

Aide-mémoire :  
unités, formules et ordres de grandeur

Stage des professeurs de sciences physique au CERN

Nicolas Arnaud ([narnaud@lal.in2p3.fr](mailto:narnaud@lal.in2p3.fr))  
Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire, CNRS/IN2P3 et Université Paris-Sud  
Claire Bonnoit-Chevalier ([claire.bonnoit@obspm.fr](mailto:claire.bonnoit@obspm.fr))  
Sciences à l'École  
Sébastien Descotes-Genon ([Sebastien.Descotes-Genon@th.u-psud.fr](mailto:Sebastien.Descotes-Genon@th.u-psud.fr))  
Laboratoire de Physique théorique, CNRS et Université Paris-Sud

6 décembre 2014 (Version 2)

## 1 Relativité Restreinte

- Vitesse de la lumière dans le vide :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

C'est une constante, utilisée pour définir le mètre à partir de la seconde.

- Soit  $v$  la vitesse de la particule, on pose

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{1}$$

$c$  est une vitesse limite indépassable, atteinte uniquement pour les particules de masse nulle (comme le photon). Pour toutes les particules massives, on a forcément  $\beta \in [0; 1[$ .

Dit autrement : masse nulle  $\Leftrightarrow \beta = 1$  ( $v = c$ ).

- On définit également le facteur de Lorentz :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{2}$$

$\gamma \geq 1$  : le facteur de Lorentz vaut 1 pour  $\beta = 0$  et tend vers  $+\infty$  quand  $v \rightarrow c$  (ou, de manière équivalente,  $\beta \rightarrow 1$ ).

- Une particule élémentaire acquiert sa masse en interagissant avec le champ de Higgs. Plus cette interaction est forte et plus la masse de la particule est importante. Par contre, il n'y a actuellement pas d'explication à la hiérarchie des masses telle qu'observée dans la Nature – plus de 11 ordres de grandeur entre les particules élémentaires les plus légères, les neutrinos ( $m < 1 \text{ eV}/c^2$ ) et le quark top ( $m \sim 173 \text{ GeV}/c^2$ , soit l'équivalent d'un noyau d'or). Le boson de Higgs est une particule associée au champ de Higgs mais qui ne joue pas le rôle d'un boson médiateur d'interaction.
- Par contre, la masse d'une particule composite formée de quarks – comme le proton et le neutron – est essentiellement due à l'énergie de liaison (positive!) de l'interaction forte qui lie les quarks au sein des hadrons.
- L'impulsion  $\vec{p}$  d'une particule de masse  $m$  est donnée par

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} \quad (3)$$

- Et la formule d'Einstein "générale" définissant l'énergie  $E$  de la particule est :

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \quad (4)$$

- On en déduit les relations suivantes

$$E = mc^2\gamma \quad (5)$$

$$\frac{E}{pc} = \frac{1}{\beta} \quad (6)$$

- Pour une particule de masse nulle, énergie  $E$  et impulsion  $p$  sont reliées par la relation

$$E = pc \quad (7)$$

comme le montrent les équations (4) (cas  $m = 0$ ) et (6) (cas  $\beta = 1$ ).

- A petite vitesse,  $\beta \ll 1$ , l'équation (5) donne :

$$E \approx mc^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right) \right] \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (8)$$

On retrouve donc l'expression de l'énergie cinétique "classique".

Energie thermique d'une molécule	0.04 eV
Lumière visible	1.5-3.5 eV
Energie de dissociation NaCl en ions	4.2 eV
Energie d'ionisation d'un atome d'hydrogène	13.6 eV
Energie d'un électron frappant un écran cathodique	20 keV
Rayons X pour la médecine	0.2 MeV
Rayonnements nucléaires ( $\alpha, \beta, \gamma$ )	1-10 MeV
Energie de masse d'un proton	1 GeV
Énergie de collision au LHC	7-14 TeV
Rayons cosmiques	1 MeV à 1000 TeV

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}, 1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}, 1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$$

FIGURE 1 – Ordres de grandeur des énergies mises en jeu pour différents processus physiques.

## 2 Electron-volt (eV) et toutes les unités dérivées

- Définition : l'électron-volt (eV) est l'énergie gagnée par un électron accéléré par une différence de potentiel de 1 volt.

