

# Urychlovače

Jiří Dolejší, Olga Kotrbová, Univerzita Karlova v Praze

Ernest Rutheford studoval strukturu atomů pomocí  $\alpha$ -částic vylétajících z radioaktivního radonu. Radioaktivní jádra můžeme používat jako zdroj  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  záření, tj.  $\alpha$ -částic, elektronů a fotonů s energiemi **několika MeV**. Jiné částice a vyšší energie ale takto nedostaneme.

**Částice je však možné urychlovat!  
K čemu jsou dobré urychlené částice?**

**Pomocí částic s vyššími energiemi můžeme proniknout hlouběji do struktury hmoty!**

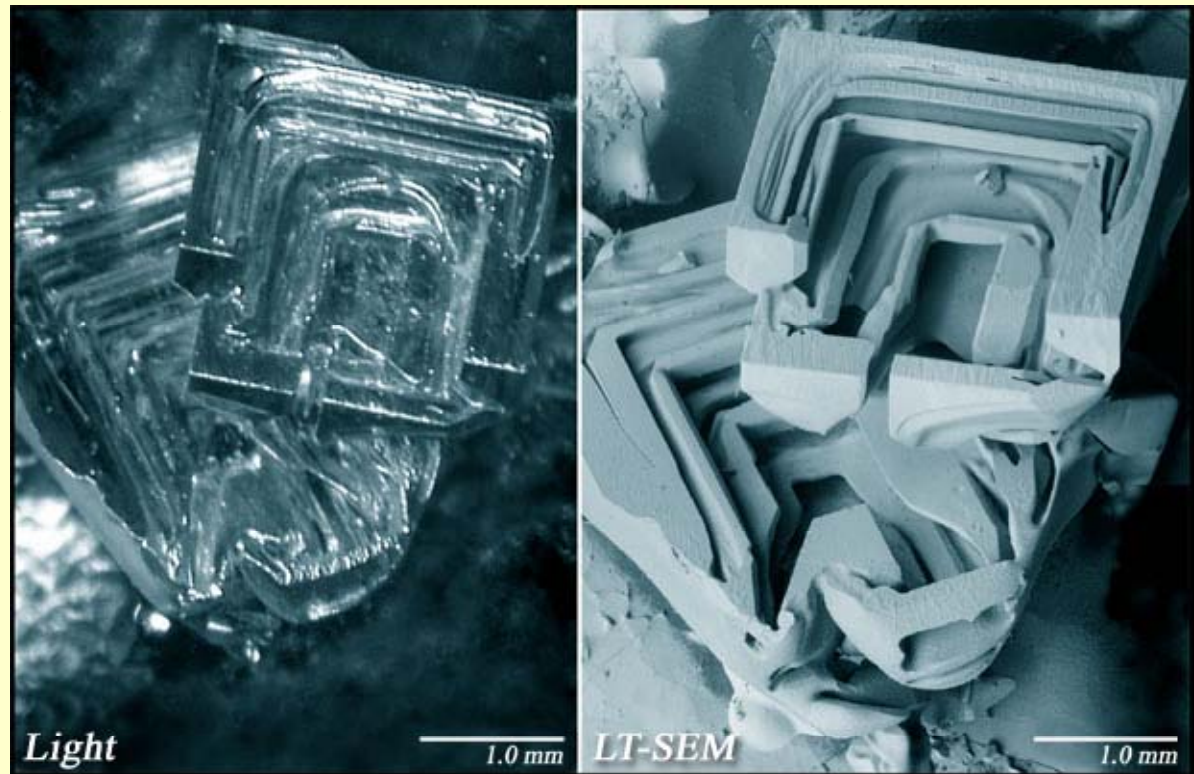
Optickým mikroskopem nemůžeme vidět libovolně malé objekty - vlnové vlastnosti světla nedovolí zobrazit detaily s velikostí o mnoho menší než je vlnová délka světla (400-750 nm). Pokud chceme pozorovat menší objekty, musíme si na ně "posvítit" vlnami o vlnové délce menší nebo srovnatelné s velikostí objektu. Kratší vlnové délky má například ultrafialové záření (10 až 400 nm), rentgenové záření (0,1 až 10 nm),  $\gamma$  záření. Tyto druhy záření jsou však pro mikroskopii obtížně použitelné - obtížně se dělají čočky, nejsou vidět a musí se použít detektory.

## Proč částice urychlujeme ?

Naštěstí ale můžeme využít vlnových vlastností částic a použít elektrony. Vlnová délka částic klesá s jejich rostoucí energií, tzn. že rozlišení je při větší energii lepší, neboť platí  $\lambda \approx hc/E$ . Zatímco optické mikroskopy mají nejlepší rozlišení těsně pod 1  $\mu\text{m}$ , elektronový mikroskop (který používá elektrony urychlené na stovky keV) může mít rozlišení lepší než 1 nm.

Srovnání rozlišení obrázku sněhové vločky z optického a skenovacího elektronového mikroskopu

K výzkumu vnitřní struktury jader (jde o rozměry řádu  $10^{-15}$  m) potřebujeme elektrony či jiné částice s energiemi alespoň **stovek MeV**.



Obrázek převzat ze stránek <http://emu.arsusda.gov/snowsita/default.html>

## Stránky pro experty! Můžete je přeskočit, ale co to zkusit !

Proč potřebujeme pro detailní rozlišení tak vysoké energie částic?

