A Dirac-egyenlet új egzakt megoldásai extrém nagyintenzitású lézertérben

Varró Sándor
Wigner Fizikai Kutatóközpont
MTA Szilárdtestfizikai és Optikai Intézet
Budapest

Fizikus Vándorgyűlés, Debrecen, 2013. augusztus 21-24. [9.2.]

9. 2. A Dirac-egyenlet új egzakt megoldásai extrém nagyintenzitású lézertérben

VARRÓ Sándor
MTA Wigner FK SZFI, 1525 Budapest pf. 49. E-mail: varro.sandor@wigner.mta.hu

Kivonat. A plazmában terjedő extrém nagyintenzitású lézersugárzással kölcsönható töltések Dirac- és Klein–Gordon-egyenletének új egzakt megoldásait határoztuk meg, amelyek a régóta használatos ún. Volkov-féle állapotok [1-3] általánosításának is tekinthetők. Ezek a megoldások trigonometrikus polinomok kétszeresen végtelen halmazával fejezhetők ki, amelyek két egész kvantumszámmal indexelhetők. Klein-Gordon esetben azonosak az ún. Ince-féle polinomokkal [4]. Dirac részecske esetében a kapott megoldások eddig a matematikában sem ismert új komplex polinomokat tartalmaznak [5]. A kapott eredmények felhasználhatók az intenzív lézerterekben lejátszódó elektron-pozitron párkeltés, magasrendű felharmonikusok és attoszekundumos impulzusok generálásának elméleti elemzéséhez. Szerepet játszhatnak a plazmás lézeres gyorsítók alapfolyamatainak tisztázásában is [6].
Köszönetnyilvánítás. A jelen kutatást részben az OTKA K 104260 számú projekt keretében végeztük.

[1] Fedorov M V, *Atomic and Free Electrons in a Strong Laser Field* (World Scientific, Singapore, 1997)
[2] Gordon W , Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie *Zeits. für Phys.* 40 117-133 (1927);
Wolkow D M, Über eine Klasse von Lösungen der Diracschen Gleichung. *Z. Physik* 94, 250-260 (1935)
[3] Bergou J and Varró S, Wavefunctions of a free electron in an external field and their application in intense field interactions: II. Relativistic treatment. *J. Phys. A: Math. Gen*. 13, 2823-2837 (1980); Nonlinear scattering processes in the presence of a quantized radiation field: II. Relativistic treatment. *ibid.* 14 2281-2303 (1981)
[4] Varró S, A new class of exact solutions of the Klein-Gordon equation of a charged particle interacting with an electromagnetic wave in a medium. *Las. Phys. Lett.*- submitted (2013). E-print: arXiv:1306.0097 [quant-ph]. 2 June 2013.
[5] Varró S, New exact solutions of the Dirac equation of a charged particle interacting with an electromagnetic wave in a medium. *Laser Phys. Lett* 10, 095301 (2013). arXiv:1305.4370 [quant-ph]. May 17.
[6] Varró S, New exact solutions of the Dirac equation of a charged particle propagating in a strong laser field in an underdense plasma. 1st European Advanced Accelerator Concepts Workshop (2-7. June 2013. La Biodola, Isola d'Elba, Italy) Talk in Working Groups 1 + 6. Abstract and slides see at: https://indico.cern.ch/

Vázlat

1. Bevezetés. Volkov-állapotok. Mathieu-diagramok.

2. A Dirac- (Klein–Gordon-) egyenlet új megoldásai.

3. Számszerű illusztrációk (pl. Impulzusspektrum).

4. Lehetséges ‘alkalmazások’ alapfolyamatok leírásához, megértéséhez. Pl. plazmás gyorsítóknál

Gordon megoldása [1927]

$$[\Pi^2 - \kappa^2]\Phi = 0$$

$$\Pi \equiv i\partial - \varepsilon A_{rad}(x)$$

$$A_{rad}(\xi) = e_x A_0 f(\xi)$$

$$\xi = k_\mu x^\mu = \omega(t - z/c)$$

$$\Phi_p^{(\pm)}(x) = N_p e^{\mp \frac{i}{\hbar} S_p}$$

$$= N_p \exp\left[\mp i\{p \cdot x + \int I_p^{(\pm)}(\xi) d\xi\}\right]$$

$$I_p^{(\pm)}(\xi) = (1/2k \cdot p)[\pm 2\varepsilon p \cdot A(\xi) - \varepsilon^2 A^2(\xi)$$

Gordon W, Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie. *Zeitschrift für Physik* 40, 117-133 (1927). [Application to strong-field: ~1960..]

Volkov-állapotok [1935]

$$[\gamma \cdot \Pi - \kappa]\left|\Psi\right\rangle = 0 \quad (\varepsilon\gamma_0 V\left|\Psi\right\rangle)$$

$$A_{rad}(\xi) = e_x A_0 f(\xi) \qquad \xi = k_\mu x^\mu = \omega(t - z/c)$$

$$\Psi_p(x) = \left[1 \pm \frac{\varepsilon(\gamma \cdot k)[\gamma \cdot A(\xi)]}{2k \cdot p}\right] u_p^{(\pm)}$$
$$\times \exp\left[\mp i[p \cdot x + \int I_p^{(\pm)}(\xi) d\xi]\right]$$

$$I_p^{(\pm)}(\xi) = (1/2k \cdot p)[\pm 2\varepsilon p \cdot A(\xi) - \varepsilon^2 A^2(\xi)]$$

Wolkow D M, Über eine Klasse von Lösungen der Diracschen Gleichung. *Zeitschrift für Physik* 94, 250-260 (1935). [Application to strong-field: ~1960..]

