HPFBU

Hızlandırıcı Fiziği

Enine Demet Dinamiği II

Dr. Öznur METE

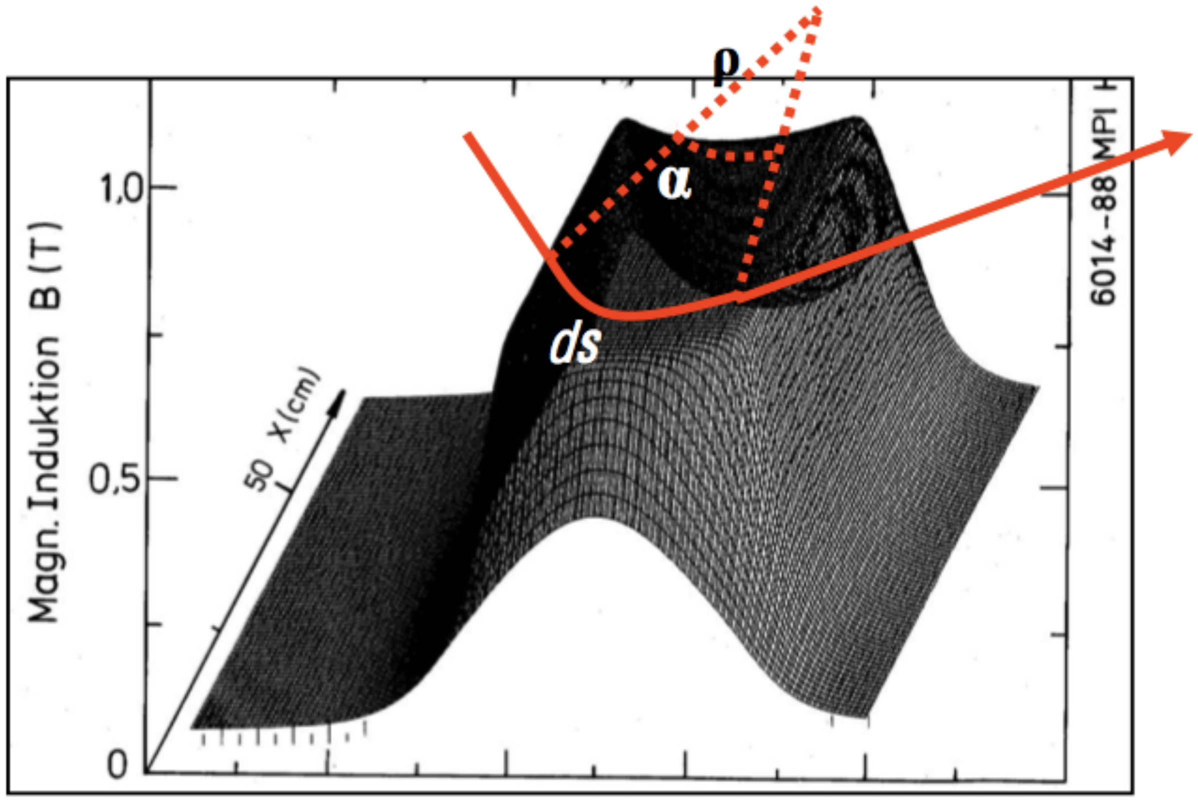
Hızlandırıcı Fizikçisi

The University of Manchester

The Cockcroft Institute of Accelerator Science and Technology

e-posta: oznur.mete@cockcroft.ac.uk   www: www.cern.ch/omete

Örgü Tasarımı ile ilgili bazı ipuçları



Bir depolama halkası dipole magnetinin magnetik alan haritası.

$$\alpha = \frac{ds}{\rho} \approx \frac{dl}{\rho} \qquad\qquad \alpha = \frac{B * dl}{B * \rho}$$

$$\alpha = \frac{\int Bdl}{B * \rho} = 2\pi \to \int Bdl = 2\pi * \frac{p}{q}$$

bir halkanın bütünü için

Dairesel Yörünge

Halka tipli bir hızlandırıcıda parçacıkları dairesel bir yörüngede tutabilmek için iki-kutuplu (dipole) magnetler kullanılır.

Temel olarak, dairesel bir hızlandırıcıda geometriyi dipole magnetler belirler.

$$\int B ds = N * B_0 * \ell_{eff} = 2\pi \frac{p}{q}$$

l_{eff} -> magnetin etkin uzunluğu, N -> magnet sayısı

Örnek: LHC Dipoles...