V kvantové mechanice se dokazuje platnost Heisenbergovy relace neurčitosti Podle ní nemůžeme měřit současně přesně hybnost a polohu částice ... neurčitost polohy  $\Delta x$  a neurčitost hybnosti  $\Delta p$  jsou svázány vztahem

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

Jestliže studujeme strukturu terče tím, že na něm rozptylujeme částice, pak pro dosažení velkého rozlišení, tj. malé neurčitosti  $\Delta x$ , musíme mít k dispozici velký interval hybností  $\Delta p$  rozptylovaných částic. Ale protože nalétávající částice mohou při rozptylu hybnost jediné ztrácet, potřebujeme už na začátku hybnost dostatečně velikou:

$$p \geq \Delta p \geq \frac{h}{4\pi \Delta x}$$

Hybnost částice souvisí s energií a je dána relativistickým vztahem:

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$$

Pro hodně rychlé částice, můžeme první člen pod odmocninou zanedbat, potom platí:  $E \approx pc$

Potřebujeme tedy nalétávající částice s energií

$$E \geq \frac{hc}{4\pi \Delta x}, \quad \frac{hc}{2\pi} = \hbar c = 0,197326960(77) \text{ GeVfm} \cong 0,2 \text{ GeVfm}$$

takže pro studium nitra jader ( $\Delta x \approx 10^{-15}\text{m} = 10^0 \text{ fm}$ ) potřebujeme elektrony s energií  $E > 0,1 \text{ GeV}$ .

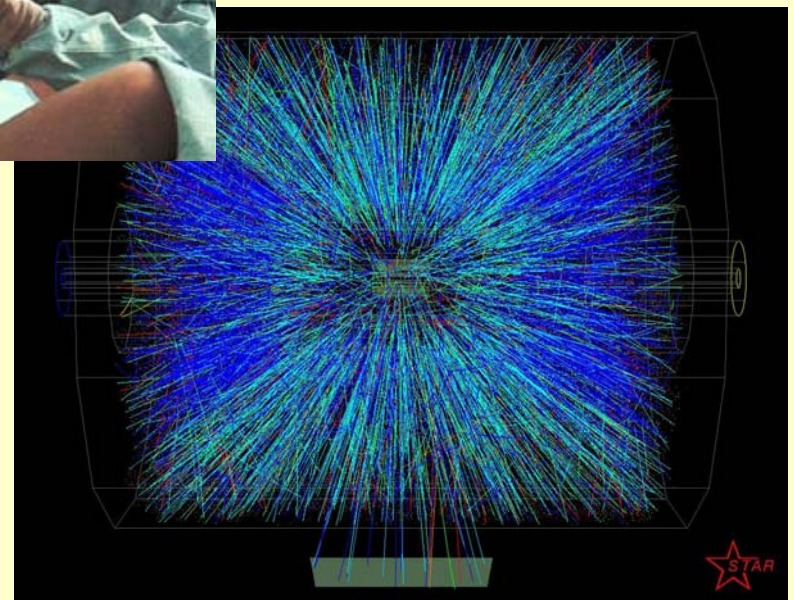


## Proč částice urychlujeme ?

Dalším důvodem, proč se hodí částice s vysokou energií, je možnost **vzniku nových částic** při srážkách.

„Rození“ nových částic není nic samozřejmého, nic podobného z makrosvěta neznáme s výjimkou rození dětí. Při čelní srážce aut vznikne maximálně hromada šrotu, ale rozhodně nic nového.

Zato v mikrosvětě, pokud máme k dispozici dostatečnou energii, může při srážce vzniknout velké množství částic - vpravo vidíte dráhy částic ze srážky dvou jader zlata v urychlovači RHIC v USA. Kromě nukleonů z rozbitých jader projektilů zachytil detektor STAR **přes tisíc nově narozených částic.**

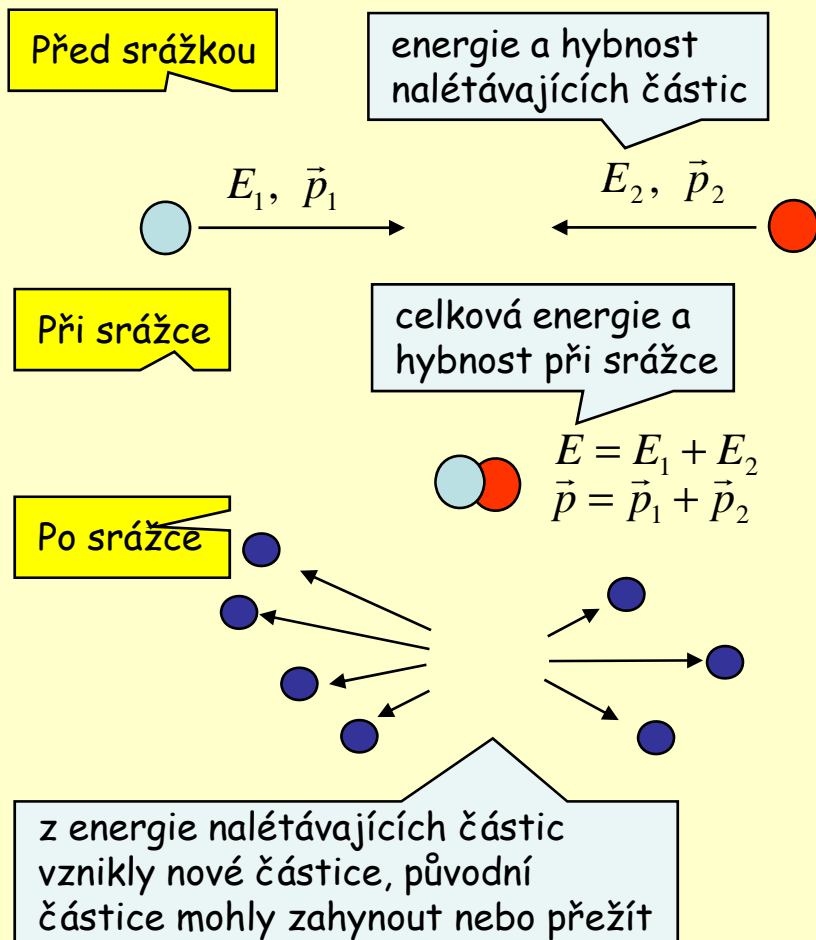


# Proč částice urychlujeme ?

Pokusme se spočítat, jak souvisí energie srážejících se částic s rozením nových částic. Použijeme relativistický vztah mezi energií, hybností a hmotností:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \text{ resp. } E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

rozdíl kvadrátů  $E$  a  $p$  se vždy, nezávisle na vztahné soustavě, rovná  $m^2 c^4$  - je to tzv. **invariant**.