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Particule	Électron	Proton	Neutron
Masse	511 keV/c <sup>2</sup>	938 MeV/c <sup>2</sup>	940 MeV/c <sup>2</sup>

TABLE 1 – Masses des constituants des atomes

- "L'électron-volt/c<sup>2</sup>" (eV/c<sup>2</sup>) est homogène à une masse :

$$1 \text{ eV}/c^2 = 1.783 \times 10^{-36} \text{ kg} \quad (9)$$

Application numérique : le facteur de Lorentz des protons du LHC accélérés à 4 TeV en 2012 vaut, d'après l'équation (5) et la table 1,

$$\gamma = \frac{4 \text{ TeV}}{(938 \text{ MeV}/c^2) \times c^2} \approx 4264.4 \quad (10)$$

- "L'électron-volt/c" (eV/c) est homogène à une impulsion.

- La longueur d'onde  $\lambda_{\text{Broglie}}$  de de Broglie d'une particule est reliée à son impulsion  $p$  par la formule :

$$\lambda_{\text{Broglie}} = \frac{h}{p} \quad (11)$$

où  $h$  est la constante de Planck :

$$h \approx 6.63 \times 10^{-34} \text{ J.s} \approx 4.14 \times 10^{-15} \text{ eV.s}$$

Cette relation a été postulée par de Broglie en rapprochant l'équation (7) de la relation  $E = h\nu$  reliant l'énergie d'un photon et la fréquence de l'onde électromagnétique associée.

Un faisceau de particules d'impulsion  $p$  de l'ordre du GeV/c peut donc sonder la matière jusqu'au femtomètre environ :

$$\lambda_{\text{Broglie}} = 1.24 \times 10^{-15} \text{ m} \left( \frac{1 \text{ GeV}/c}{p} \right) \quad (12)$$

L'équation (12) est une simple réécriture de l'équation (11) dans laquelle on a fait apparaître des valeurs caractéristiques pour les grandeurs reliées par cette formule. Le même procédé sera réutilisé plusieurs fois dans la suite du document.

- On peut également associer une seconde longueur d'onde, la longueur d'onde Compton, à une particule de masse  $m$  :

$$\lambda_{\text{Compton}} = \frac{h}{mc} \quad (13)$$

C'est la longueur d'onde d'un photon qui aurait une énergie égale à l'énergie de masse de la particule. Ce facteur intervient dans de nombreuses équations en mécanique quantique. On peut également l'interpréter comme l'ordre de grandeur de l'incertitude sur la position d'une particule de masse  $m$  : environ  $10^{-15}$  m pour un proton et  $2 \cdot 10^{-12}$  m pour un électron.

- Par la constante de Boltzmann

$$k_B = 1.3806488(13) \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} = 8.6173324(78) \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$$

on peut relier eV et K :

$$1 \text{ eV} \leftrightarrow 11605 \text{ K} \quad (14)$$

Application numérique : un photon de température  $T = 2,7 \text{ K}$  a pour longueur d'onde

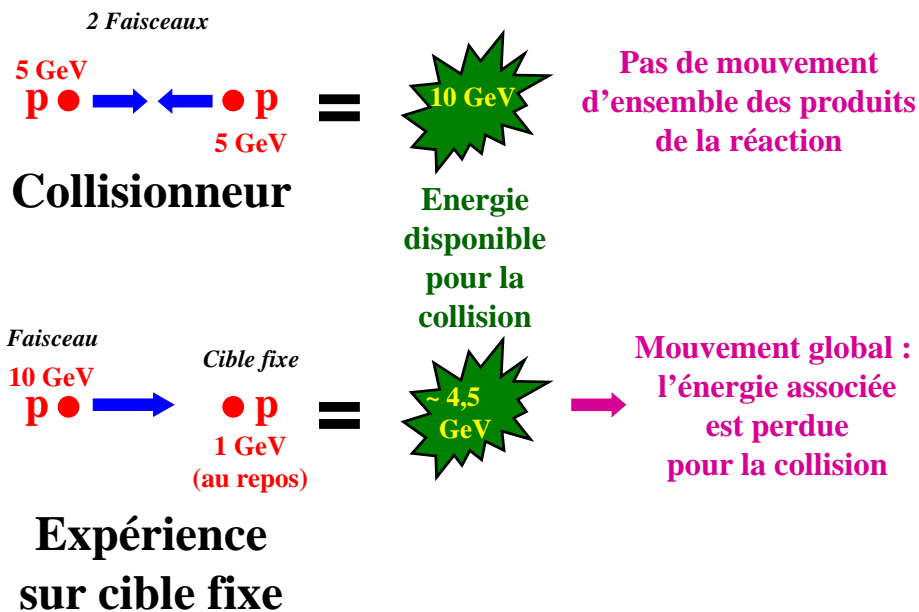


FIGURE 2 – Collisionneur et expérience sur cible fixe.

$$\lambda = \frac{hc}{k_B T} = 1.4 \text{ cm}$$

Cette température correspond à celle du CMB dont le rayonnement est dit "de corps noir". La loi de Wien donne la longueur d'onde du pic d'émission en fonction de la température du corps noir – le seul paramètre libre du spectre.