$N = 1232$

$l = 15m$

$q = +1e$

$$\int B dl = NlB = 2\pi p/e$$

$$B \approx \frac{2\pi 7000 * 10^9 eV}{e * 1232 * 15m * 3 * 10^8 m/s} = 8.3 Tesla$$

Periyodik örgü hücreleri için iletim matrisi

(1) $sin(a+b) = sin(a) * cos(b) + cos(a) * sin(b) \qquad cos(a+b) = cos(a) * cos(b) - sin(a)sin(b)$

(2)
$$x(s) = \sqrt{\epsilon}\sqrt{\beta_s}(cos\psi_s cos\phi - sin\psi_s sin\phi)$$
$$x'(s) = -\frac{\sqrt{\epsilon}}{\beta_s}(\alpha_s cos\psi_s cos\phi - \alpha_s sin\psi_s sin\phi + sin\psi_s cos\phi + cos\psi_s sin\phi)$$

(3) **Başlangıçta,** $x(0) = x_0, \psi(0) = 0 \qquad cos\phi = \frac{x_0}{\sqrt{\epsilon\beta_0}} \qquad sin\phi = -\frac{1}{\epsilon}(x_0'\sqrt{\beta_0} + \frac{\alpha_0 x_0}{\sqrt{\beta_0}})$

(4)
$$x(s) = \sqrt{\frac{\beta_s}{\beta_0}}(cos\psi_s + \alpha_0 sin\psi_s)x_0 + (\sqrt{\beta_s\beta_0}sin\psi_s)x_0'$$
$$x'(s) = \frac{1}{\sqrt{\beta_s\beta_0}}((\alpha_0 - \alpha_s)cos\psi_s - (1+\alpha_0\alpha_s)sin\psi_s)x_0 + \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_s}}(cos\psi_s - \alpha_s sin\psi_s)x_0'$$

(5)
$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_s}{\beta_0}}(cos\psi_s + \alpha_0 sin\psi_s) & (\sqrt{\beta_s\beta_0}sin\psi_s) \\ \frac{1}{\sqrt{\beta_s\beta_0}}((\alpha_0 - \alpha_s)cos\psi_s - (1+\alpha_0\alpha_s)sin\psi_s) & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_s}}(cos\psi_s - \alpha_s sin\psi_s) \end{pmatrix}$$

Periyodik örgü için iletim matrisinin bulunması

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_s}{\beta_0}}(cos\psi_s + \alpha_0 sin\psi_s) & (\sqrt{\beta_s\beta_0}sin\psi_s) \\ \frac{1}{\sqrt{\beta_s\beta_0}}((\alpha_0 - \alpha_s)cos\psi_s - (1+\alpha_0\alpha_s)sin\psi_s) & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_s}}(cos\psi_s - \alpha_s sin\psi_s) \end{pmatrix}$$

Periyodik örgüde bir devir sonunda Twiss parametreleri başlangıçtaki değerlerini alacaktır.

$$\beta_s = \beta_{s+L} \quad \alpha_s = \alpha_{s+L} \quad \gamma_s = \gamma_{s+L} \longrightarrow \beta_0 = \beta_s, \alpha_0 = \alpha_s,$$

M(1,1) $\quad cos\psi_{turn} + \alpha_s sin\psi_{turn}$

M(1,2) $\quad \beta_s sin\psi_{turn}$

M(2,1) $\quad -\frac{(1+\alpha_s^2)}{\beta_s} sin\psi_{turn}$

M(2,2) $\quad cos\psi_{turn} - \alpha_s sin\psi_{turn}$

$$M(s) = \begin{pmatrix} cos\psi_{turn} + \alpha_s sin\psi_{turn} & \beta_s sin\psi_{turn} \\ -\gamma_s sin\psi_{turn} & cos\psi_{turn} - \alpha_s sin\psi_{turn} \end{pmatrix}$$

Twiss parametrelerinin dönüşümü

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_s = M * \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s_0} \qquad \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 = M^{-1} * \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_s$$

$$M = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} S' & -S \\ -C' & C \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_0 &= S'x - Sx' \\ x'_0 &= -C'x + Cx' \end{aligned}}$$

$$\epsilon = constant \xrightarrow{\text{Liouville Theorem}} \begin{aligned} \epsilon &= \beta_s x'^2 + 2\alpha_s x x' + \gamma_s x^2 \\ \epsilon &= \beta_0 x_0'^2 + 2\alpha_s x_0 x'_0 + \gamma_0 x_0^2 \end{aligned}$$