Modulált de Broglie síkhullám

$$\Phi = \Phi_p(\xi) e^{-ip\cdot x}$$

$$\xi = k_\mu x^\mu = \omega(t - z/c)$$

$$-k^2 \frac{d^2\Phi_p}{d\xi^2} + 2ik\cdot p\frac{d\Phi_p}{d\xi} + (p^2 - \kappa^2 - 2\varepsilon p\cdot A + \varepsilon^2 A^2)\Phi_p = 0$$

$n_m > 1$ $n_m = 1$ $n_m < 1$

Vákuumban: $k^2 = 0$

Első rendű differenciál egyenlet Φp-re.

Azonnal integrálható, a „skalár Volkov-állapotot” adja.

Közegben: $k^2 = (\omega/c)^2(1 - n_m^2) \neq 0$

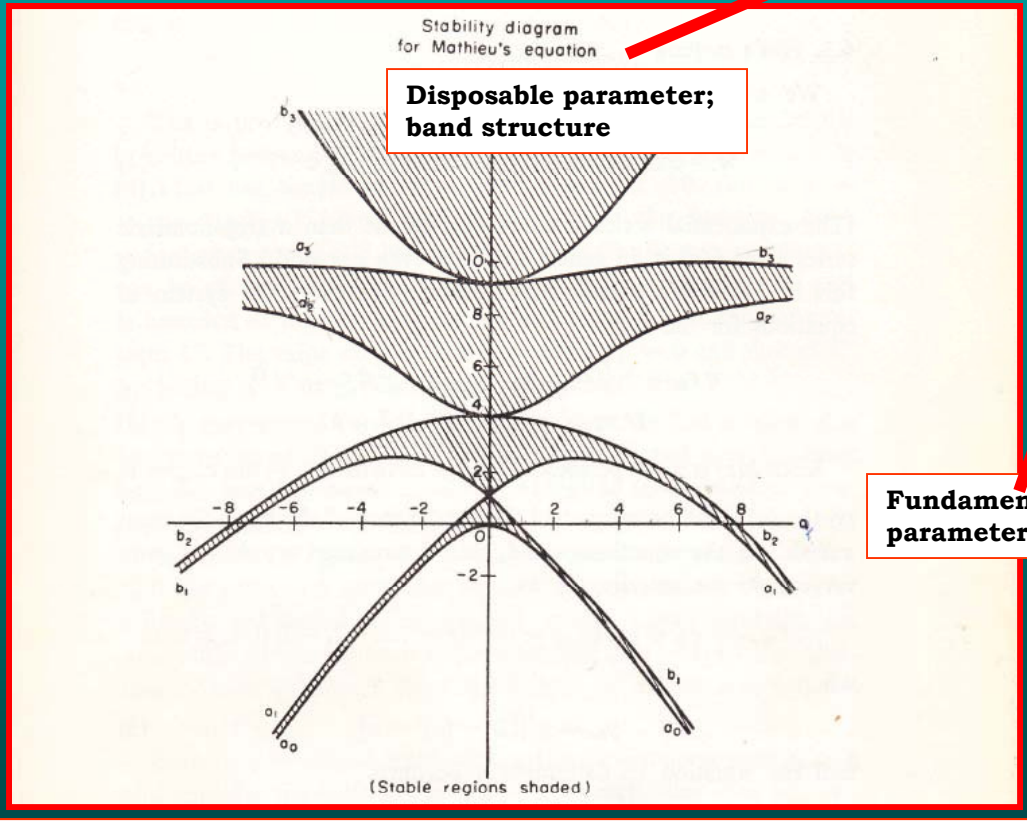
Másodrendű differenciál-egyenlet Φp-re.

Pl. Mathieu típusú megoldások

$$\xi = k_\mu x^\mu = \omega(t - n_m y / c)$$

$$w'' + (\lambda - 2h^2 \cos 2z) w = 0$$

$$\lambda \propto k \cdot p, \quad h^2 \propto eA_0 p_\perp$$



Disposable parameter; band structure

Fundamental parameter.

[Figure taken from Arscott F M, *Periodic differential equations* (Pergamon Press, Oxford, 1964) p.123.] . Nikishov & Ritus (1967), Nikishov (1970), Narozhny & Nikishov (1974), Becker (1977), Fedorov, McIver ... FEL theories.

Új egzakt megoldás. p.1.

$$\xi = k_\mu x^\mu = \omega(t - n_m y / c)$$

$$[(i\partial - \varepsilon A)^2 - \kappa^2 - \tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma \cdot F]\Psi = 0$$

$$\Psi_p^{(\pm)} = \sum_{s=1}^{4} \Psi_{ps}^{(\pm)} u_s$$

$$z \equiv \xi / 2$$

$$\frac{d^2\Psi_{ps}^{(\pm)}}{dz^2} + (\theta_0 + 2\theta_1 \cos 2z + 2\theta_2 \cos 4z \pm 2i\vartheta_1 \sin 2z)\Psi_{ps}^{(\pm)} = 0$$

$$\Psi_{ps}^{(\pm)} = f \exp(-\theta_2^{1/2} \cos 2z)$$

Hill-egyenlet. Magasabb transzcendens megoldások...

Narozhny and Nikishov (1974) for n_m=0

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + a \sin 2z \left(\frac{df}{dz} + if \right) + (\eta - qa \cos 2z) f = 0$$

$$a = 4 \frac{eF_0 \lambda_p}{\hbar \omega_0}$$

$$2p_x = (q+1)k_p$$

$$k_p \equiv k_0 \sqrt{1 - n_m^2}$$

$$2(k \cdot p)^2 / k_p^4 = \eta_n^{(k)}$$

Új egzakt megoldás. p. 2.

