlemci çarpım açılımı (OPE) yoluyla etkileşime giren kuarklar ve gluonlar olarak tanımlar; burada kısa ve uzun mesafeli kuark-gluon etkileşimleri birbirinden ayrılır. İlki KRD pertürbasyon teorisi kullanılarak hesaplanırken, ikincisi vakum kondensatları cinsinden parametrelendirilir.

Fiziksel gözlenebilirler korelasyon fonksiyonunun iki farklı gösterimi eşleştirilerek belirlenir.

Farklı momentum transferleri süreçleri kapsayan bu eşitlemenin bir bedeli var (D. B. Leinweber. QCD sum rules for skeptics. Annals Phys. 254, 328-396 (1997)):

- kuark-hadron düalitesi,
- faktörize edilmemiş kondensat değerleri,
- yüksek boyutlu operatörlerin faktörizasyonu,
- küçük ama ihmal edilmiş  $s$  düzeltmeleri,
- operatör (işlemci) çarpım açılımının (OPE) kesilmesi,
- Toplam kurallarının QCD ve fenomenolojik taraflarını eşleştirmek için bölgenin seçimi,
- pertürbasyon teorisinin büyük mertebelerde toplanmasıyla ilişkili belirsizlikler ve
- önemli olabilecek doğrudan instanton katkıları olasılığı.

Bunlara ek olarak yöntemden kaynaklı fiziksel olmayan parametrelerin kullanılması (süreklilik eşiği (continuum threshold)  $s_0$  ve Borel parametresi  $M^2$ ) da sonuçlardaki kararlılığı ve hata payını etkilemektedir.

Yöntemin sonuçlarındaki hata payı % 20 mertebesindedir.

D. B. Leinweber "You can get anything you want from QCD Sum Rules."  
-Of course not.

## Geleneksel yöntem

- İşlemci Çarpım Açılımı (OPE)
- Dağılım İlişkisi (Dispersion Relation)
- Kuark-hadron dualitesi varsayımı
- Belirsizlikler: dualite ihlali, sayısal kararsızlık, model bağımlılığı

Kuark-hadron ikiliği, belirli bir enerji aralığında ortalaması alınan deneysel olarak ölçülebilir bir hadronik spektral fonksiyonun, temel serbestlik dereceleri olan kuarklar ve gluonlar kullanılarak KRD'den hesaplanan ilgili ifade ile tanımlanabileceğini ifade eder.

F. E. Close, N. Isgur. The origins of quark-hadron duality: How does the square of the sum become the sum of squares? (arXiv:0102067)

Bilinmeyen spektral yoğunluk, genelleştirilmiş Laguerre polinomlarıyla genişletilir ve ardından toplam kuralındaki  $1/(q^2)^m$  terimlerinin katsayıları eşitlenerek bir matris denklemi elde edilir. Bu matris denklemi çözülerek spektral yoğunluk yaklaşık olarak elde edilir. Bu yöntemle neredeyse hiçbir varsayım (örneğin, kuark-hadron dualitesi) içermez ve temel durum spektroskopik parametreleri (kütle ve bozunma sabiti) elde edilebilir.

$$\Pi^{\text{QCD}}(q^2) = \int_0^\infty \frac{\rho(s)}{s - q^2} ds \quad (2)$$

$\rho(s)$  spektral yoğunluk olup bilinmeyen olarak ele alınır.

Spektral yoğunluk Laguerre (Legendre vb.) polinomları ile seri olarak açılır:

$$\rho(s) = \sum_{n=0}^N a_n L_n(s/\Lambda) \quad (3)$$

Burada  $L_n(x)$  Laguerre polinomu,  $\Lambda$  ölçek parametresi ve  $a_n$  bilinmeyen katsayılardır. Laguerre polinomları  $s \in [0, \infty]$  aralığında ortogondur. Bu genişletme sayesinde integral denklemi, katsayı denklemlerine indirgenebilir.

$$\int_0^{\infty} \frac{\rho(s)}{s - q^2} ds = \sum_{n=0}^N a_n \left( \int_0^{\infty} \frac{L_n(s/\Lambda)}{s - q^2} ds \right) \quad (4)$$

$$M.a = b \quad (5)$$

$$\sum_{n=0}^N M_n(q^2) a_n = b \quad (6)$$

Bu ifadeye  $M$  matris elemanlarını,  $a_n$  bilinmeyenleri,  $b$  ise QCD tarafındaki  $1/x^{(m+1)}$  katsayılarını temsil eder. Bu denklemden  $a_n$  belirlendikten sonra

$$\rho(s) = \sum_{n=0}^N a_n L_n(s/\Lambda) \quad (7)$$

ifadesinden spektral yoğunluk elde edilir ve pik noktasında kütle, spektral yoğunluğun altında kalan alan ifadesinden de bozunma sabiti elde edilir.