- x0 ve x0' ifadelerini eşitlikte yerlerine koyalım; x ve x' cinsinden düzenleyip katsayılarını karşılaştıralım.

$$\epsilon = \beta_0(Cx' - C'x)^2 + 2\alpha_0(S'x - Sx')(Cx' - C'x) + \gamma_0(S'x - Sx')^2$$

$$\beta(s) = C^2\beta_0 - 2SC\alpha_0 + S^2\gamma_0$$

$$\alpha(s) = -CC'\beta_0 + (SC' + S'C)\alpha_0 - SS'\gamma_0$$

$$\gamma(s) = C'^2\beta_0 - sS'C'\alpha_0 + S'^2\gamma_0$$

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} C^2 & -2SC & S^2 \\ -CC' & SC' + CS' & -SS' \\ C'^2 & -SS' & S'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$$

- Twiss parametrelerinin örgünün herhangi bir noktası için verilen değerleri ve iletim matrisi kullanılarak halkanın herhangi bir noktasındaki değerleri hesaplanabilir.
- Transfer matrisi örgü bileşenlerinin odaklama özellikleri ile verilir.

Özetle...

Periyodik örgü hücreleri için iletim matrisi

$$M = \begin{pmatrix} cos\mu + \alpha(s)sin\mu & \beta(s)sin\mu \\ -\gamma(s)sin\mu & cos\mu - \alpha(s)sin\mu \end{pmatrix}$$

Kararlılık koşulu

$$Trace(M) < 2$$

Twiss parametreleri için iletim matrisi

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} C^2 & -2SC & S^2 \\ -CC' & SC' + CS' & -SS' \\ C'^2 & -SS' & S'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$$

- **İletim matrisi periyodik örgüler için basitleşiyor.**
- **Twiss parametreleri α, β, γ halka üzerindeki konuma, "s", bağlıdır. Faz ilerlemesi, μ, (phase advance) ise konumdan bağımsızdır.**

-.-.-.-.- Hatırlayalım: İnce Mercek Yaklaşımı -.-.-.-.-

Bir odaklama magneti için odak uzaklığı:

$$f_Q = \frac{1}{k_Q l_Q} \qquad f_Q = \frac{1}{k_Q l_Q} >> l_Q \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_Q} & 1 \end{pmatrix}$$

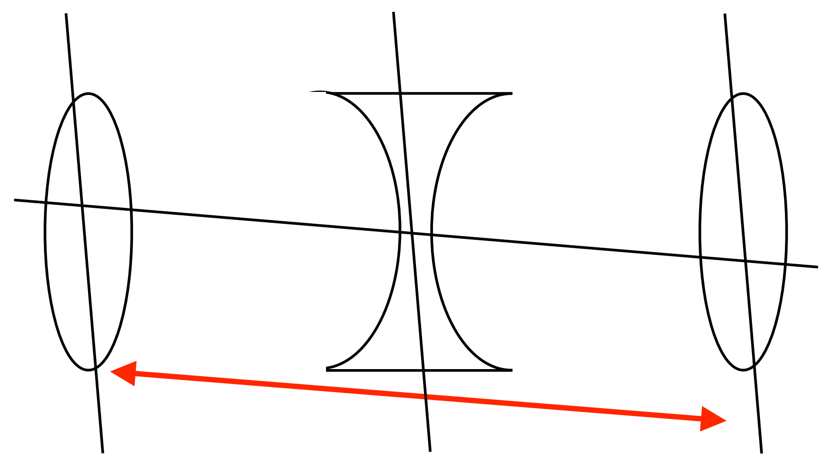
Ayar: (= 2π'ler cinsinden evre ilerlemesi)

$$Q := N * \frac{\mu}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} * \oint \frac{ds}{\beta(s)} \approx \frac{1}{2\pi} * \frac{2\pi \bar{R}}{\bar{\beta}} = \frac{\bar{R}}{\bar{\beta}} \qquad \mu = \int_s^{s+L} \frac{dt}{\beta(t)}$$

Kabaca bir yaklaşımla...