$$\xi = k_\mu x^\mu = \omega(t - n_m y / c)$$

$$[(i\partial - \varepsilon A)^2 - \kappa^2 - \tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma \cdot F]\Psi = 0$$

$$p_x = (n + \tfrac{1}{2})k_p$$

$$\Psi_{p1,2}^{(e)} = e^{i\bar{p}\cdot\bar{x}} e^{-(a/4)\cos\xi} g_n^k(\xi, a \,|\, +)$$

$$2(k \cdot p)^2 / k_p^4 = \eta_n^{(k)}$$

$$g'' + a\sin 2z(g' + ig) + (\eta - qa\cos 2z)g = 0$$

$$2p_x = (q+1)k_p$$

$$\begin{bmatrix} 4(-n+1)^2 & (+1)a & 0 & 0 & 0 \\ (2n-1)a & 4(-n+2)^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (2n-2)a & \cdots & (2n-2)a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 4(n-1)^2 & (2n-1)a \\ 0 & 0 & 0 & (+1)a & 4n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_{-n+1} \\ D_{-n+2} \\ \vdots \\ D_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix} = \eta_n^{(k)} \cdot \begin{bmatrix} D_{-n+1} \\ D_{-n+2} \\ \vdots \\ D_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix}$$

Véges tagszámú polinomok

$$f = g_n^k(\xi, a \,|\, +) = \sum_{r=-n+1}^{n} D_r^{(k)}(a \,|\, 2n) \exp(-ir\xi)$$

$$a = 4\frac{eF_0\lambda_p}{\hbar\omega_0}$$

Új egzakt megoldás. p. 3.

$$\xi = k_\mu x^\mu = \omega(t - n_m y / c)$$

$$p_x = n k_p$$

$$p_x = (n + \tfrac{1}{2}) k_p$$

$$k_p \equiv k_0 \sqrt{1 - n_m^2} \equiv \omega_p / c$$

$$2(k \cdot p)^2 / k_p^4 = \eta_n^{(k)}$$

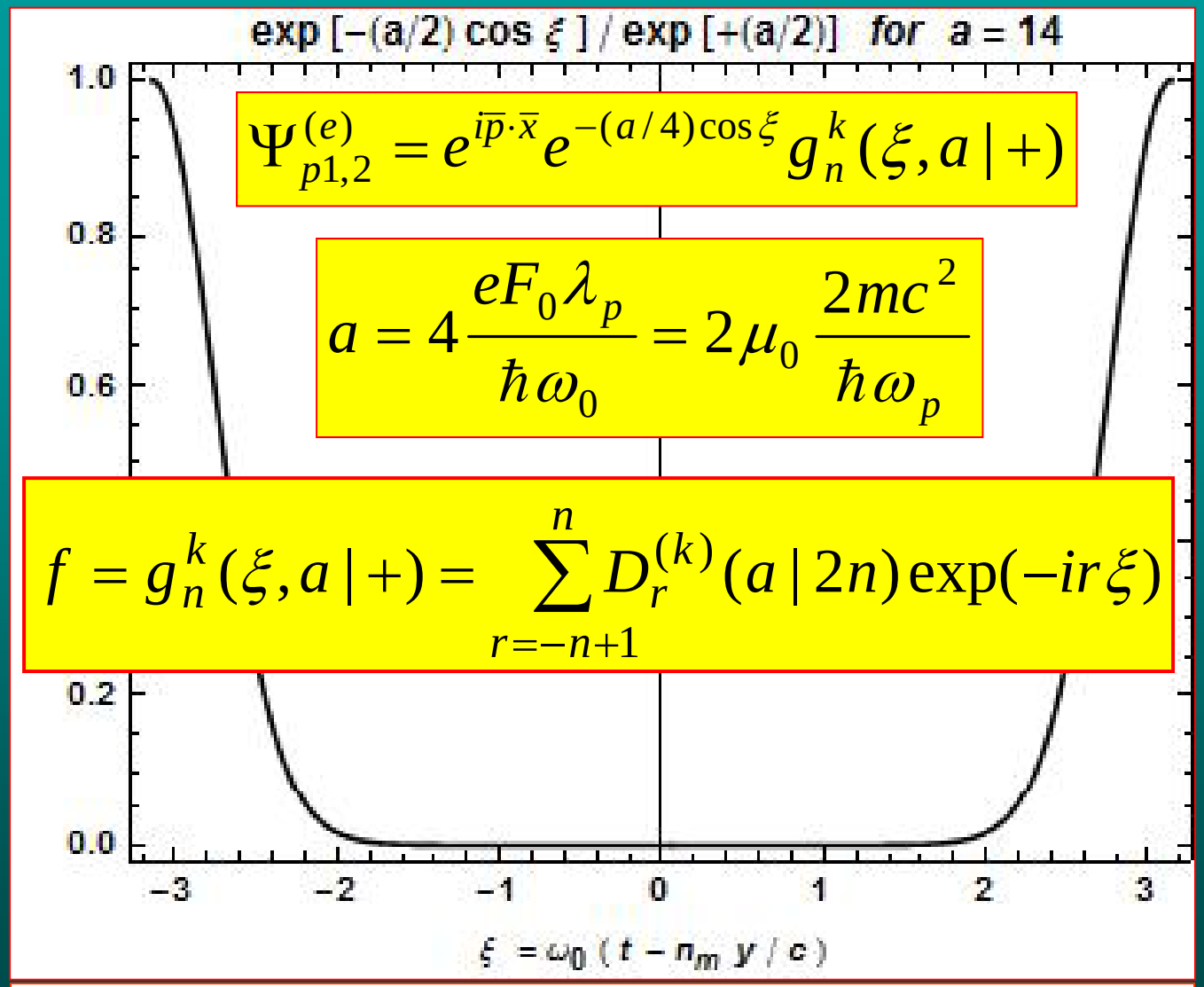
$$n_m^2(\omega_0) = 1 - \omega_p^2 / \omega_0^2$$

$$a = 4 \frac{eF_0 \lambda_p}{\hbar \omega_0} = 2\mu_0 \frac{2mc^2}{\hbar \omega_p}$$

$$\omega(k_y) = \sqrt{\omega_p^2 + (ck_y)^2}$$

$$\mu_0 = \frac{eF_0}{mc\omega_0} = 8.5 \times 10^{-10} \sqrt{I_0} \lambda_0$$

Optikai frekvenciákra az új paraméter “ a ” 6 nagyságrenddel nagyobb mint a szokásos intenzitás paraméter (‘dimenziótlan vektorpotenciál’)