Ve srážce dvou částic celkovou energii a celkovou hybnost dosadíme do levé strany a opět dostaneme invariantní hodnotu (stejnou ve všech soustavách), označme ji například  $s$ :

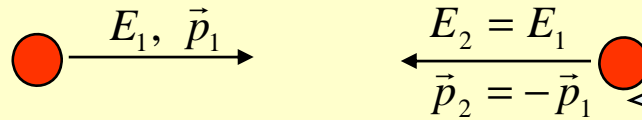
$$(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2 = s$$

$s$  může být rovno  $M^2 c^4$  jedné těžké částice nebo v případě narození  $n$  částic

$$s = (E'_1 + E'_2 + \dots + E'_n)^2 - (\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \dots + \vec{p}'_n)^2 c^2$$

# Vznik nových částic - srážky částic

Co platí pro srážku dvou stejných částic ( $m_1 = m_2$ ) letících se stejnou energií ( $E_1 = E_2$ ) proti sobě ( $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ ) ?



Dosadíme do vztahu:

$$(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2 = s$$

Celková energie

$$(2E_1)^2 - (0)^2 c^2 = s$$

Celková hybnost

$$2E_1 = \sqrt{s}$$

I v obecnějším případě, kdy částice nemusí být stejné a nemusí mít stejnou energii, existuje souřadný systém, ve kterém stále platí  $p_1 = -p_2$ . V takovém systému se mimořádně snadno počítá. Říká se mu **těžišťový systém**, protože těžiště srážejících se částic je v něm v klidu.

Toto je energie k dispozici v těžišťové soustavě

Na vznik nových částic je využita veškerá energie nalétávajících částic!

V urychlovači RHIC se srážejí jádra zlata ( $A=197$ ) s energií 100 GeV na každý nukleon. Celková energie srážky bude tedy  $2 \times 197 \times 100 \text{ GeV} = 39\,400 \text{ GeV}$ .

Klidová energie nukleonu je zhruba 1 GeV, takže výsledkem srážky může být zhruba 40 tisíc nukleonů. Ty by ovšem musely zůstat v klidu, protože na pohyb už energie nezbyvá. Nebo jich může vzniknout méně a svižně vyletí ...

## Vznik nových částic - srážky částic

Při setkání částice a antičástice může dojít k vzájemné **anihilaci**, tzn. obě částice zmizí a jejich energie se objeví v podobě jiné částice (částic).



Spočítejme, jakou energii bude mít foton, který vznikne při anihilaci elektronu a pozitronu:  
Popisujme anihilaci elektronu a pozitronu v jejich těžišťové soustavě. Pak podle vzorečků na předcházející straně celková energie vzniklého fotonu bude součtem energie elektronu a energie pozitronu ...  $E_\gamma = 2E_1$ . Hybnost vzniklého fotonu bude  $p_\gamma = 0$ .

Chachachá! To je ale blbost!  
Kdo kdy viděl foton, který má nějakou energii a nulovou hybnost???

To bude nažhavený foton, který stojí???

Kdepak, každý slušný foton s energií  $E$  má hybnost  $E/c$ ! Ten výpočet je špatně!

Když vznikne jeden foton, tak  $2E_1 = \sqrt{s} = Mc^2$ , kde  $M$  by měla být klidová hmota fotonu. Ta je ale 0! Jak se může součet energie elektronu a pozitronu rovnat nule???

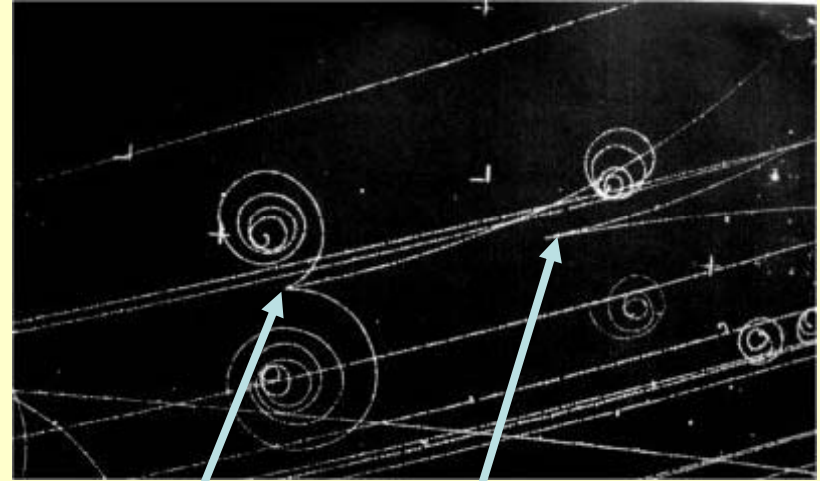
Můžete uvažovat různě (například si psát zákony zachování energie a hybnosti) ale vždy dojdete ke sporu. V anihilaci elektronu a pozitronu musí vzniknout alespoň dva fotony.



# Vznik nových částic - srážky částic

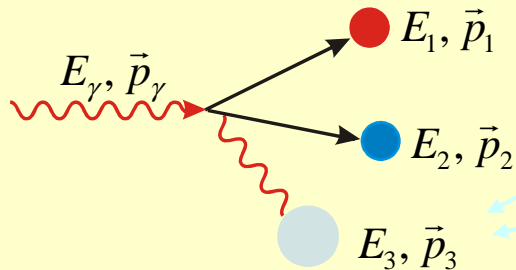
Na předchozí stránce jsme zjistili, že elektron s pozitronem musí anihilovat na alespoň dva fotony. To by mělo jít i obráceně - dva fotony by mohly vytvořit elektron pozitronový pár. Ostatně tento proces vidíte na snímku z bublinové komory vpravo.

Energetický foton přilétající zleva interaguje s fotonem z hejna, které tvoří elektrické pole nějaké nabité částice - buď elektronu nebo jádra - a vytváří  $e^+e^-$  pár. Důsledek této interakce ale pocítí také nabitá částice, která vytváří ono pole - převezme kus hybnosti.