$\bar{R}, \bar{\beta}$ -> sırasıyla, ortalama yarıçap ve beta fonksiyonu $Q = \frac{\bar{R}}{\bar{\beta}}$

-.-.-.-.- Hatırlayalım: FODO Hücresi -.-.-.-.-



$$M_{FoDo} = M_{QF} * M_D * M_{QD} * M_D * M_{QF}$$

$$M_{QF} = \begin{pmatrix} cos\sqrt{|K|}s & \frac{1}{\sqrt{|K|}} sin\sqrt{|K|}s \\ -\sqrt{|K|} sin\sqrt{|K|}s & cos\sqrt{|K|}s \end{pmatrix}$$

$$M_D = \begin{pmatrix} 1 & l_d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

-.-.-.-.- FODO Hücresi -.-.-.-.-

İnce mercek yaklaşımı altında bir FODO hücresinin iletim matrisi:

$$M_{FoDo} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l^2}{2f^2} & 2l(1 - \frac{l}{2f}) \\ -\frac{l}{2f^2}(1 + \frac{l}{2f}) & 1 - \frac{l^2}{2f^2} \end{pmatrix}$$

Evre ilerlemesinin FODO parametreleri cinsinden ifade edilmesi:

$$cos(\mu) = \frac{1}{2}(1 - \frac{l_d^2}{2\tilde{f}^2} + 1 - \frac{l_d^2}{2\tilde{f}^2})$$

$$1 - 2sin^2(\mu/2) = (1 - \frac{l_d^2}{2\tilde{f}^2})$$

$$\boxed{sin(\mu/2) = \frac{L_{Cell}}{4f}}$$

Burada f yarım bir dört kutupluya ait odak uzaklığını vermektedir.

$$\tilde{f} = 2f$$

$$l_D = L_{Cell}/2$$

-.-.-.-.- FODO Hücresi -.-.-.-.-

Dört-kutuplu magnetlerin kuvveti ve magnet uzunlukları

$$K = \pm 0.54102 m^{-2}$$
$$l_q = 0.5m$$
$$l_d = 2.5m$$

$$M_{FoDo} = \begin{pmatrix} 0.707 & 8.206 \\ -0.061 & 0.707 \end{pmatrix}$$

FODO hücresinin kararlılığı

$$Trace(M_{FoDo}) = 1.415 \rightarrow < 2$$

Hücre başına evre ilerlemesi

$$M(s) = \begin{pmatrix} cos\psi_{turn} + \alpha_s sin\psi_{turn} & \beta_s sin\psi_{turn} \\ -\gamma_s sin\psi_{turn} & cos\psi_{turn} - \alpha_s sin\psi_{turn} \end{pmatrix}$$

$$cos(\mu) = \frac{1}{2} * Trace(M_{FoDo}) = 0.707$$
$$\mu = arccos(\frac{1}{2} * Trace(M_{FoDo})) = 45^o$$

Alpha, beta fonksiyonları

$$\alpha = \frac{M(1,1) - cos(\mu)}{sin(\mu)} = 0 \qquad \beta = \frac{M(1,2)}{sin(\mu)} = 11.611m$$

Özetle...

FODO hücresi başına faz ilerlemesi
(ince mercek yaklaşımı altında)

$$sin\frac{\mu}{2} = \frac{L_{Cell}}{4f_Q}$$

FODO hücresi için kararlılık

$$f_Q > \frac{L_{Cell}}{4}$$

L_{Cell} , FODO hücresinin uzunluğu
f_Q , dört kutuplunun odak uzaklığı
μ , hücre başına evre ilerlemesi

FODO hücresinde beta fonksiyonları (ince mercek yaklaşımı altında)

Hatırlayalım...

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_s}{\beta_0}}(cos\psi_s + \alpha_0 sin\psi_s) & (\sqrt{\beta_s\beta_0} sin\psi_s) \\ \frac{1}{\sqrt{\beta_s\beta_0}}((\alpha_0 - \alpha_s)cos\psi_s - (1+\alpha_0\alpha_s)sin\psi_s) & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_s}}(cos\psi_s - \alpha_s sin\psi_s) \end{pmatrix}$$