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} &= \frac{hc}{4.965k_B T} = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \left( \frac{1 \text{ K}}{T} \right) \\ &= 1.1 \text{ mm pour le CMB.} \end{aligned}$$

### 3 Energie des collisions et luminosité d'un collisionneur

- Soient deux particules (1) et (2) de mêmes masses  $m$ , d'impulsions  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$ , et d'énergies  $E_1$  et  $E_2$ . Par convention, on note  $\sqrt{s}$  l'énergie disponible pour produire des particules lors de la collision (1)-(2). On se place dans le référentiel du laboratoire pour effectuer les calculs qui suivent.

- Cas d'un faisceau ( $E_1 = E$ ) envoyé sur une cible fixe ( $\vec{p}_2 = \vec{0}$  et  $E_2 = mc^2$ ) :

$$\sqrt{s} = \sqrt{2mc^2(mc^2 + E)} \quad (15)$$

$$\approx \sqrt{2mc^2 E} \text{ si } E \gg mc^2 \quad (16)$$

- Cas d'une collision frontale entre faisceaux de mêmes énergies :  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0}$ ,  $E_1 = E_2 = E$

$$\sqrt{s} = 2E \quad (17)$$

- Le rapport entre ces deux énergies est clairement à l'avantage du collisionneur, et ce d'autant plus que les particules sont relativistes :

$$\frac{(\sqrt{s})_{\text{Collisionneur}}}{(\sqrt{s})_{\text{Cible fixe}}} \approx \sqrt{\frac{2E}{mc^2}} \approx 14.1 \sqrt{\left(\frac{E}{100 \text{ GeV}}\right) \left(\frac{1 \text{ GeV}/c^2}{m}\right)} \quad (18)$$

- Lorsqu'on a une collision frontale entre deux particules d'énergies différentes mais très relativistes, l'équation (17) devient

$$\sqrt{s} \approx 2\sqrt{E_1 E_2} \quad (19)$$

- Luminosité, etc.

- La probabilité d'occurrence d'un processus physique donné – par exemple la création d'un boson de Higgs au LHC – est définie par sa "section efficace" ( $\sigma$ ) homogène à une surface (et exprimée en  $\text{cm}^2$ ) : c'est une quantité "imposée" par la physique et sur laquelle les physiciens n'ont aucune prise.
- Le taux d'occurrence  $R$  de ce processus dans un collisionneur (c'est-à-dire le nombre de fois où il se produit par unité de temps : on l'exprime en Hz) se calcule par la formule

$$R = \sigma \times \mathcal{L} \quad (20)$$

où  $\mathcal{L}$  est la luminosité du collisionneur, exprimée en  $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ . Au contraire de la section efficace  $\sigma$ ,  $\mathcal{L}$  est une quantité variable qui dépend de la qualité de l'ensemble de la chaîne accélératrice : création

et mise en forme des paquets de particules, processus d'accélération et configuration magnétique du collisionneur.

- Schématiquement, la luminosité d'un collisionneur  $\mathcal{L}$  est donnée par la formule

$$\mathcal{L} \propto \frac{N_1 \times N_2 \times n_{\text{paquets}} \times f_{\text{revol}}}{\sigma_{\text{transverse}}^*} \quad (21)$$

où  $N_i$  est le nombre de particules par paquet du faisceau (i),  $n_{\text{paquets}}$  est le nombre de paquets de particules circulant dans chaque faisceau,  $f_{\text{revol}}$  est la fréquence de révolution des faisceaux et  $\sigma_{\text{transverse}}^*$  est la taille transverse du faisceau (c'est-à-dire sa surface dans le plan perpendiculaire à la direction des faisceaux) au point de collisions. Cette formule est logique : plus il y a de particules dans l'anneau de collisions, plus elles se rencontrent souvent ; et plus les paquets sont "concentrés", et plus il y a de collisions.

- Les physiciens utilisent souvent le barn (b) comme unité de surface :

$$1\text{b} = 10^{-28} \text{ m}^2 = 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad (22)$$

Bien que le barn soit déjà une petite unité, les sections efficaces de processus très rares comme la production du boson de Higgs  $H$  s'expriment en (petits) sous-multiples du barn. Ainsi,

$$\sigma [pp \rightarrow H + X] \approx 22 \text{ pb} \quad (23)$$

pour une masse du boson de Higgs  $m_H \approx 125 \text{ GeV}/c^2$  et une énergie de 8 TeV pour les collisions. Dans cette équation,  $X$  désigne de manière générique tout ensemble de particules produit en association avec un boson de Higgs.