Vznik páru  $e^+e^-$  v poli elektronu. Elektron, jehož pole bylo zasaženo, je viditelně vykopnut dopředu.

Vznik páru  $e^+e^-$  v poli jádra. Těžké jádro převezme kus hybnosti, aniž by bylo viditelně odkopnuto.



$$\begin{aligned} (E_\gamma + Mc^2)^2 - (\vec{p}_\gamma)^2 c^2 &= s = \\ &= (E_1 + E_2 + E_3)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)^2 c^2 \geq \\ &\geq (M + 2m_e)^2 c^4 \end{aligned}$$

$e^+$ ,  $e^-$  a odkopnutý elektron nebo jádro jsou v klidu v těžišti.

Aby nalétávající foton mohl  $e^+e^-$  produkovat, musí mít  $E_\gamma \geq 2m_e c^2$ .



## Stránky pro experty! Můžete je přeskočit, ale co to zkusit !

Spočtěme prahovou energii (tedy nejmenší dostatečnou energii) pro vznik antiprotonu ve srážce urychleného protonu na klidném terčovém protonu.

Antiproton vzniká v reakci:  $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$ , tedy nemůže vzniknout sám, ale v páru s protonem. Hledáme-li prahovou energii, nebudeme utrácet za kinetickou energii vzniklých částic - necháme je všechny v klidu v jejich těžišťové soustavě.



$$\begin{aligned}
 (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2 &= s = (E'_1 + E'_2 + \dots + E'_n)^2 - (\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \dots + \vec{p}'_n)^2 c^2 \\
 (E_1 + m_p c^2)^2 - p_1^2 c^2 &= (4m_p c^2)^2 \\
 E_1^2 + 2E_1 m_p c^2 + m_p^2 c^4 - p_1^2 c^2 &= 16m_p^2 c^4 \\
 2E_1 m_p c^2 + 2m_p^2 c^4 &= 16m_p^2 c^4 \\
 E_1 &= 7m_p c^2
 \end{aligned}$$

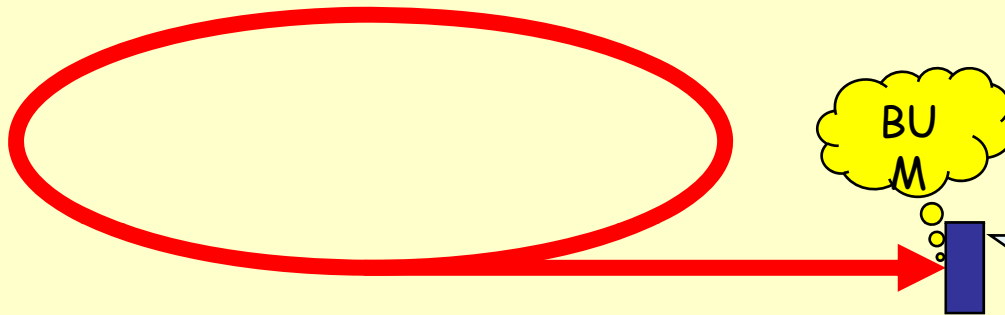
Ke vzniku antiprotonu musí mít nalétávající proton energii 7 GeV .

Expertí potřebují nějaký další trénink, aby prakticky zvládli dané téma. Zde je několik **námětů a otázek**:

1. Proti sobě letí dva protony se stejnou hybností. Jakou energii musí mít, aby při srážce mohl vzniknout antiproton? Porovnejte výsledek s předchozím, kdy byl jeden proton v klidu.
2. Vypočítejte prahovou energii pro produkci  $\pi^0$  ( $m_{\pi^0}=140$  MeV) při srážce urychleného protonu na klidném terčovém protonu. Pion vzniká v reakci  $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$ . Podívejte se na graf účinného průřezu  $pp$  u výkladu, co účinný průřez je, a ověřte, zda jste prahovou energii spočítali správně.

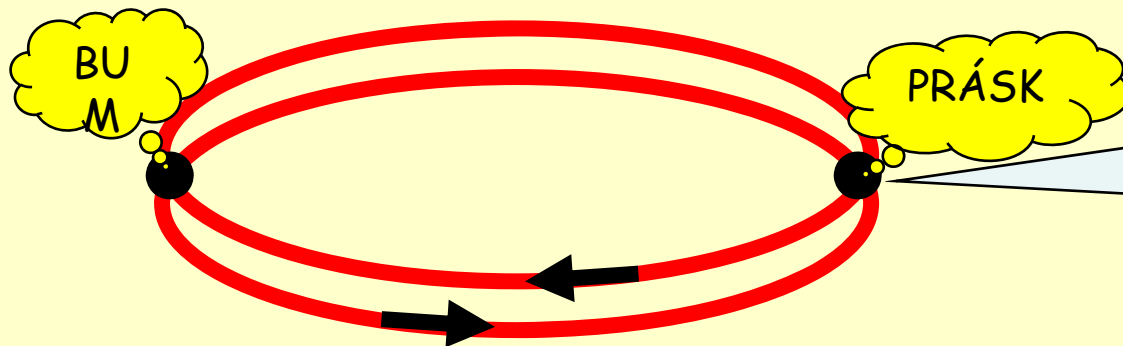
# Jak nejlépe hospodařit s energií ve srážkách?

„Klasické“ uspořádání,  
kdy urychlené částice dopadají na **pevný terč**



Představte si situaci, kdy rychle jedoucí auto narazí do auta stojícího na krajnici. Obě do sebe nabořená auta letí kupředu. Hrozné, ale tak strašné jako ...

„Vstříčné svazky“, „srážeč (collider)“  
- dva druhy částic jsou urychlovány v opačných směrech  
a na několika místech přivedeny ke srážce.



... čelní srážka dvou rychle jedoucích aut. Hromada šrotu zůstává stát na místě, všechna energie byla využita na destrukci.

## Stránky pro experty! Můžete je přeskočit, ale co to zkusit !

### Vstřicné svazky nebo pevný terč?

Rozdílný výsledek pro obě uspořádání je dán celkovou hybností systému před srážkou a po srážce. V případě pevného terče je celková hybnost nenulová, velká část energie se změní na pohybovou energii na rozdíl od druhého případu, kdy je celková hybnost před a po srážce nulová.

