Problems for the exam of the JUAS 2013 session on "Synchrotron Radiation"

Physical constants:

dielectricity	$\varepsilon_0 = 8.85419 \cdot 10^{-12}$ As/Vm
velocity of light	$c = 2.997925 \cdot 10^{8}$ m/s
elementary charge	$e = 1.60203 \cdot 10^{-19}$ C
mass of an electron	$m_e = 9.1081 \cdot 10^{-31}$ kg
	$= 510.974$ keV
mass of an proton	$m_p = 1.67236 \cdot 10^{-27}$ kg
	$= 938.211$ MeV
Planck's constant	$h = 6.6252 \cdot 10^{-34}$ J s
	$\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1.05443 \cdot 10^{-34}$ J s

Problem 1

a) Give a short explanation why charged electrons emit almost no radiation during longitudinal acceleration, for instance in a linac.

b) What is the reason to use electron beams as a source for synchrotron radiation instead of other particles as muons or protons?

Problem 2

A proton with the energy E_p = 10 TeV moves through the magnetic field of a neutron star with the strength of $B_n = 10^8$ T. We assume at the position of the proton a homogeneous field.

a) Calculate the diameter of the proton trajectory and the revolution frequency.

b) How large is the power of the emitted synchrotron radiation?

c) How much energy loses the proton per revolution?

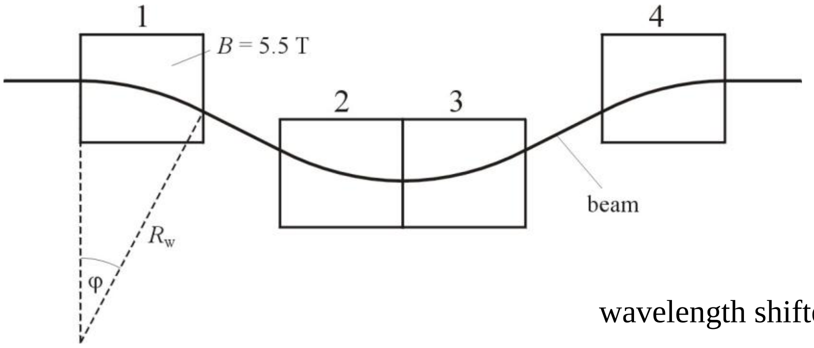
Problem 3

From the bending magnets of an electron storage ring synchrotron radiation should be emitted with a critical energy of E_c = 1.2 keV. The bending radius of the magnets is R = 5.5 m.

a) What is the required energy of the electron beam?

b) A maximum beam current of I_{max} = 250 mA has to be stored in the machine. How much rf-power is at least required? We assume that 50% of the power is transferred to the beam and 50% lost in the cavities.

c) In order to get a higher critical photon energy in one insertion a "wavelength shifter" is installed. It consists of 4 identical short bending magnets. The homogeneous field in the dipoles amounts to B = 5.5 T. Each magnet bends the beam by an angle of $\varphi = 10°$



wavelength shifter

Calculate the critical energy of the radiation emitted by the wavelength shifter.

By what amount the power of the rf-system has to be increased to compensate the additional energy loss produced by the wavelength shifter.

Problem 4

An undulator has the total length of L = 5.3 m and the period length of λ_u = 50 mm. The pole tip field is B_0 = 1.2 T. The gap height can be varied between the limits of g = 20 mm and g = 60 mm.

a) The undulator is installed in a storage ring operating with an electron beam energy of E_b = 2.9 GeV. What wavelength range is covered by the emitted coherent radiation of the first harmonic? What is the relative line width of the radiation spectrum? The radiation is measured at the radiation axis ($\Theta = 0$).

b) The same undulator may be adjusted at a fixed gap of g = 40 mm. What beam energy E_b is needed to get coherent infra red radiation with a wavelength of λ = 5 µm?

GOOD LUCK !

