

Une visite guidée du Lagrangien du Modèle Standard

Sébastien Descotes-Genon

*Laboratoire de Physique Théorique,
UMR 8627, CNRS/Univ. Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France*

descotes@th.u-psud.fr

Lors de votre passage au CERN, en plus de l'omniprésent et fondamental $E = mc^2$, vous avez l'occasion de croiser une équation qui incarne le Modèle Standard de la physique des particules. Cette écriture très condensée de notre vision du monde subatomique prend la forme suivante:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\not{D}\psi + \bar{\psi}_iy_{ij}\phi\psi_j + h.c. + |D^\mu\phi|^2 + V(\phi) \quad (1)$$

Il est possible de dériver le comportement de toutes les constituants élémentaires de la matière, pour celui ou celle qui sait lire ce Lagrangien avec de bonnes “lunettes”. Voici une brève visite guidée de cette “équation maîtresse”.

Un **Lagrangien** est une quantité qui prend une valeur particulière en chaque point de l'espace et du temps, et qui correspond essentiellement à la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle d'un système. On peut construire une quantité, l'action S , obtenue en intégrant ce Lagrangien le long d'une trajectoire donnée. En mécanique classique, la trajectoire $\vec{r}(t)$ effectivement choisie par un système est un extremum de l'action: on a $\delta S = 0$ pour toute modification infinitésimale de cette trajectoire $\vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}(t) + \delta\vec{r}(t)$ (en conservant les points initiaux et finaux inchangés). En mécanique quantique, il n'y a plus de trajectoire unique pour passer d'un état à un autre: à l'instar de l'expérience des fentes de Young, il faut considérer tous les chemins possibles, attribuer à chacun une pondération, faire la somme de tous les chemins, dont le module au carré donne finalement la probabilité de passer d'un état à un autre. L'action donne justement cette pondération pour chaque chemin ¹, sous la forme d'une phase $\exp[iS/\hbar]$.

Le Lagrangien du Modèle Standard est constitué de plusieurs **champs quantiques**, chacun associé à une particule du Modèle Standard. On a trois types de champs:

- ceux pour les fermions (quarks et leptons) collectivement notés ψ
- ceux pour les bosons médiateurs (photon, gluons, bosons W^\pm et Z^0), notés A^μ n'apparaissant pas explicitement mais “cachés” dans les notations $F_{\mu\nu}$ et D ,
- le champ de Higgs associé au boson homonyme et noté ϕ

Ces champs sont fonctions du point de l'espace et du temps mais ce ne sont pas de simples fonctions à valeurs numériques. Il s'agit des opérateurs capables d'agir sur un état donné pour lui ajouter une particule ou lui en supprimer une. En effet, dans le cadre de la physique des particules, la relation d'Einstein autorise la conversion entre énergie et masse, et donc la possibilité de changer le nombre et la nature des particules au cours d'un processus. Le Lagrangien, formé de champs, est lui aussi un opérateur, tout comme l'action associée: contrairement à la mécanique quantique où la nature du système ne change pas, une “trajectoire” pour aller d'un état à un autre en physique des particules peut passer par de nombreux états intermédiaires, avec un contenu en particules potentiellement

¹On peut montrer que dans la limite classique $\hbar \rightarrow 0$, la contribution de la trajectoire minimisant l'action domine toutes les autres et devient la seule pertinente.

très différent des états initiaux et finaux. C'est le cas par exemple du processus d'annihilation $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-$, où un électron et un positron s'annihilent en un photon qui se convertit ensuite en une paire muon-antimuon ². A chaque étape, la nature et le nombre des particules ont changé. C'est la structure même du Lagrangien qui dicte les transitions possibles dans le cadre du Modèle Standard, et celles qui sont interdites.