Pokud se srazí dvě částice se stejnou počáteční energií  $E_0$ , pak je k dispozici dvojnásobek energie (viz. výpočet dříve):

$$\sqrt{s} = 2E_0$$

Energie k mání při srážce dvou stejných částic s počáteční energií  $E_0$ .

Jaký je výsledek, když nalétávající částice má energii  $E_1$  a druhá je v klidu ( $E_2=mc^2$ )?

$$\begin{aligned}(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2 &= s \\(E_1 + mc^2)^2 - \vec{p}_1^2 c^2 &= s \\E_1^2 + 2E_1 mc^2 + m^2 c^4 - \vec{p}_1^2 c^2 &= s \\2E_1 mc^2 + 2m^2 c^4 &= s\end{aligned}$$

Energie k mání při srážce urychlené částice s energií  $E_1$  na terčové částici v klidu s hmotností  $m$ .

$$\sqrt{s} = \sqrt{2mc^2(E_1 + mc^2)}$$

Jestliže je  $E_1$  podstatně větší než  $mc^2$ , lze  $m$  proti  $E_1$  zanedbat:  $\sqrt{s} = \sqrt{2mc^2 E_1}$

V urychlovači LHC se budou čelně srážet protony o energiích 7 TeV, přitom se uvolní energie 14 TeV. Jaká by musela být energie protonů nalétávajících na terčové protony v klidu, aby se dosáhlo stejné energie srážky?

Z porovnání:

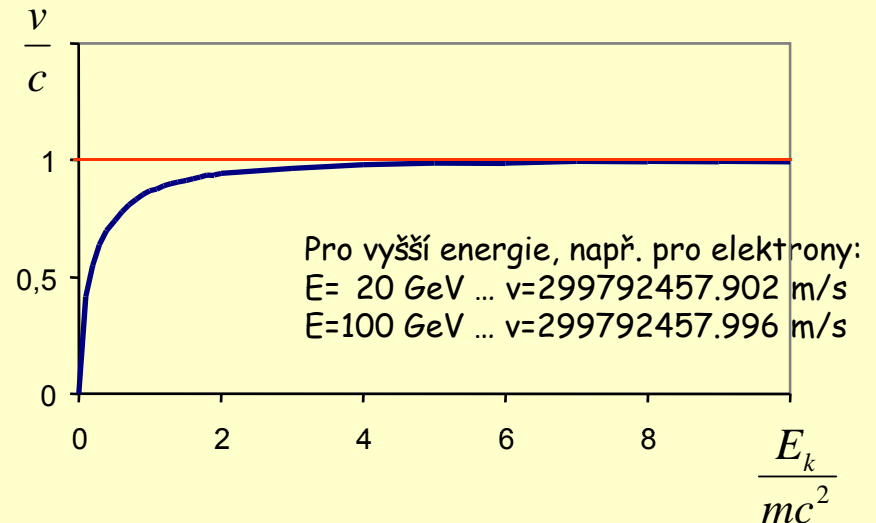
$$14 \times 10^{12} \text{ eV} = \sqrt{2 \times 938 \times 10^6 \text{ eV} E_0}$$

dostaneme, že energie nalétávajícího protonu  $E_1$  by musela být  $10^{17} \text{ eV} = 10^5 \text{ TeV}$ . Tato energie je mnohem větší než dnes běžně dosažitelné energie! To, co jde s LHC neumíme s pevným terčem.

# Jak ~~rychlé~~ energetické částice potřebujeme?

Výraz „rychlé“ částice nemá moc dobrý smysl, všechny urychlené částice letí skoro rychlostí světla, té ale podle teorie relativity nemohou dosáhnout. Pro kinetickou energii platí:

$$E_k = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) mc^2$$



Z grafu vidíme, že pokud kinetická energie částice dosáhne několikanásobek klidové energie, má už částice rychlost velmi blízkou rychlosti světla.

Zajímavě vysoké energie:

elektrony na zkoumání jader ...	stovky MeV
práh pro produkci pionů ...	1.3 GeV
práh pro produkci antiprotonů ...	7 GeV
zajímavé energie v současnosti ...	≥1 TeV

Radioaktivní jádra poskytují energii jen několik MeV, to nám ale nestačí ani na zkoumání jader, natož na produkci částic. Kde vzít tak rychlé částice?