LÖSUNGEN DER KLAUSURAUFGABEN ZU JUAS 2013

LÖSUNG Aufgabe 1

zu a)

Die kritische Frequenz ist

$$\omega_\mathrm{c} = \frac{3c\gamma^3}{2\gamma} = \frac{3c\,E^3}{2\,\rho\left(m_\mathrm{e}c^2\right)^3} \qquad \text{mit} \qquad \gamma = \frac{E}{m_\mathrm{e}c^2}$$

Außerdem gilt

$$\nu_\mathrm{c}\lambda_\mathrm{c} = c \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_\mathrm{c} = \frac{c}{\nu_\mathrm{c}} = \frac{2\pi\,c}{\omega_\mathrm{c}} \qquad \text{oder} \qquad \omega_\mathrm{c} = \frac{2\pi\,c}{\lambda_\mathrm{c}}$$

Einsetzen liefert

$$\frac{3cE^3}{2\rho\left(m_\mathrm{e}c^2\right)^3} = \frac{2\pi\,c}{\lambda_\mathrm{c}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{4\pi\,c\left(m_\mathrm{e}c^2\right)^3}{3\lambda_\mathrm{c}c\,E^3}$$

Der Bahnradius berechnet sich nach

$$\frac{1}{\rho} = \frac{e}{p}B_\mathrm{earth} = \frac{e\,c}{E}B_\mathrm{earth} \qquad (*)$$

Somit folgt

$$\frac{e\,c}{E}B_\mathrm{earth} = \frac{4\pi\,c\left(m_\mathrm{e}c^2\right)^3}{3\lambda_\mathrm{c}c\,E^3} \qquad \Rightarrow \qquad E = \sqrt{\frac{4\pi\left(m_\mathrm{e}c^2\right)^3}{3\lambda_\mathrm{c}e\,c\,B_\mathrm{earth}}} = 1{,}88250\cdot 10^{-9}\ \mathrm{J} = 11{,}75074\,\mathrm{GeV}$$

zu b)

Die vom Elektron während des Fluges abgestrahlte Leistung ist

$$P = \frac{e^2c}{6\pi\,\varepsilon_0\left(m_\mathrm{e}c^2\right)^4}\frac{E^4}{\rho^2}$$

Das Elektron hat die konstante relativistische Geschwindigkeit c, so daß die Flugdauer für die Strecke L sich ergibt zu

$$T = \frac{L}{c} \qquad \Rightarrow \qquad dt = \frac{1}{c}ds$$

Der Energieverlust über die Strecke L ist somit

$$\Delta E = \int_0^T P\,dt = \frac{1}{c}\int_0^L P\,ds = \frac{P}{c}L$$

$$= \frac{e^2E^4L}{6\pi\,\varepsilon_0\left(m_\mathrm{e}c^2\right)^4\rho^2}$$

Mit (*) kann man den Bahnradius einsetzen und erhält

$$\Delta E = \frac{e^2E^4L}{6\pi\,\varepsilon_0\left(m_\mathrm{e}c^2\right)^4}\frac{e^2c^2}{E^2}B_\mathrm{earth}^2 = \frac{e^4c^2L\,B_\mathrm{earth}^2E^2}{6\pi\,\varepsilon_0\left(m_\mathrm{e}c^2\right)^4} = 8{,}39824\cdot 10^{-13}\mathrm{J} = 5{,}24225\,\mathrm{MeV}$$

LÖSUNG Aufgabe 2

Ein LINAC liefert einen Elektronenstrahl mit sehr kleinen transversalen Dimensionen. Die Strahlenergie beträgt E_b = 100 MeV. Hinter dem Linac befindet sich ein Undulator aus Permanentmagneten mit einer Periodenlänge λ_u = 15 mm. Das Feld an der Polspitze betrage Bp = 0.9 T. Dieser Undulator produziert eine kohärente Strahlung mit einer Wellenlänge von λ = 290 nm.

a) Man berechne die erforderliche Gaphöhe des Undulators.

b) Wie lang muß der Magnet sein, um eine Linienbreite der Strahlung von $\Delta\lambda/\lambda = 5\cdot 10^{-3}$ zu erreichen?

zu a)