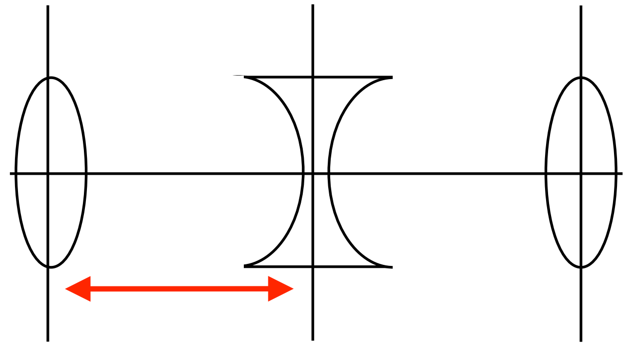
- FODO hücresindeki bir odaklayıcı (dağıtıcı) magnetin tam ekseninde $\alpha = 0$.
- Buna göre hücrenin ilk yarısı boyunca beta fonksiyonu β_{max}'dan β_{min}'a doğru evrilecektir.

$$M = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\check{\beta}}{\hat{\beta}}} cos\mu/2 & (\sqrt{\check{\beta}\hat{\beta}} sin\mu/2) \\ -\frac{1}{\sqrt{\hat{\beta}\check{\beta}}} sin\mu/2) & \sqrt{\frac{\hat{\beta}}{\check{\beta}}} cos\mu/2 \end{pmatrix}$$

back...

FODO hücresinde beta fonksiyonları (ince mercek yaklaşımı altında)

Bir FODO hücresinde odaklayıcı magnetten dağıtıcı magnete doğru ilerleyelim...



$$M = \begin{pmatrix} 1-\frac{l_d}{2f} & l_d \\ -\frac{l_d}{4f^2} & 1+\frac{l_d}{2f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\check\beta}{\hat\beta}} cos\mu/2 & (\sqrt{\check\beta\hat\beta} sin\mu/2) \\ -\frac{1}{\sqrt{\hat\beta\check\beta}} sin\mu/2) & \sqrt{\frac{\hat\beta}{\check\beta}} cos\mu/2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{S'}{C} = \frac{\hat\beta}{\check\beta} = \frac{1+\frac{l_d}{2f}}{1-\frac{l_d}{2f}} = \frac{1+sin\mu/2}{1-sin\mu/2}$$

$$\frac{S}{C'} = \hat\beta\check\beta = 4f^2 = \frac{l_d^2}{sin^2\mu/2}$$

$$\boxed{\hat B = \frac{(1+sin\frac{\mu}{2})L_{Cell}}{sin\mu} \qquad \check B = \frac{(1-sin\frac{\mu}{2})L_{Cell}}{sin\mu}}$$

Ek olarak...

FoDo Hücresi için Dağılım ifadesi

$$\hat{D} = \frac{l^2}{\rho} * \frac{1 + \frac{1}{2} sin\frac{\mu}{2}}{sin^2\frac{\mu}{2}}$$

$$\check{D} = \frac{l^2}{\rho} * \frac{1 - \frac{1}{2} sin\frac{\mu}{2}}{sin^2\frac{\mu}{2}}$$

düşük dağılım:
zayıf dipoller
geniş eğim açısı
kısa hücreler
güçlü odaklama

Bir hücrenin renklilik ifadesi

$$Q'_{total} = -\frac{1}{4\pi} \oint (K(s) - mD(s))\beta(s)ds$$

düşük renklilik:
zayıf odaklama
küçük β

Özetle...