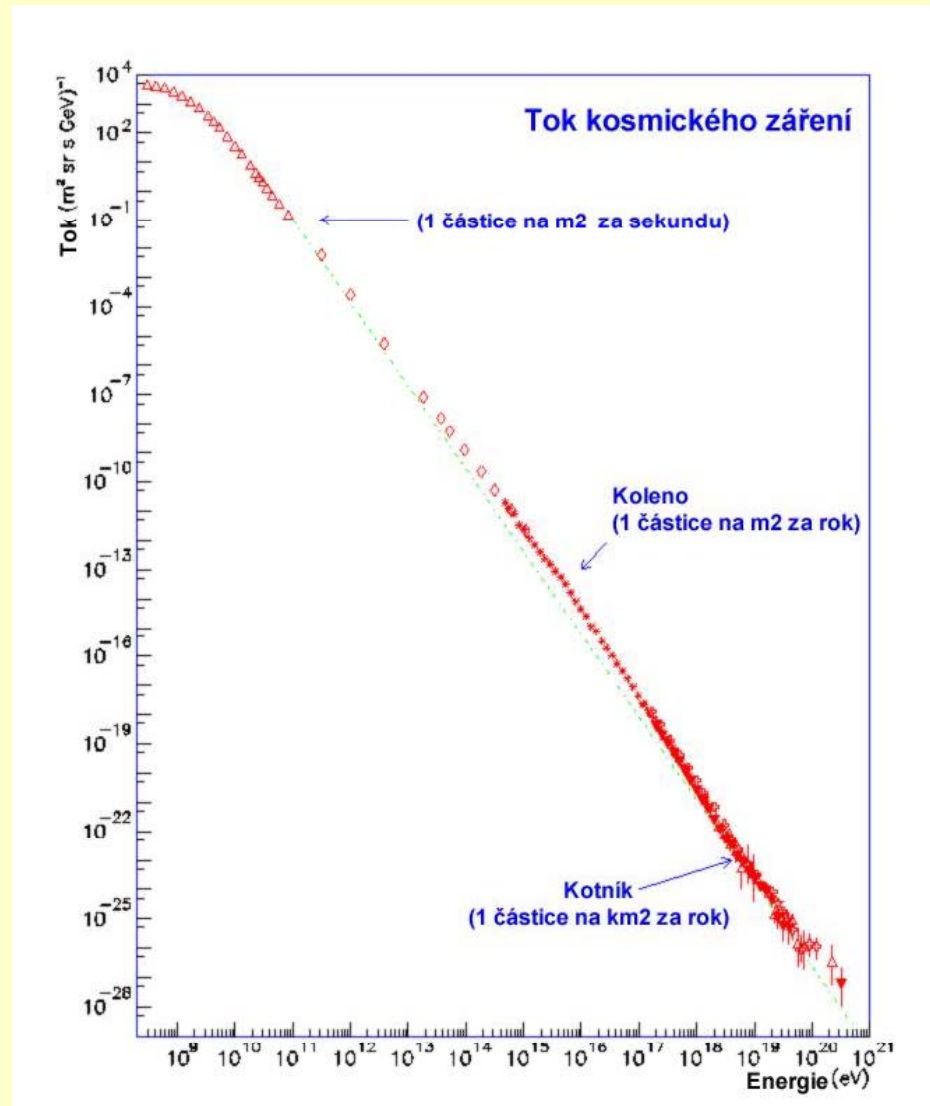


## Další zdrojem rychlých částic je kosmické záření.

Z vesmíru k nám neustále přilétají částice s vysokou energií. Energie částic primárního kosmického záření dosahují až  $10^{20}$  eV =  $10^8$  TeV. To je dost, ALE ...

... problém je v tom, že počet částic dopadajících na Zem s rostoucí energií rychle klesá (viz graf vpravo), například: částic s energií  $10^{16}$  eV dopadá na Zem jen několik na  $1 \text{ m}^2$  za rok, s energií nad  $10^{19}$  eV už je to jen jedna částice na  $\text{km}^2$  za rok.

Kosmického záření se využívá, díky němu byly učiněny významné objevy, i dnes se staví nové „astročásticové“ experimenty.



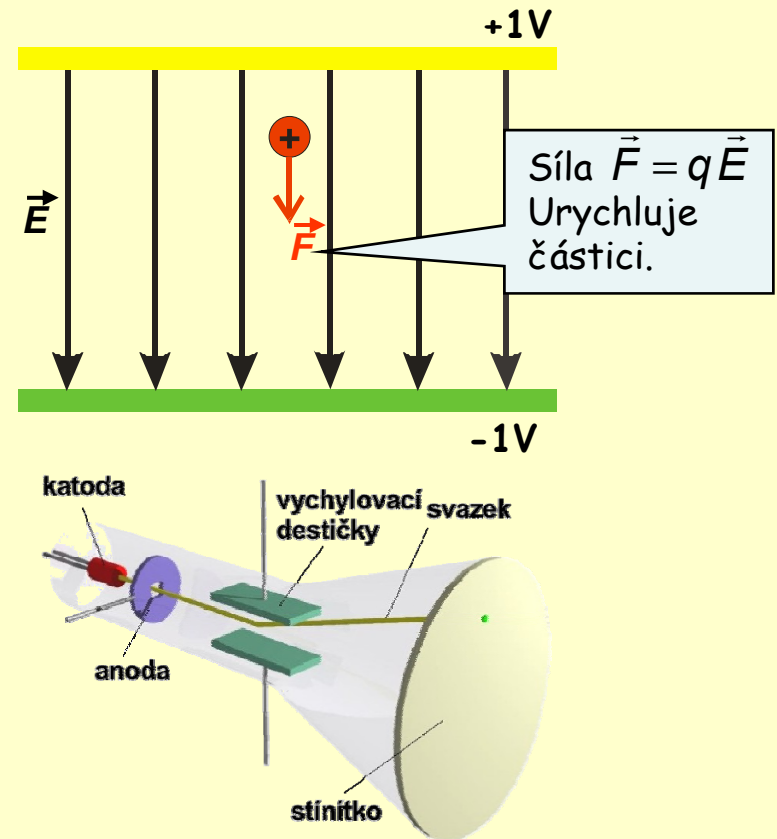
Když se rychlé částice hodí, radioaktivní jádra dávají malé energie a kosmického záření je málo, musíme si dostatek částic urychlit sami.

Princip urychlování částic může být velmi jednoduchý. Na nabitou částici v elektrickém poli působí elektrická síla, která ji urychluje.

Jednoduchý urychlovač můžeme udělat pomocí pole mezi dvěma nabitými elektrodami.

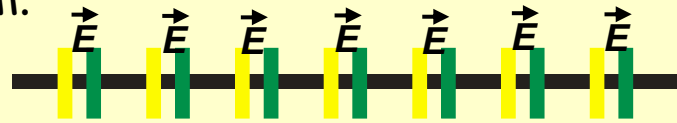
Podobný urychlovač se nachází například v televizi, energie elektronů však není moc velká - velikost elektrického pole je přibližně 15 kV, elektrony dopadající na stínítko mají tedy energii 15 keV.

Problém nastane, když chceme urychlit částici na velké energie, například 100 GeV. K tomu bychom potřebovali pole o velikosti 100 000 000 000 V, které ale neumíme vytvořit.



# Urychlovače I. Lineární urychlovače

Jednou z možností je nechat částici několikrát projít menším polem.