H. Mutuk. Revisiting light-flavor diquarks in the inverse matrix method of QCD sum rules. Phys.Rev.D 111 (2025) 3, 034035. arXiv:2412.08620 [hep-ph]

H. Mutuk. Reappraisal of the rho meson in nuclear matter by the inverse QCD sum rules method. Phys.Rev.D 111 (2025) 9, 094029. arXiv:2503.10343 [hep-ph]

$$\begin{aligned}
 \Pi(q^2) &= -\frac{3}{4}\pi^2 \left( 1 - 2\frac{m_s^2}{q^2} + \frac{17}{6}\frac{\alpha_s}{\pi} - \frac{1}{2}\frac{\alpha_s}{\pi} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right) q^2 \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \\
 &+ (\pm 2m_s - m_q) \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{q^2} - (\pm 2m_q - m_s) \frac{\langle \bar{s}s \rangle}{q^2} \\
 &- \frac{1}{8} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle \frac{1}{q^2} \pm 8\pi\kappa\alpha_s \frac{\langle \bar{q}q \rangle \langle \bar{s}s \rangle}{q^4} - \frac{16\pi}{27} \kappa\alpha_s \frac{\langle \bar{q}q \rangle^2 + \langle \bar{s}s \rangle^2}{q^4}
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi^{\text{OPE}}(q^2) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\Pi^{\text{pert}}(s)}{s - q^2} ds + (\pm 2m_s - m_q) \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{q^2} - (\pm 2m_q - m_s) \frac{\langle \bar{s}s \rangle}{q^2} \\
 &- \frac{1}{8} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle \frac{1}{q^2} \\
 &\pm 8\pi\kappa\alpha_s \frac{\langle \bar{q}q \rangle \langle \bar{s}s \rangle}{(q^2)^2} - \frac{16\pi}{27} \kappa\alpha_s \frac{\langle \bar{q}q \rangle^2 + \langle \bar{s}s \rangle^2}{(q^2)^2},
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{1}{\pi} \Pi^{\text{pert}}(s) = -\frac{3}{4} \pi^2 \left( 1 - 2 \frac{m_s^2}{q^2} + \frac{17}{6} \frac{\alpha_s}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\alpha_s}{\pi} \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right) q^2 \ln \frac{-q^2}{\mu^2}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\Delta\rho(s, \Lambda)}{s - q^2} ds &= \int_0^\infty \frac{\Pi^{\text{pert}}(s) e^{-s/\Lambda}}{s - q^2} ds \\ &+ (\pm 2m_s - m_q) \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{q^2} - (\pm 2m_q - m_s) \frac{\langle \bar{s}s \rangle}{q^2} - \frac{1}{8} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle \frac{1}{q^2} \\ &\pm 8\pi\kappa\alpha_s \frac{\langle \bar{q}q \rangle \langle \bar{s}s \rangle}{(q^2)^2} - \frac{16\pi}{27} \kappa\alpha_s \frac{\langle \bar{q}q \rangle^2 + \langle \bar{s}s \rangle^2}{(q^2)^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