- Combien de bosons de Higgs sont produits au LHC en une seconde ? Il suffit d'appliquer l'équation (20) en prenant une valeur typique pour la luminosité du LHC :

$$\begin{aligned} R [pp \rightarrow H + X] &= 22 \cdot 10^{-36} \text{ cm}^2 \times 5 \cdot 10^{33} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \left( \frac{\mathcal{L}}{5 \cdot 10^{33} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}} \right) \\ &= 0.11 \text{ Hz} \left( \frac{\mathcal{L}}{5 \cdot 10^{33} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

Donc on ne produit qu'une poignée de bosons de Higgs par minute au LHC ! Ce qui est vraiment très peu comparé aux dizaines de millions de croisements de paquets qui s'y produisent chaque seconde, lesquels donnent chacun plus d'une dizaine de collisions en

moyenne. Les événements intéressants sont sélectionnés en temps réel par un système de déclenchement complexe, à la fois drastique et très efficace.

- Une analyse recherchant le boson de Higgs utilise en général un canal particulier de désintégration de cette particule : par exemple le Higgs en deux photons,  $H \rightarrow \gamma\gamma$ . Son rapport de branchement, c'est-à-dire la probabilité que le Higgs se désintègre de cette manière, n'est que de 0.2%. Mais la signature d'un tel événement est "propre" – deux photons énergétiques détectés dans le calorimètre électromagnétique sans trace chargée alignée – et le "bruit de fond irréductible" associé (les désintégrations d'autres particules que le Higgs mais dont la signature expérimentale est très proche) est contrôlable, d'où l'intérêt de ce canal. En prenant ce rapport de branchement, on tombe à environ un événement par heure contenant la désintégration  $H \rightarrow \gamma\gamma$ .
- Et ce n'est pas tout ! Pour obtenir le taux réel d'évènements  $H \rightarrow \gamma\gamma$  enregistrés par le détecteur, il faut encore tenir compte de deux effets. D'une part l'acceptance, c'est-à-dire la probabilité que les deux photons produits soient effectivement détectables : ceux qui traversent une zone non instrumentée du détecteur ou un élément qui ne fonctionne pas sont perdus pour toujours. Et d'autre part l'efficacité de sélection d'un tel événement par le *trigger* de l'expérience, qui sélectionne en temps réel les quelques centaines d'évènements "intéressants" parmi les 20 millions de croisements de paquets proposés chaque seconde par le LHC.
- Pour achever d'embrouiller le non-spécialiste, les physiciens des particules ont l'habitude d'utiliser le  $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$  pour la luminosité instantanée et le "barn<sup>-1</sup>" pour la luminosité intégrée :

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \int \epsilon(t) \mathcal{L}(t) dt \quad (25)$$

où  $\epsilon(t)$  est une fonction valant 0 ou 1 à chaque instant et qui quantifie le "rendement" de l'accélérateur – lequel ne fournit pas des collisions 24h/24 pour des raisons variées : perte de faisceau, injection de particules dans le collisionneur, réglage, réparation d'un élément, etc.

Prenons à nouveau  $5 \cdot 10^{33} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  comme luminosité instantanée moyenne et supposons que le collisionneur a fonctionné avec un cycle utile de 50% pendant trente jours.



$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_{\text{int}} &= 50\% \times 5 \cdot 10^{33} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1} \times 30 \text{ jours} \times 24 \text{ heures} \times 3600 \text{ s} \\
&= 6.48 \cdot 10^{39} \text{ cm}^{-2} \\
&= 6.48 \text{ fb}^{-1} \left( \frac{\text{Cycle utile}}{50\%} \right) \left( \frac{\text{Lumi}}{5 \cdot 10^{33} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}} \right) \left( \frac{\text{Temps}}{30 \text{ jours}} \right)
\end{aligned}$$

La luminosité intégrée est un facteur multiplicatif commun pour calculer les taux d'occurrence de tous les processus. C'est donc ce paramètre qu'on utilise pour rendre compte des performances d'un collisionneur pendant la durée d'une prise de données. Ainsi, le LHC a fourni environ  $23 \text{ fb}^{-1}$  de données à ATLAS et à CMS en 2012. Dans le même temps, les expériences ont récolté un petit peu moins de données car leur cycle utile est de l'ordre de 90%.