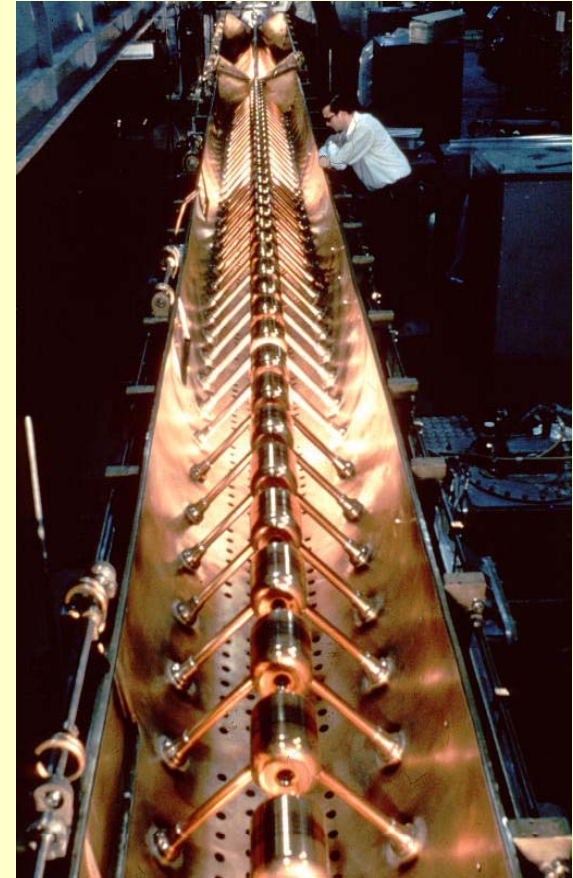


Takovýto typ urychlovače se nazývá **lineární**. Za sebou je umístěno několik válcových elektrod připojených ke zdroji střídavého napětí. Částice je urychlována potenciálovým rozdílem mezi elektrodami, které jsou přepólovány v okamžiku, kdy se částice nachází uvnitř elektrody a necítí žádné pole. Délka jednotlivých elektrod je volena tak, aby se během průletu vnitřkem elektrod stačila změnit polarita.

Mezi jednotlivými elektrodami získá částice energii  $qU$ , tzn. po průletu celým urychlovačem  $E = nqU$ .

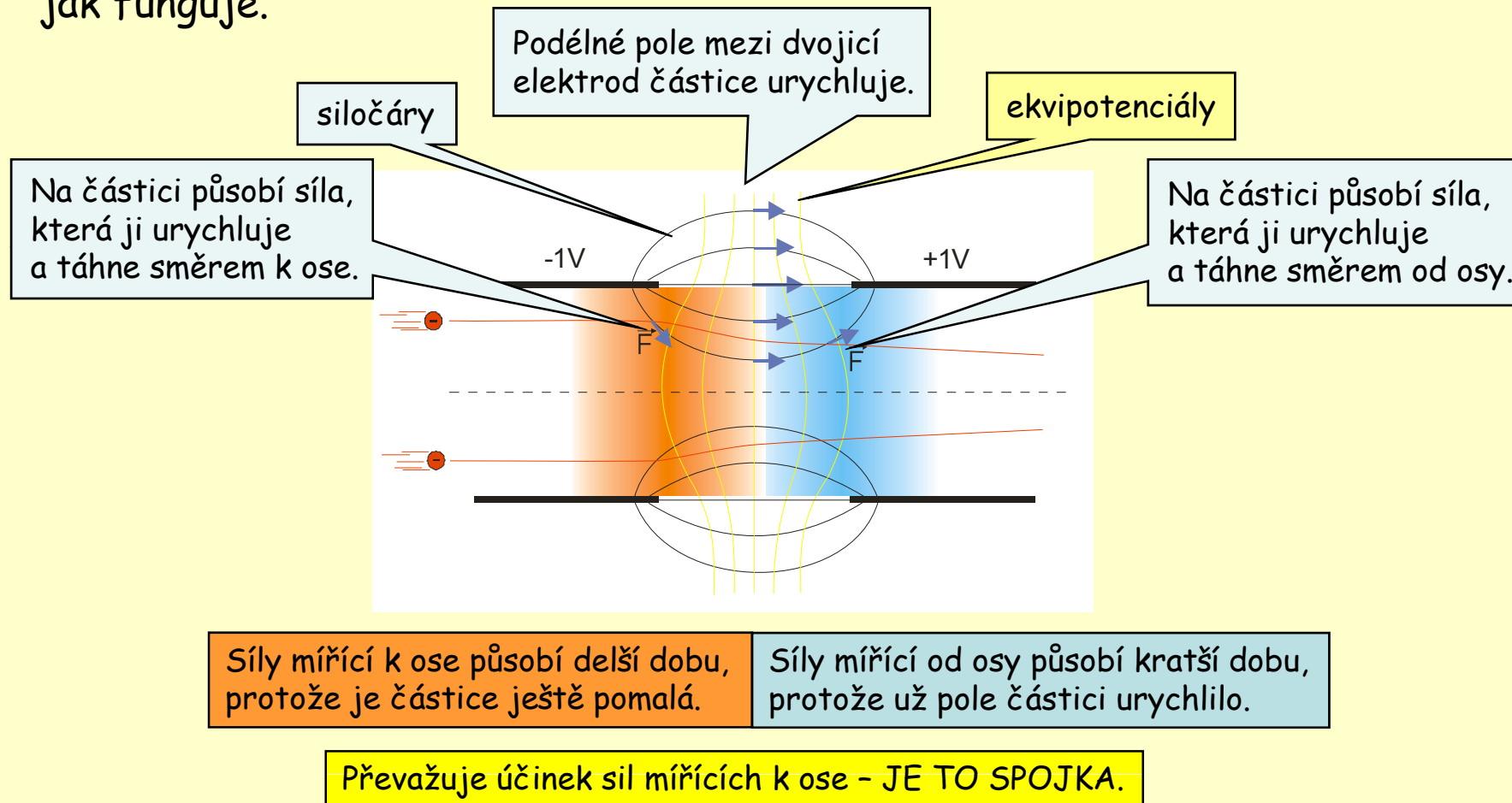
Lineárního urychlovač např. slouží od roku 1966 v laboratoři SLAC v Kalifornii, je přes 3 km dlouhý a dokáže urychlit dnes částice na energii 50 GeV.