Avant de décrire les différents termes, observons **les indices**. Les indices i et j décrivent les trois familles possibles de fermions, avec une sommation implicite sur les différentes combinaisons possibles. μ et ν sont des indices de Lorentz, réalisant l'unification de l'espace et du temps selon la théorie de la relativité: x^μ est un quadrivecteur rassemblant les coordonnées spatio-temporelles (ct, x, y, z) . Le passage d'un référentiel à l'autre est décrit par une transformation de Lorentz qui (en général) combine linéairement les coordonnées d'espace et de temps. Toute quantité avec un indice de ce type subit les mêmes lois de transformations (de Lorentz) que x^μ quand on passe d'un référentiel à un autre. C'est le cas en particulier des champs associés aux bosons médiateurs A^μ (ils sont dits de spin 1), mais aussi des dérivées $\partial^\mu = \partial/\partial x_\mu$. Les champs de fermions ψ se transforment eux aussi sous un changement de référentiel, mais d'une manière différente (ils sont dits de spin 1/2). Le champ de Higgs ne change pas sous de telles transformations, et est dit de spin 0 ou scalaire ³. Les champs de spin 1 et de spin 1/2 sont combinés dans des produits qui sont des scalaires de Lorentz: c'est le sens des indices répétés dans le terme des bosons médiateurs $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ et de la barre oblique traversant le terme des fermions $i\bar{\psi}\not{D}\psi$. Grâce à ces combinaisons, le Lagrangien du Modèle Standard ne change pas sous des changements de référentiel: il est invariant sous les transformations de Lorentz.

Quelle est la physique que ce Lagrangien reflète ? En premier lieu, il décrit **la propagation** des différentes particules d'un point de l'espace-temps à un autre. Pour cela, il faut créer une particule en un point, et la faire disparaître en un autre. Ce sont donc les termes avec deux champs (et deux champs seulement) qui décrivent cette propagation. Ce sera en particulier le cas de $|D_\mu\phi|^2$ pour le boson de Higgs et $i\bar{\psi}\not{D}\psi$ pour les fermions. Dans les deux cas, D contient une dérivée par rapport aux coordonnées d'espace-temps. Ces deux termes correspondent donc au terme cinétique associé à ces différentes particules, et prédisent, en l'absence d'interaction, une propagation de type "ondes planes". Pour les bosons médiateurs, le terme correspondant est $-1/4F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. A chaque interaction est associé "son" terme $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Dans le cas de l'électromagnétisme, $F_{\mu\nu}$ s'obtient en dérivant une fois le champ A_μ associé au photon. Si on se concentre sur la limite classique, ce Lagrangien redonne les équations de Maxwell dans le vide ⁴.

Ce même Lagrangien décrit **les interactions** entre particules, ce qui correspond à des termes avec trois champs (ou plus). C'est en particulier le cas du terme $\bar{\psi}_i y_{ij} \phi \psi_j$, qui fait intervenir deux champs de fermions et un champ de Higgs, aboutissant par exemple au processus $H \rightarrow b\bar{b}$, effectivement étudié au LHC. y_{ij} décrit l'intensité de l'interaction, et donc la probabilité avec laquelle elle est susceptible de se produire. Mais d'autres vertex d'interaction sont présents, bien que cachés, dans ce Lagrangien. Cela vient en particulier des dérivées D , dites covariantes, qui combinent une dérivée usuelle et différents champs associés aux bosons médiateurs. Si nous nous focalisons sur le cas du photon, on a la dérivées covariante $D^\mu\psi = \partial^\mu\psi - ieQA_\mu\psi$ où Q est la charge du fermion en

²L'asterisque indique que la particule en question ne peut être qu'un état intermédiaire transitoire : elle ne satisfait pas la relation d'Einstein reliant énergie, impulsion et masse, et ne peut pas apparaître comme état initial ou final (qui sont constitués de particules satisfaisant chacune la relation d'Einstein). On parle de particules "virtuelles", dont on ne peut observer l'effet qu'indirectement, par la manière dont leur échange permet de passer d'un état initial à un état final. En particulier, l'attraction ou la répulsion électromagnétique entre deux particules chargées est décrite par l'échange de tels photons virtuels. En revanche, la lumière correspond à des photons dits "réels", qui satisfont la relation d'Einstein et peuvent apparaître dans les états initial et/ou final de processus, par exemple ceux responsables des raies d'émission ou d'absorption dans des spectres gazeux.

³Un théorème très profond lie spin et comportement statistique (de groupe) des particules: les fermions (spin demi-entiers) sont asociaux (comme l'illustre le principe de Pauli pour le remplissage des couches électroniques) tandis que les bosons sont grégaires (ce comportement collectif est illustré dans la production cohérente de photon dans un laser).