## 4 Formules diverses sur les collisionneurs

- Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme.

Dans le plan perpendiculaire au champ, la particule effectue un mouvement circulaire dont le rayon  $R$  (en mètres) est relié à l'impulsion de la particule dans ce plan,  $p$  (en GeV/c), et à l'intensité du champ magnétique  $B$  (exprimé en tesla) :

$$R = \frac{1}{0.3} \left( \frac{p}{1 \text{ GeV}/c} \right) \left( \frac{1 \text{ tesla}}{B} \right) \quad (26)$$

En utilisant les paramètres du LHC en 2012, on obtient :

$$R = 2.80 \text{ km} \left( \frac{p}{4 \text{ TeV}/c} \right) \left( \frac{4.76 \text{ T}}{B} \right) \quad (27)$$

une valeur très proche des 2805 mètres du "vrai" rayon de courbure des arcs du LHC – rappel : le LHC n'est pas un cercle ! Il se compose de 8 arcs et de 8 sections droites alternés.

- La puissance  $P$  perdue par une particule (charge  $q$ , masse  $m$ , énergie  $E$  et rayon de courbure  $R$ ) sous l'effet du rayonnement synchrotron est donnée par l'équation :

$$P = \frac{2cq^2}{12\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^4 \quad (28)$$

On reconnaît dans la parenthèse le facteur de Lorentz  $\gamma$  élevé à la puissance 4. À énergie et rayon de courbure constants, un proton rayonne beaucoup donc moins qu'un électron par effet synchrotron :

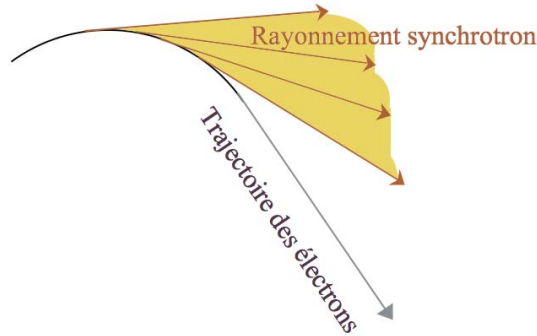


FIGURE 3 – Rayonnement synchrotron émis par un faisceau d'électrons accélérés.

$$\frac{P_{\text{electron}}}{P_{\text{proton}}} = \left( \frac{938 \text{ MeV}}{511 \text{ keV}} \right)^4 = 11.35 \cdot 10^{12} \quad (29)$$

En prenant  $R = 2805 \text{ m}$  (le rayon de courbure des arcs du LHC) on obtient :

$$P = 3.65 \cdot 10^{-8} \text{ eV/s} \left( \frac{2805 \text{ m}}{R} \right)^2 \gamma^4 \quad (30)$$

Au LEP (le grand collisionneur électron-positron qui fut en service entre 1989 et 2000 dans le tunnel qui abrite maintenant le LHC) les électrons et positrons accélérés ont atteint l'énergie record de 104.5 GeV. D'où :

$$\gamma_{\text{LEP}} = \frac{104.5 \text{ GeV}}{511 \text{ keV}} = 204501 \quad (31)$$

et

$$P_{\text{LEP}} = 63837.3 \text{ GeV/s} \quad (32)$$

soit largement plus que l'énergie de la particule! D'où la nécessité d'avoir un système accélérateur radio-fréquence (RF) qui apporte à chaque tour l'énergie perdue par rayonnement synchrotron :

$$P_{\text{LEP}}/11245 = 5.7 \text{ GeV/tour} \quad (33)$$

Au LEP les leptons accélérés perdaient donc quelques pourcents de leur énergie à chaque tour à cause du rayonnement synchrotron! Pour un proton du LHC à 4 TeV, le facteur de Lorentz vaut environ 4264.4 – cf. équation (10). D'où :

$$P_{\text{LHC}} = 12.07 \text{ MeV/s} \quad (34)$$

$$= 1.07 \text{ keV/tour} \quad (35)$$

En passant de 4 TeV (énergie de la prise de données 2012) à 7 TeV (énergie nominale du LHC), la puissance rayonnée par effet synchrotron augmentera d'un facteur  $\approx 10$ .

Un autre élément à prendre en compte pour comparer les cas du LEP et du LHC est le courant qui circule dans les collisionneurs – tous les calculs précédents ne concernaient qu'une seule particule, alors que la perte globale par rayonnement synchrotron est proportionnelle au courant. En 2012, les faisceaux du LHC avaient environ 10 fois plus de courant que ceux du LEP et une augmentation importante des courants est prévue dans le futur.