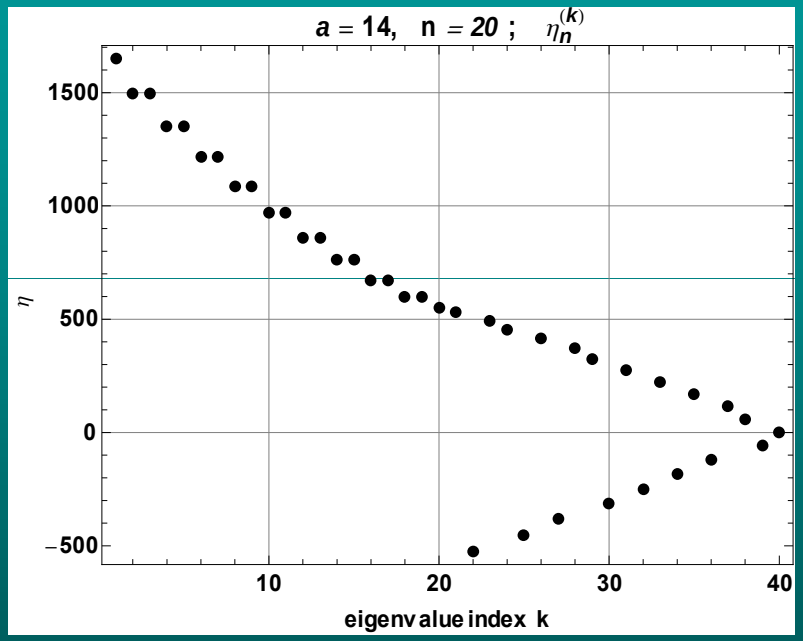
$$\Psi^{(e)}_{p1,2} = e^{i\bar{p}\cdot\bar{x}} e^{-(a/4)\cos\xi} g^k_n(\xi, a\,|\,+)$$

$$a = 4\frac{eF_0\lambda_p}{\hbar\omega_0} = 2\mu_0\frac{2mc^2}{\hbar\omega_p}$$

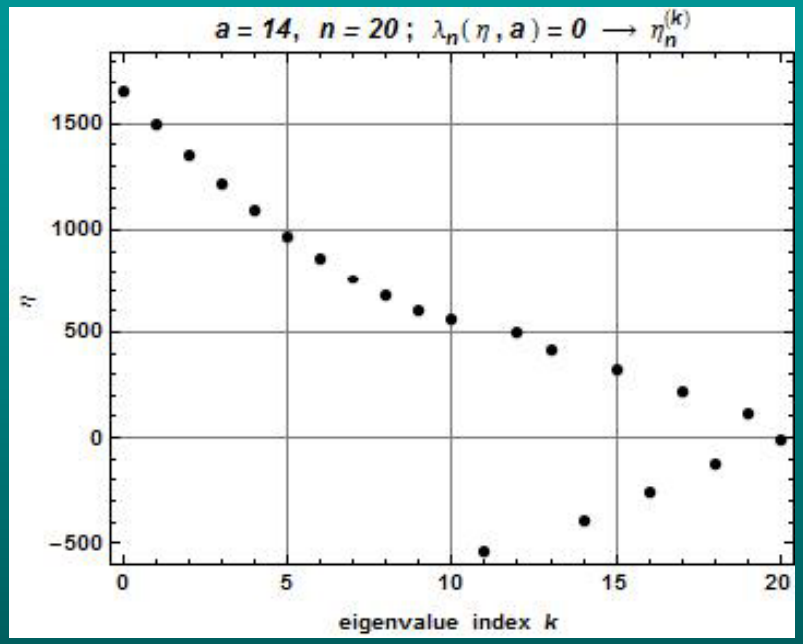
$$f = g^k_n(\xi, a\,|\,+) = \sum_{r=-n+1}^{n} D^{(k)}_r(a\,|\,2n)\exp(-ir\xi)$$

‘Üres tartományok’ a periódus közepén. [‘Kvantum buborék’?]