⁴ A_μ s'identifie alors aux potentiels scalaire et vecteur, qui une fois dérivés donnent les champs électrique et magnétique.

unité de charge élémentaire. On voit donc que $i\bar{\psi}\not{D}\psi$ contient non seulement un terme cinétique (deux fermions avec une dérivée) mais aussi un terme d'interaction (deux fermions et un boson médiateur). Ce deuxième terme permet en particulier de décrire l'absorption ou l'émission d'un photon par un électron ($e^-\gamma \rightarrow e^-$, $e^- \rightarrow e^-\gamma$), mais aussi l'annihilation et la production d'une paire électron/positron en photon ($e^+e^- \rightarrow \gamma^*$, $\gamma^* \rightarrow e^+e^-$). Plus globalement, la dérivée covariante de chaque fermion fait intervenir tous les bosons des interactions auxquelles il est sensible: celle d'un neutrino ne fera intervenir que les champs des bosons W^\pm et Z^0 , tandis que celle d'un quark fera intervenir tous les bosons médiateurs (photon, gluons, W^\pm et Z^0). La même chose se produit pour la dérivée covariante du champ de Higgs $D^\mu\phi$, dictant ses interactions avec les bosons faibles.

En plus des interactions des bosons médiateurs avec les fermions et avec le boson de Higgs, le Lagrangien prédit des **interactions entre seuls bosons médiateurs**, dissimulées dans le terme $-1/4F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. C'est le cas en particulier des interactions entre gluons, faisant intervenir trois gluons ou quatre gluons entre eux. Ce comportement explique les caractéristiques les plus remarquables de l'interaction forte, comme l'absence de quarks libres, et la nécessité de lier les quarks dans des hadrons. On a également des interactions entre trois bosons médiateurs de l'interaction faible du type $Z^{0*} \rightarrow W^+W^-$, ainsi que $\gamma^* \rightarrow W^+W^-$, avec des conséquences moins dramatiques mais bien mesurables dans les collisionneurs.

Si de nombreuses interactions sont possibles, toutes ne sont pas autorisées par le Lagrangien du Modèle Standard. On sépare le bon grain et l'ivraie grâce à un outil très puissant, **la notion de symétrie**. Nous avons déjà mentionné le fait que lors d'un changement de référentiel (une transformation de Lorentz), certains champs étaient modifiés (bosons médiateurs, fermions), mais le Lagrangien restait invariant. D'autres symétries sont invoquées pour contraindre plus fortement la structure du Lagrangien. Un puissant théorème montre que la conservation d'une quantité au cours des interactions peut être associée à l'invariance du Lagrangien sous une transformation conjointe de ses constituants, appelée symétrie. L'invariance sous les transformations de Lorentz garantit ainsi la conservation de l'énergie et de l'impulsion. L'invariance sous des transformations plus complexes, comme un changement de la phase des champs fermioniques en même temps qu'une modification du champ de photon, impose la conservation de la charge électrique au fil des interactions ⁵. L'application répétée de ce principe pour les trois interactions fondamentales permet de garantir que certaines charges seront conservées au fil des interactions successives, reproduisant ainsi des lois de conservations observées expérimentalement.

Cette notion de symétrie est très puissante, voire trop: nulle part n'apparaît de terme de **masse** dans le Lagrangien ! Ces termes se manifesteraient par le produit deux champs identiques, sans dérivée ni troisième champ. En fait, pour satisfaire les lois de conservations expérimentalement observées pour l'interaction faible, il faut imposer une symétrie, dite électrofaible, si puissante qu'elle interdit d'écrire de tels termes de masse. En d'autres termes, le Lagrangien du Modèle Standard semble prévoir qu'aucun boson de jauge ni fermion n'aurait de masse. Or nous savons que l'interaction faible est de portée subatomique, associée à des bosons W^\pm et Z^0 massifs, et que les quarks peuvent être très lourds (en particulier les quarks b et t de troisième génération).

Pour remédier à cela, on introduit un potentiel $V(\phi)$ faisant intervenir le seul champ de Higgs. Si le potentiel satisfait bien toutes les symétries précédemment imposées, sa structure est telle que l'état fondamental, minimisant ce potentiel, ne satisfait pas cette symétrie. On peut penser à une bille posée sur le fond concave d'une bouteille de vin. La bouteille (le potentiel) possède une symétrie de révolution autour d'un axe, mais la bille (l'état d'énergie minimale) ne restera pas sur cet axe, car c'est une position d'équilibre instable. La moindre perturbation la poussera à descendre pour finir sur un point du cercle correspondant au vrai fond de la bouteille, dans une position d'équilibre stable qui