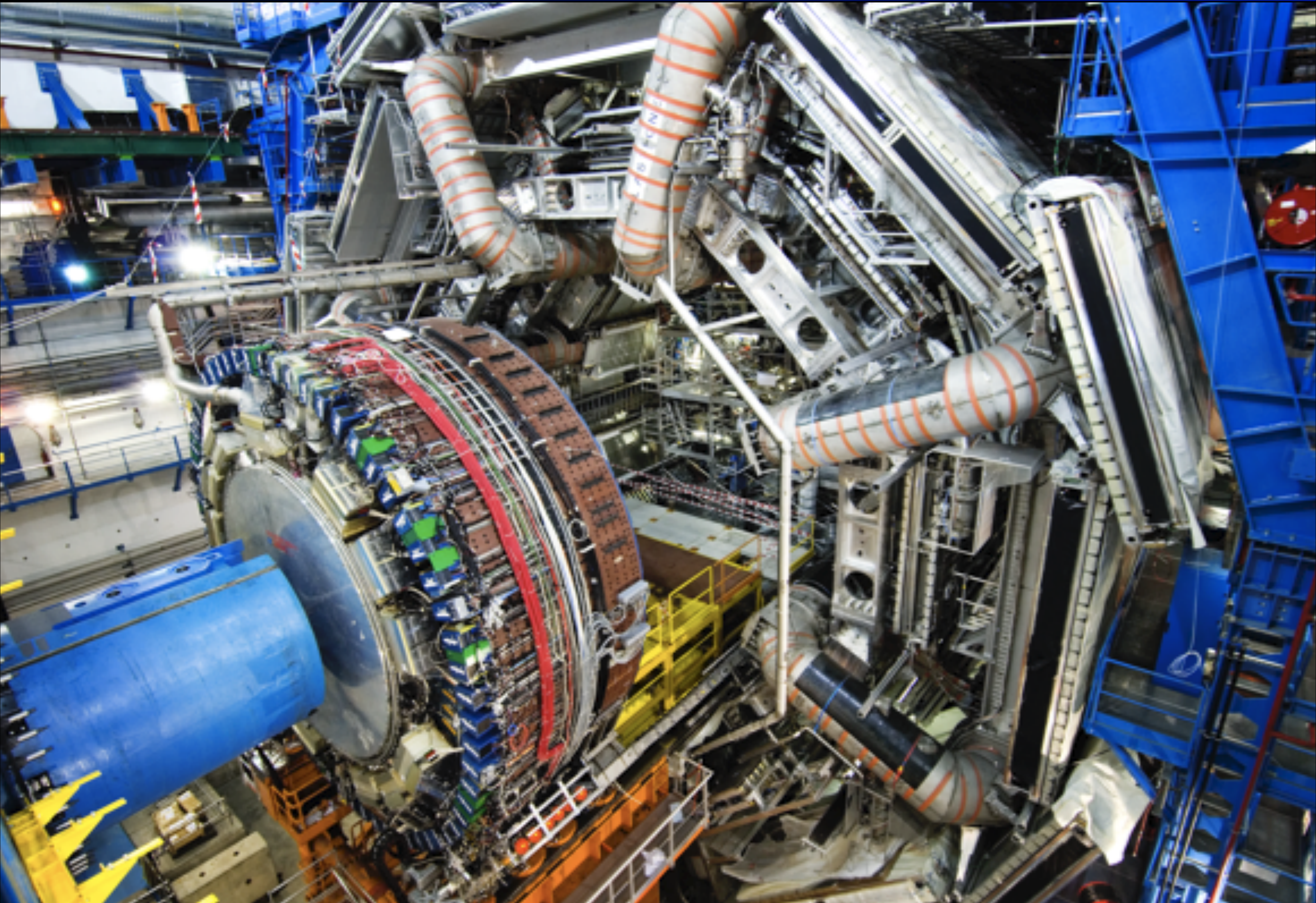
- Bir göreli yüklü parçacık demeti için depolama haklası "yayı" genellikle düzenli tekrarlayan tekli magnet öğelerinden oluşur. Örnek: FODO örgüsü.
- Yaydaki demet parametreleri için birincil bir öngörüyü bu bölgedeki dört kutuplulardaki değerlerinden edinebiliriz.

Bundan sonra...

Küçük bir ayrıntı!

Ara eklentiler (Insertions)!!