Impulzusspektrum a hullám terjedési irányában



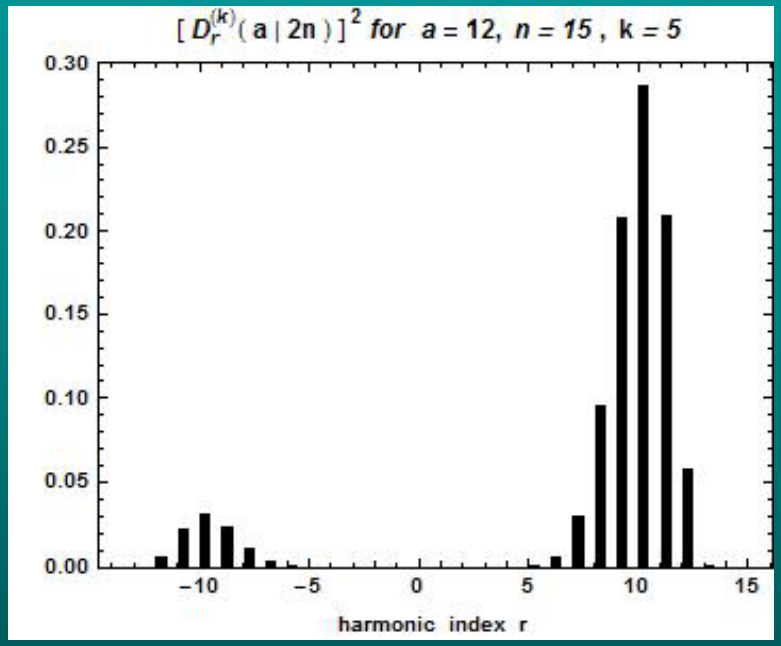
Dirac



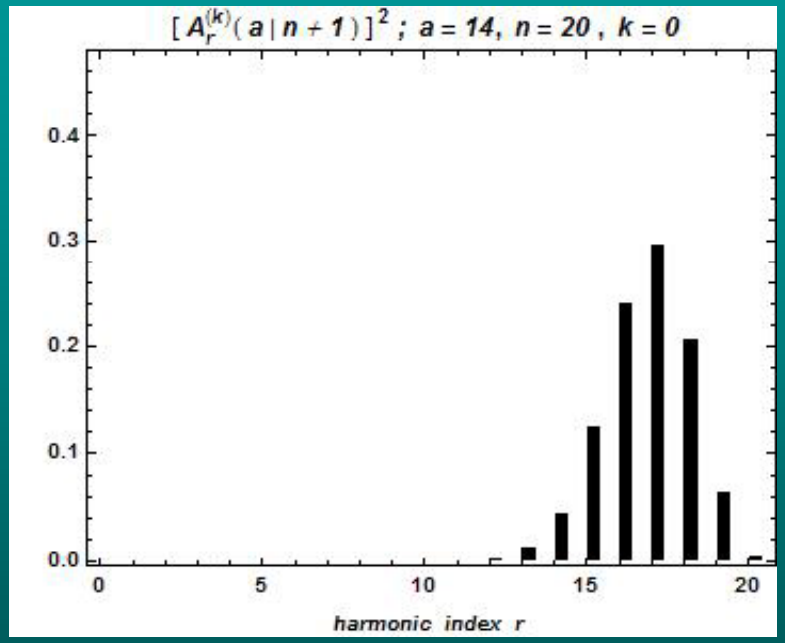
Klein-Gordon

A longitudinális impulzus-spektrum ‘hiperfinom felhasadása’.

Magasrendű felharmonikus spektrumok



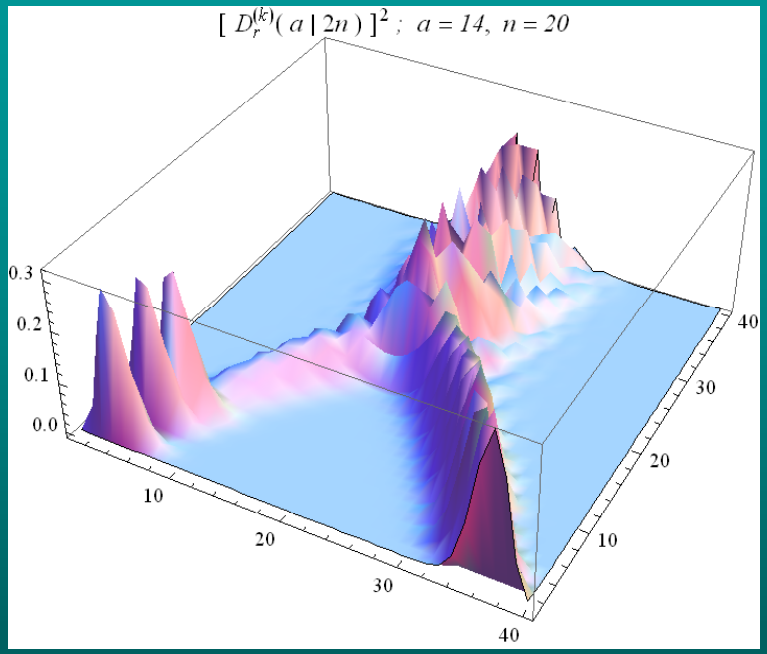
Dirac

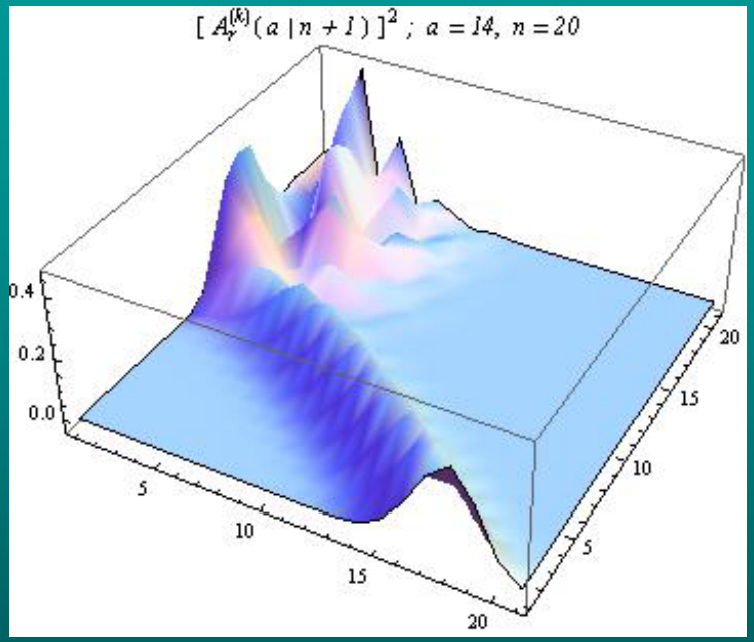


Klein-Gordon

Dirac: kettős, aszimmetrikus csúcsszerkezet. Klein-Gordon: Egyes csúcsszerkezet, és ez is oszcillálóba megy át. (következő oldal).