Der relativistische Gammafaktor ist

$$\gamma = \frac{E_\mathrm{b}}{mc^2} = \frac{100}{0.511} = 195.695$$

Die Wellenlänge der Strahlung folgt aus der Kohärenzbedingung

$$\lambda = \frac{\lambda \mathrm{u}}{2\gamma^2}\left(1 + \frac{K^2}{2}\right)$$

Daraus folgt der Undulatorparameter

$$K = \sqrt{2\left(\frac{2\gamma^2\lambda}{\lambda_\mathrm{u}} - 1\right)} = 0{,}980607$$

Die Feldstärke am Strahl muß dann die Amplitude haben von

$$\tilde{B} = \frac{2\pi K\, m_\mathrm{e} c}{\lambda_\mathrm{u} e} = 0.70010\ \mathrm{T}$$

Die Gaphöhe ist dann

$$g = \frac{\lambda_\mathrm{u}}{\pi} \operatorname{arccos} h\left(\frac{B_\mathrm{P}}{\tilde{B}}\right) = 0.0035273\,\mathrm{m} = 3.5273\,\mathrm{mm}$$

zu b)

Hat ein Undulator N Perioden, ist die Linienbreite

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{N} \qquad \Rightarrow \qquad N = \frac{1}{\Delta\lambda/\lambda} = \frac{1}{5\cdot 10^{-3}} = 200$$

Damit ist die Länge des Undulators

$$L_\mathrm{Undulator} = N\lambda_\mathrm{u} = 200\cdot 15\cdot 10^{-3} = 3.0\,\mathrm{m}$$

LÖSUNG Aufgabe 3

zu a)

Die Energie des Protons beträgt E_p = 10 TeV = 10^7 MeV. Seine Ruheenergie ist E_p0 = 938.211 MeV. Damit ist seine normierte Energie

$$\gamma = \frac{E_\mathrm{p}}{E_\mathrm{p0}} = \frac{10^7}{938.211} = 10658{,}6$$

Es handelt sich also um ein extrem relativistisches Teilchen der Geschwindigkeit $v = c$. Die bewegte Masse des Protons ist damit

$$m = \gamma\, m_\mathrm{p} = 1.7825 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{kg}$$

Aus dem Gleichgewicht von Zentrifugalkraft und Lorentzkraft folgt

$$e\,B_\mathrm{n} = m\frac{c}{R} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{m\,c}{e\,B_\mathrm{n}} = 0.00033564\,\mathrm{m} = 0.33564\,\mathrm{mm}$$

Der Durchmesser der Bahn ist damit

$$D = 2\,R = 0.67128\,\mathrm{mm}$$

Die Umlaufsfrequenz ergibt sich daraus sofort zu

$$f_\mathrm{u} = \frac{c}{2\pi\,R} = 1.4304 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Hz} = 143{,}04\,\mathrm{GHz}$$

zu b)

Die von dem Proton abgestrahlte Leistung ist

$$P = \frac{e^2\,c}{6\pi\varepsilon_0\left(m_\mathrm{p}c^2\right)^4}\frac{E_\mathrm{p}^4}{R^2} = 5.3471 \cdot 10^3\,\mathrm{W} = 5.3471\,\mathrm{kW}\ (!)$$

zu c)

Der Energieverlust pro Umlauf beträgt

$$\Delta E = \frac{e^2}{3\varepsilon_0\left(m_\mathrm{p}c^2\right)^4}\frac{E_\mathrm{p}^4}{R} = 3.7381 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{J}$$

oder nach Umrechnung in GeV

$$\Delta E = 233.34\,\mathrm{GeV}$$

Bei einem Umlauf verliert das extrem relativistische Proton den Anteil von

$$\frac{\Delta E}{E_\mathrm{p}} = \frac{233.34\,\mathrm{GeV}}{10000\,\mathrm{GeV}} = 0.0233 = 2.33\%$$

seiner Gesamtenergie.