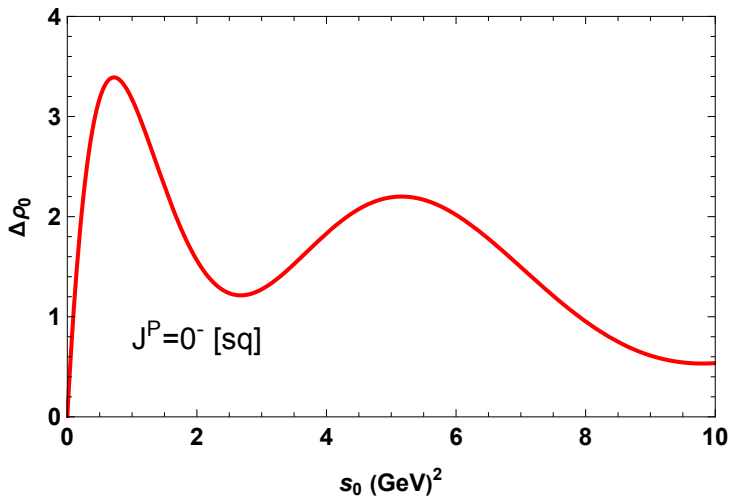


Figure: Spektral yoğunluk-arXiv:2412.08620

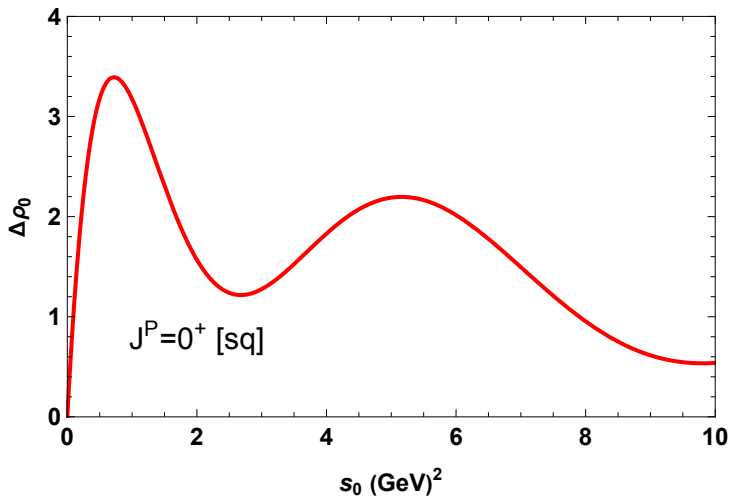


Figure: spektral yoğunluk-arXiv:2412.08620

TABLE I. Extracted masses of  $sq$  and  $ud$  diquarks with  $J^P = 0^+$  quantum number. The results are presented in unit of MeV.

State	This work	[41]	[39], [40]	[42]	[43]	[44]	[45]
$sq$	$847 \pm 2$	948	895	882	1100	-	$0.77 \pm 0.04$
$ud$	$678 \pm 3$	710	705	737	820	694(22)	$0.64 \pm 0.06$

Figure: Kütle

TABLE II. Extracted decay constants  $f_d$  of  $sq$  and  $ud$  diquarks with  $J^P = 0^\pm$  quantum numbers. Results are presented in unit of  $\text{GeV}^2$ .

State	$J^P$	This work	[33]	[45]
$sq$	$0^+$	$0.218 \pm 0.005$	$0.219 \pm 0.019$	$0.313 \pm 0.013$
$sq$	$0^-$	$0.217 \pm 0.004$	$0.21 \pm 0.005$	-
$ud$	$0^+$	$0.209 \pm 0.005$	$0.184 \pm 0.023$	$0.264 \pm 0.017$
$ud$	$0^-$	$0.208 \pm 0.005$	$0.21 \pm 0.005$	-

Figure: Bozunma Sabiti

- Geleneksel KRDTK kuark-hadron ikiliğine dayanır, bu da ihlal edilebilir ve kontrol edilemeyen belirsizliğe neden olabilir.
- Bu yaklaşım, KRDTK yöntemini ters probleme dönüştürür. Pertürbatif olmayan gözlemlenebilirler ve spektral yoğunluk için çözüm üretir.
- Borel dönüşümü yok.
- Hata payı daha az.
- Egzotik hadronlar üzerinde denenebilir.

- H. n. Li and H. Umeeda, Phys. Rev. D 102, 114014 (2020)  
doi:10.1103/PhysRevD.102.114014 [arXiv:2006.16593 [hep-ph]].
- H. n. Li, Phys. Rev. D 104, no.11, 114017 (2021)  
doi:10.1103/PhysRevD.104.114017 [arXiv:2109.04956 [hep-ph]].
- H. n. Li, Phys. Rev. D 106, no.3, 034015 (2022)  
doi:10.1103/PhysRevD.106.034015 [arXiv:2205.06746 [hep-ph]].
- H. n. Li, Phys. Rev. D 107, no.5, 054023 (2023)  
doi:10.1103/PhysRevD.107.054023 [arXiv:2208.14798 [hep-ph]].
- H. n. Li, Phys. Rev. D 109, no.11, 115024 (2024)  
doi:10.1103/PhysRevD.109.115024 [arXiv:2309.15602 [hep-ph]].
- Z-X. Zhao, Y-P. Xing, R-H. Li, Eur.Phys.J.C 84 (2024) 10, 1105,  
doi:10.1140/epjc/s10052-024-13452-8 [arXiv:2407.09819[hep-ph]].

Dinlediđiniz için teŝekkürler!