Magasrendű felharmonikus spektrumok



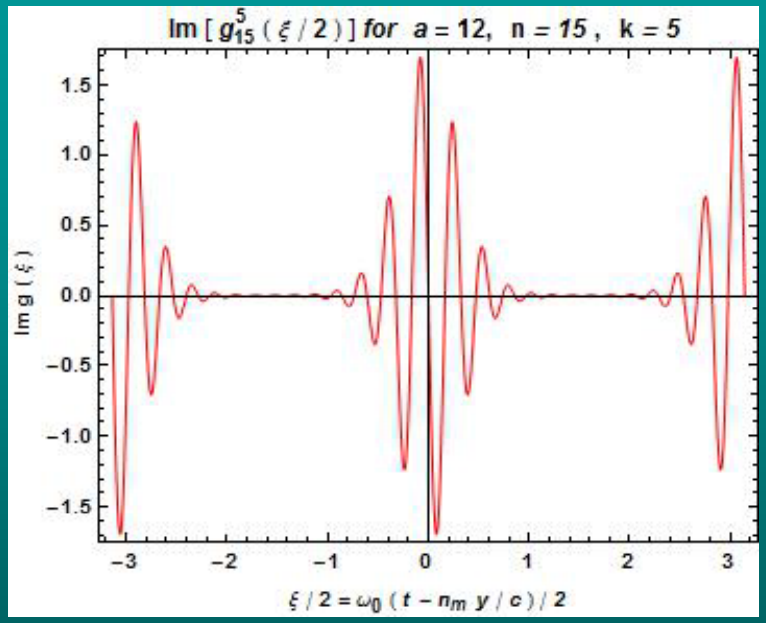


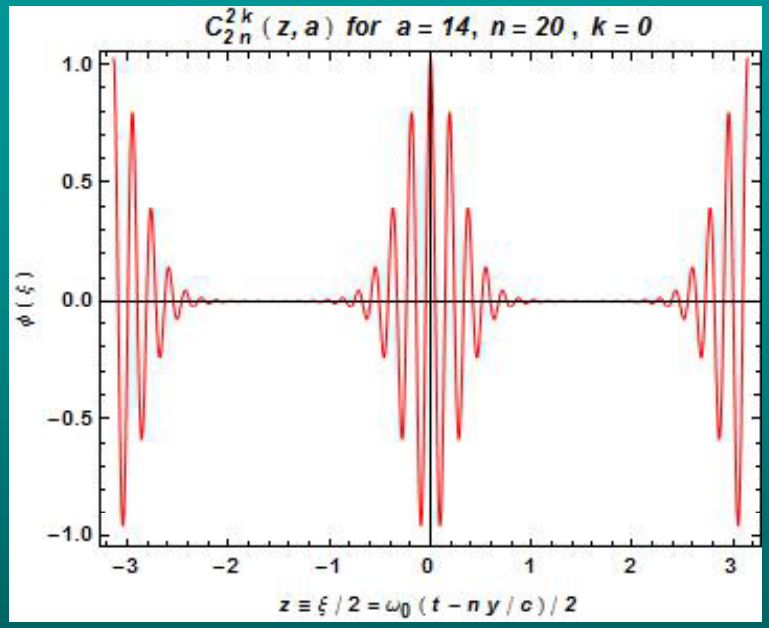
Dirac.

Klein-Gordon.

Double peak structure. Single peak structure. Oscillatory spectrum.

Hullámfüggvények. Új és Ince-polinomok



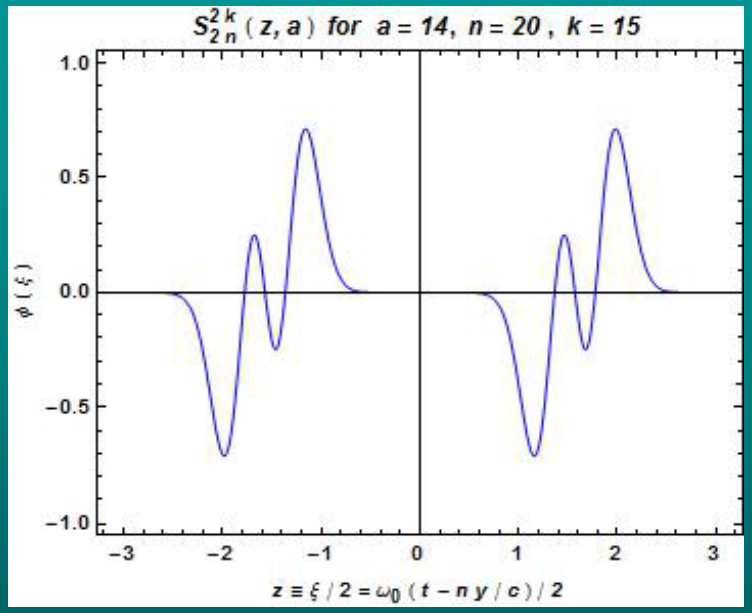


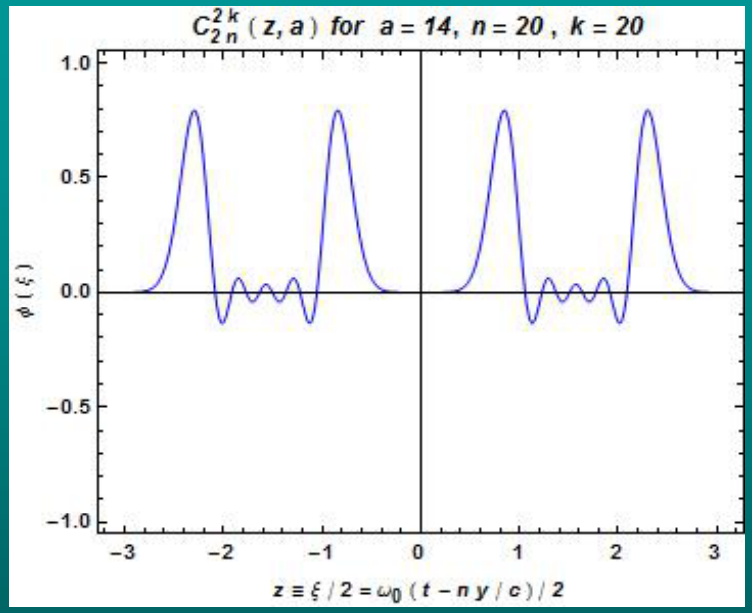
Dirac. Új komplex polinomok.