LÖSUNG Aufgabe 4

zu a)

Die kritische Energie der Synchrotronstrahlung ist

$$E_{\mathrm{c}} = \hbar\,\omega_{\mathrm{c}} = \frac{3hc\gamma^3}{4\pi R}$$

Daraus folgt sofort die Strahlenergie mit E_{c} = 1.2 keV = $1.92244 \cdot 10^{-16}$ J

$$\gamma = \sqrt[3]{\frac{4\pi R\,E_{\mathrm{c}}}{3hc}} = 2814.7 \qquad \Rightarrow \qquad E_{\mathrm{b}} = 1.43824 \text{ GeV}$$

zu b)

Der Energieverlust eines Elektrons pro Umlauf beträgt

$$\Delta E[\mathrm{keV}] = 88.5\,\frac{E_{\mathrm{b}}^4\,[\mathrm{GeV}^4]}{R[\mathrm{m}]} = 68.85 \text{ keV}$$

Man braucht in den Cavities daher die Spannung U_{c} = 68.85 kV. Damit ist die auf den Strahl übertragene Leistung

$$P_{\mathrm{beam}} = I_{\mathrm{b}}\,U_{\mathrm{c}} = 250\,\mathrm{mA} \cdot 68.85\,\mathrm{kV} = 17.213\,\mathrm{kW}$$

Es wurde angenommen, dass dieselbe Leistung noch einmal als Verlust in den Cavities bleibt. Der Sender muß also die Gesamtleistung haben von

$$P_{\mathrm{RF}} = 2 \cdot P_{\mathrm{beam}} = 34.425\,\mathrm{kW}$$

zu c)

Bei einem Feld von B = 5.5 T und der Strahlenergie von E_{b} = 1.43824 GeV ist der Biegeradius der Bahn im Wavelength Shifter

$$R_{\mathrm{W}} = \frac{E_{\mathrm{b}}\,[\mathrm{GeV}]}{0.2997925 \cdot B[\mathrm{T}]} = 0.872264\,\mathrm{m}$$

Dann wird die kritische Energie der Photonen aus dem Wavelength Shifter mit γ = 2814.7

$$E_{\mathrm{c}} = \hbar\,\omega_{\mathrm{c}} = \frac{3hc\gamma^3}{4\pi R_{\mathrm{W}}} = 1.21221 \cdot 10^{-15}\text{ J} = 7.56674\,\mathrm{keV}$$

Die Strahlungsleistung im Wavelength Shifter beträgt

$$P_{\mathrm{W}} = \frac{e^2\,c}{6\pi\varepsilon_0\left(m_{\mathrm{e}}c^2\right)^4}\,\frac{E_{\mathrm{b}}^4}{R_{\mathrm{W}}^2}$$

Wenn die Elektronen die Zeitdauer T zum Durchlaufen eines Magneten brauchen, ist die dabei abgestrahlte Energie

$$\Delta E = \int_0^T P_{\mathrm{W}}\,dt$$

Nun kann man schreiben

$$dt = \frac{dt}{ds}\,ds = \frac{1}{c}\,ds$$

Da $ds = R_\mathrm{W} d\varphi$ folgt

$$dt = \frac{R_\mathrm{W}}{c} d\varphi$$

Damit wird die abgestrahlte Energie

$$\Delta E = \frac{R_\mathrm{W}}{c} \int_0^\varphi P_\mathrm{W} d\varphi \xrightarrow{P_\mathrm{W} = \mathrm{const}} \Delta E = \frac{1}{c} R_\mathrm{W} P_\mathrm{W} \varphi$$

Setzt man die Strahlungsleistung ein, folgt für den Energieverlust in einem Magneten, wobei der Ablenkwinkel $\varphi = 10° = 0.17453$ rad beträgt:

$$\Delta E = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 \left(m_\mathrm{e} c^2\right)^4} \frac{E_\mathrm{b}^4}{R_\mathrm{W}} \varphi = 1.93126 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{J} = 12.055\,\mathrm{keV}$$

Das HF-System muß also eine zusätzliche Spannung von U_W = 4·12.055 kV = 48.2204 kV erzeugen. Bei einem Strahlstrom von I_b = 250 mA ergibt das die zusätzliche HF-Leistung von

$$\Delta P_\mathrm{RF} = U_\mathrm{w} I_\mathrm{b} = 12.0551\ \mathrm{kW}$$

==