CERN Atlas Deneyi



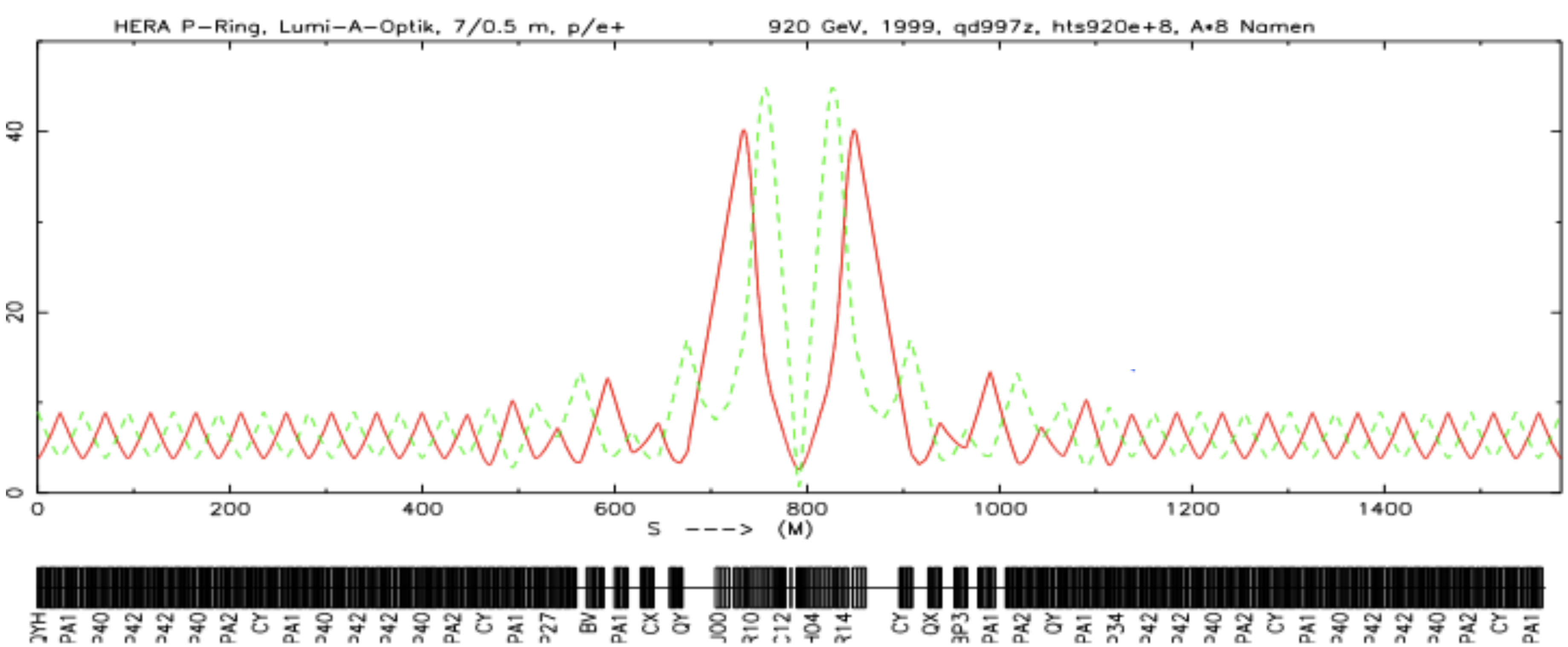
Ufak β'lı ara eklentiler

- Yaydaki **zamanda düzenli (periyodik) çözümü** hesaplayalım.
- Ara eklenti için kullanılmak üzere **sürüklenme boşluğu** ekleyelim (algıç, RF malzemesi, ölçüm aletleri...).
- Etkileşme noktasına olabildiğince yakın bir yere bir **dört kutuplu (quadrupole)** yerleştirelim.
- Demet parametrelerini yayın başlangıcına denklemek için ek **dörtlü kutuplu mercekleri** yerleştirebiliriz.
- Bunun için yeğleştirilecek (optimization) ve denkleştirilecek parametreler: $\alpha_{x,y}, \beta_{x,y}, Q_{x,y}, D_x, D'_x$

Etkileşim noktasındaki parametreler:

$$L = \frac{1}{4\pi}\frac{f_{rev}N_1N_2}{\boxed{\sigma_x^*\sigma_y^*}}$$

Daha fazlası...
Dağılım bastırıcı düzenekler...
(dispersion suppressors)



Örnek Alıştırmalar
ve
Ödevler

Bu alıştırmada...

- 20 GeV/c momentumlu gercekci bir proton hızlandırıcısı tasarlayınız. Aşağıda verilen parametreleri kullanınız:
    - Çevre = 1000 m
    - Kullanılacak dört-kutuplu magnetlerin uzunluğu = 3.0 m
    - Hızlandırıcınızı 8 tane FODO hücresi kullanarak tasarlayınız.
    - Kullanılacak eğici magnetlerin uzunluğu 5 m, maksimum alanları 3 T
- Önceki derslerde öğrendiklerinizi kullanarak:
    - Sınır koşullarına göre (eğici ve odaklayıcı magnetlerin konumu) bir örgü tanımlayınız.
    - Maksimum beta fonksiyonu değerinin 300 m civarında olmasını sağlayacak optik değerlerini (eğici ve odaklayıcıların kuvveti) hesaplayınız. $\beta_{max} \equiv \hat{\beta}$
    - Modelinizi "ince mercek yaklaşımı" kullanarak MADX'e uygulayacağız. Sonuçları hesaplarınızla karşılaştıracağız.