Klein-Gordon. Ince-polinomok

Hullámfüggvények. Lehetséges alkalmazás az 'önfázismoduláció' kifejtéséhez. Magasrendű felharmonikusok, attoszekundumos impulzusok.

Hullámfüggvények. Ince-polinomok





Klein-Gordon. K = 15.

Klein-Gordon. k = 20.

A negatív sajátértékekhez tartozó longitudinális impulzusok imaginériusak. Ezeket a – mc^2 és + mc2 közötti ‘gap-állapotoknak’ nevezhetjük.

Összefoglalás

1. Polinom megoldások kétszer végtelen halmaza. Klein-Gordon részecskére: Ince-polinomok. Diszkrét [$p_x=nk_p$ vagy $p_x=(n+1/2)k_p$transzverzális] és longitudinális részecskeimpulzus.

2. Alapvetően periodikus, de félegész felharmonikusok is (4π-periódusú). Csaknem 'üres tartományok' a térben; 'kvantum buborék' . Új intenzitás paraméter 'a': $a=\mu_0 \times (2mc^2/h\omega)$

3. Alkalmazások: pl. Párkeltés oszcilláló elektromos térben, Plazmás 'wake-field' gyorsító, proton-nyaláb önfázismoduláció , kvantum buborék'. Távlat: Lánczos-Proca vektorbozon leírás.

Megjegyzés. A Gordon-Volkov-féle (1927, 1935) egzakt megoldások után ~ 80 évvel ezek az első új típusú, zárt alakban kifejezhető analitikus megoldások elektromágneses síkhullámtérben.

Appendices

A Lánczos – Proca vektorbozonról

$$L(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2} \kappa_0^2 A_\mu(x) A^\mu(x)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) + \kappa_0^2 A^\nu(x) = 0$$

$$(\partial^2 + \kappa_0^2) A_\mu(x) = 0$$

Gregor Wentzel, *Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder*. (Wien, Franz Deuticke, 1943) Page 71. Kapitel III. Das vektorielle Mesonfeld. § 12. Komplexes Vakuumfeld.[1]
" [1] **Erstmal untersucht (ohne Quantisierung) von Proca: Journal de Physique 7, S. 347. 1936.**"

Białynicki-Birula, Iwo and Białynicki-Birula, Zofia, *Quantum Electrodynamics*. (Pergamon Press Ltd. and PWN – Polish Scientific Publisher, Warszawa, 1975)
On page 215 footnote:
"**Proca is usually thought to have been the first to give the classical theory of a vector field with mass (1936), but actually these equations were discovered earlier by Lanczos (1929), although in a different context."**

References.
C. Lanczos, Die tensoranalytischen Beziehungen der Diracschen Gleichung. *Zeitschrift für Physik* **57**, 447 (1929)
A. Proca, Sur la theorie ondulatoire des ́electrons positifs et negatifs, *J. Phys. Radium* **7**, 347 (1936); A. Proca, Sur la theorie du positon, C. R. Acad. Sci. Paris 202, 1366 (1936).

Some details.

$$\xi = k_\mu x^\mu = \omega(t - n_m y / c)$$

$$[\gamma \cdot \Pi - \kappa]\psi = 0 \qquad \Pi \equiv i\partial - \varepsilon A \qquad \psi = (\gamma \cdot \Pi + \kappa)\Psi$$

$$\Psi = \Psi_p(\xi)\exp(-ip \cdot x)$$

$$-k^2 \frac{d^2\Psi_p}{d\xi^2} + 2ik \cdot p \frac{d\Psi_p}{d\xi} + \left[p^2 - \kappa^2 - 2\varepsilon p \cdot A + \varepsilon^2 A^2 - \frac{1}{2}\varepsilon\sigma \cdot F \right]\Psi_p = 0$$

$$\Psi = \Psi_p^{(\pm)}(\xi)\exp\left\{ \mp i\left[p - \frac{(k \cdot p)}{k^2} k \right] \cdot x \right\} \equiv \Psi_p^{(\pm)}(\xi)\exp[\mp i(-\hat{p}\hat{x} - p_1 x_1 - p_2 x_2)]$$

$$\frac{d^2\Psi_p^{(\pm)}}{d\xi^2} + \frac{1}{-k^2}\left[-p_\xi^2 / k^2 + p^2 - \kappa^2 \mp 2\varepsilon p \cdot A + \varepsilon^2 A^2 - \frac{1}{2}\varepsilon\sigma \cdot F \right]\Psi_p^{(\pm)} = 0$$

K-G case. Ince polynomials. $\xi = k_\mu x^\mu = \omega(t - n_m y / c)$

$$[(i\partial - \varepsilon A)^2 - \kappa^2]\Phi = 0$$

$$a = 4\frac{eF_0\lambda_p}{\hbar\omega_0}$$

$$g'' + a\sin 2z g' + (\eta - qa\cos 2z)g = 0$$

$$2p_x = (q+1)k_p \qquad p_x = (n + \tfrac{1}{2})k_p \qquad 2(k\cdot p)^2 / k_p^4 = \eta_n^{(k)}$$

$$\Phi_p = \exp[i(\hat{p}\hat{x} + p_x x + p_z z)] \times \exp[-(a/4)\cos\xi] IP_n^k(\xi \mid a)$$

$$IP_n^k(\xi \mid a) \equiv \varphi_n^k(\xi \mid a, \mathrm{c}), \quad \varphi_n^k(\xi \mid a, \mathrm{s})$$

Even cosine and sine type

$$IP_n^k(\xi \mid a) \equiv \chi_n^k(\xi \mid a, \mathrm{c}), \quad \chi_n^k(\xi \mid a, \mathrm{s})$$