⁵C'est la mise en œuvre de cette notion d'invariance qui nécessite l'introduction des curieuses dérivées covariantes D combinant dérivée ordinaire et champs de bosons médiateurs. Ces transformations sont inspirées de l'invariance de jauge observée au niveau classique dans les équations de Maxwell: la physique décrite reste invariante quand on change simultanément les potentiels scalaire et vecteur en leur ajoutant des fonctions arbitraires satisfaisant certaines relations.

ne satisfait pas la symétrie de rotation. Ce phénomène, appelé **brisure spontanée de symétrie**, permet de conserver les symétries souhaitées au niveau des interactions, tout en autorisant des termes de masse pour les bosons W^\pm et Z^0 . De plus, ce phénomène impose que le champ de Higgs ne se limite pas à des opérateurs créant ou annihilant un boson de Higgs, mais qu'il s'y ajoute un terme constant (l'équivalent de la distance entre la position finale de la bille au fond de la bouteille et l'axe de révolution de cette même bouteille). La présence de ce terme numérique constant dans le champ de Higgs ϕ implique que le terme $\bar{\psi}_i y_{ij} \phi \psi_j$ contient non seulement une interaction fermion-Higgs, mais aussi un terme avec seulement deux fermions... et donc un terme de masse pour les fermions. Plus le fermion est lourd, plus y sera grand, et plus le boson de Higgs interagira facilement avec ce fermion.

Pour finir, nous n'avons pas encore parlé du mystérieux "h.c.", qui signifie "conjugué hermitien". Ce vocable peu éclairant est un lien entre **particule et antiparticule**. La notion de conjugué hermitien est aux opérateurs de création et d'annihilation ce que la conjugaison complexe est aux nombres ordinaires, et elle correspond de fait à un échange entre particule et antiparticule. La grande majorité des champs présentés ici sont des opérateurs "complexes", opérant une distinction entre une particule et son antiparticule ⁶. Pour garantir que le Lagrangien (lié à la notion d'énergie) reste une quantité réelle, il faut prendre une "partie réelle" des interactions construites jusque-là et donc ajouter aux termes déjà présents leur conjugué hermitien. La plupart des termes du Lagrangien sont leur propre conjugué à des modifications évidentes près, ce qui justifie l'affirmation que particule et antiparticule se comportent de manière globalement identiques, si on remplace toutes les charges (en particulier électrique) en leurs opposées. Toutefois, les couplages y_{ij} sont a priori des quantités complexes arbitraires, et n'ont donc pas la même valeur pour des particules et leurs antiparticules. De fait, ce terme s'avère la source d'asymétrie entre particules et antiparticules, qui se manifeste quand on compare les désintégrations des quarks lourds sous l'effet de l'interaction faible, et celles où les antiquarks correspondants interviennent.

Au-delà de cette discussion qualitative, le Lagrangien du Modèle Standard est utilisé pour faire des prédictions quantitatives sur la probabilité des processus de production, d'interaction et de désintégration des particules élémentaires connues. Les diagrammes de Feynman constituent l'outil indispensable pour organiser et effectuer ces calculs, et sont fréquemment utilisés pour représenter les différents processus envisageables. Ce Lagrangien est aussi la base pour imaginer de possibles extensions du Modèle Standard: quelle que soit l'extension imaginée, et les particules, interactions, dimensions supplémentaires ainsi ajoutées, le Lagrangien de cette théorie plus large doit se ramener au Lagrangien du Modèle Standard aux énergies actuellement testées, à de petites corrections près, afin de rester en accord avec le vaste corpus de résultats expérimentaux déjà très bien expliqués par le Modèle Standard.

Pour finir, résumons la signification des différents termes du Lagrangien du Modèle Standard:

$\mathcal{L} =$	
$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$	Propagation des bosons médiateurs, interactions entre gluons, entre bosons faibles
$+i\bar{\psi}\not{D}\psi$	Propagation des fermions, interaction entre fermions et bosons médiateurs
$+\bar{\psi}_i y_{ij} \phi \psi_j$	Interaction entre fermions et Higgs, terme de masse des fermions
$+h.c.$	Lien et asymétrie de comportement entre particules et antiparticules
$+ D^\mu\phi ^2$	Propagation du boson de Higgs, interaction entre Higgs et bosons faibles
$+V(\phi)$	Brisure de la symétrie électrofaible, source de la masse des particules

Et à l'issue de toutes ces calculs... place à la Physique !

⁶En particulier, on ne sait pas si c'est le cas pour les neutrinos, qui pourraient être leur propre antiparticule, et seraient alors représentés par des champs "réels".