Odd cosine and sine type

PWFA Proposal

J. Plasma Physics (2012), *vol.* 78, *part* 4, *pp.* 347–353. © Cambridge University Press 2012
doi:10.1017/S0022377812000086

A proposed demonstration of an experiment of proton-driven plasma wakefield acceleration based on CERN SPS

G. XIA[1], R. ASSMANN[2], R. A. FONSECA[3], C. HUANG[4], W. MORI[5], L. O. SILVA[3], J. VIEIRA[3], F. ZIMMERMANN[2] and P. MUGGLI[1]
for the PPWFA Collaboration
[1]Max Planck Institute for Physics, Munich, Germany
(xiaguo@mpp.mpg.de)
[2]CERN, Geneva, Switzerland
[3]GoLP/Instituto de Plasmas e Fusao Nuclear-Laboratório Associado, IST, Lisboa, Portugal
[4]Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM, USA
[5]University of California, Los Angeles, CA, USA

(Received 20 September 2011; accepted 2 January 2012; first published online 7 February 2012)

Abstract. The proton bunch-driven plasma wakefield acceleration (PWFA) has been proposed as an approach to accelerate an electron beam to the TeV energy regime in a single plasma section. An experimental program has been recently proposed to demonstrate the capability of proton-driven PWFA by using existing proton beams from the European Organization for Nuclear Research (CERN) accelerator complex. At present, a spare Super Proton Synchrotron (SPS) tunnel, having a length of 600 m, could be used for this purpose. The layout of the experiment is introduced. Particle-in-cell simulation results based on realistic SPS beam parameters are presented. Simulations show that working in a self-modulation regime, the wakefield driven by an SPS beam can accelerate an externally injected ~10 MeV electrons to ~2 GeV in a 10-m plasma, with a plasma density of $7 \times 10^{14}\,\mathrm{cm}^{-3}$.

PWFA Proposal

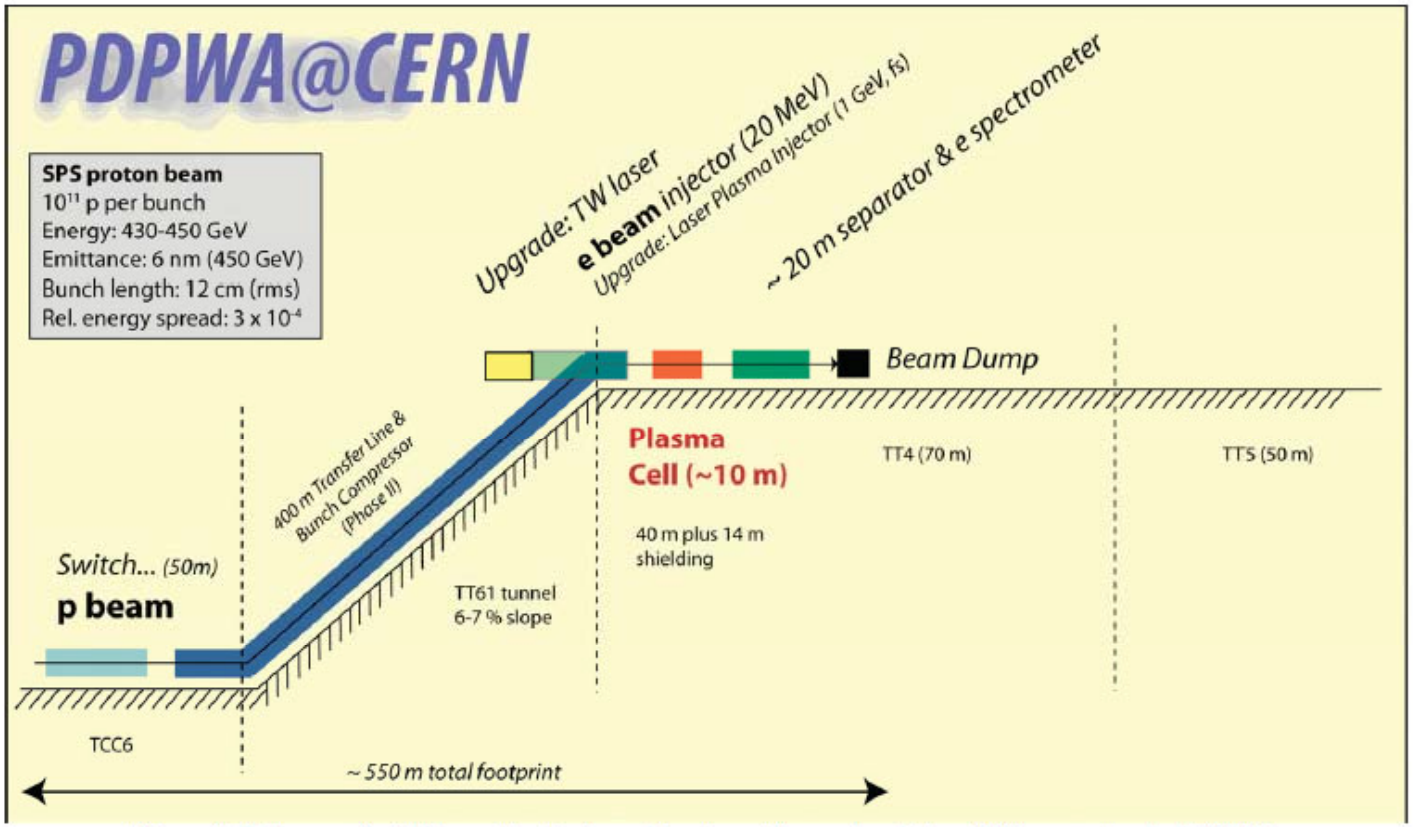


Figure 2. (Colour online) Schematic of a beam-line layout for proton-driven PWA experiment at CERN.