Pole mezi elektrodami nejen urychluje, ale funguje i jako „elektrostatická čočka“ - zaostřuje svazek částic. Na to se podíváme velmi podrobně.



# Elektrostatická čočka a pole mezi elektrodami vůbec

Elektrostatickou čočku je možno vytvořit polem mezi dutými válci udržovanými na různých potenciálech. Pojd' me prozkoumat, jak takové pole vypadá a jak funguje.



Jak vypadá pole, vidíte prostřednictvím siločar a ekvipotenciál na obrázku; zvidavé jedince ale může zajímat, jak pole mezi danými elektrodami spočítat. To se dozvíte na další stránkách.



**Stránky pro experty! Můžete je přeskočit, ale co to zkusit !**

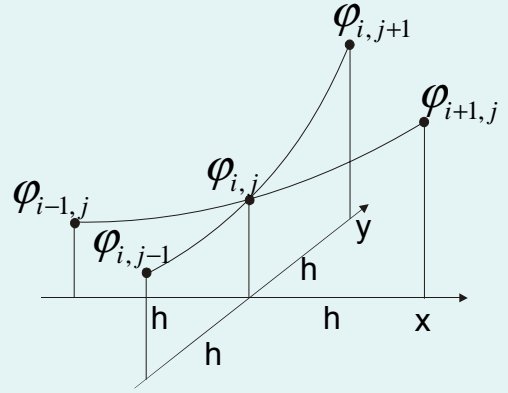
Zkusme si nejdříve spočítat něco jednoduššího - pole mezi deskami rovinného kondenzátoru. Elektrostatické pole  $\varphi = \varphi(x, y)$  je popsáno Laplaceovou rovnicí

Laplaceův operátor  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

$\Delta\varphi = 0$

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$

Potenciál, který je definovaný v každém bodu prostoru, budeme aproximovat jen hodnotami na řídké síti bodů s krokem  $h$ . Pojd'me najít aproximace pro derivace potenciálu na této síti.



Druhá derivace podle x:

Derivace na intervalu (i, i+1) sedí uprostřed

Derivace na intervalu (i-1, i) sedí uprostřed

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \approx \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h} - \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h} = \frac{1}{h^2}(\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j})$$

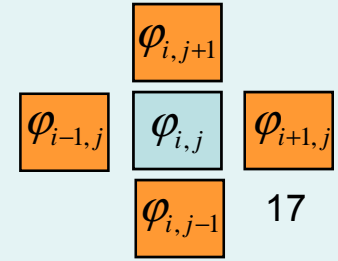
Druhá derivace podle y:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \approx \frac{\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{h} - \frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{h}}{h} = \frac{1}{h^2}(\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1})$$

$$\frac{1}{h^2}(\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} - 4\varphi_{i,j}) = 0$$

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{4}(\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} + \varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j})$$

$$\varphi_{\text{střed}} = \frac{1}{4}(\sum \varphi_{\text{okolo}})$$



## Stránky pro experty! Můžete je přeskočit, ale co to zkusit !

### Ilustrovaná kuchařka pro výpočet pole v rovinném kondenzátoru

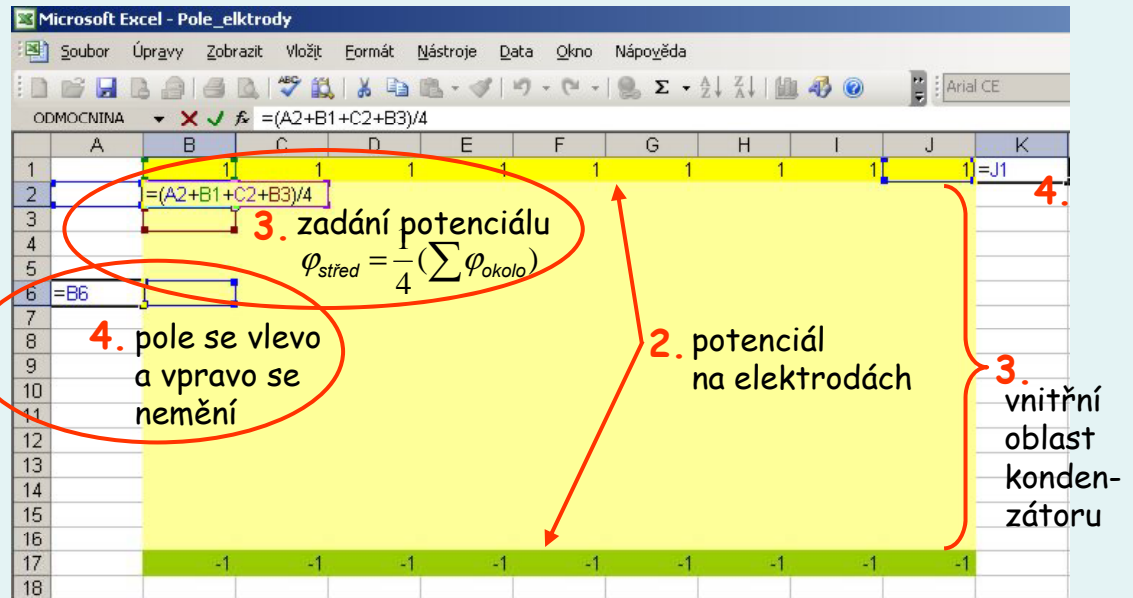
**1.** Rozhodněte se, jak velký kondenzátor si uděláte. Zvolme si např. oblast B1:J17.

**2.** Na horní a dolní okraj umístěme desky kondenzátoru (tzn. do buněk B1-J1 dosadíme hodnotu +1 a do B17-J17 hodnotu -1, pro přehlednost si je obarvíme žlutě a zeleně).

**3.** Prázdný prostor v kondenzátoru (obarvíme si ho) chceme vyplnit polem splňujícím Laplaceovu rovnici. Víme, že v diskrétní aproximaci pro potenciál platí

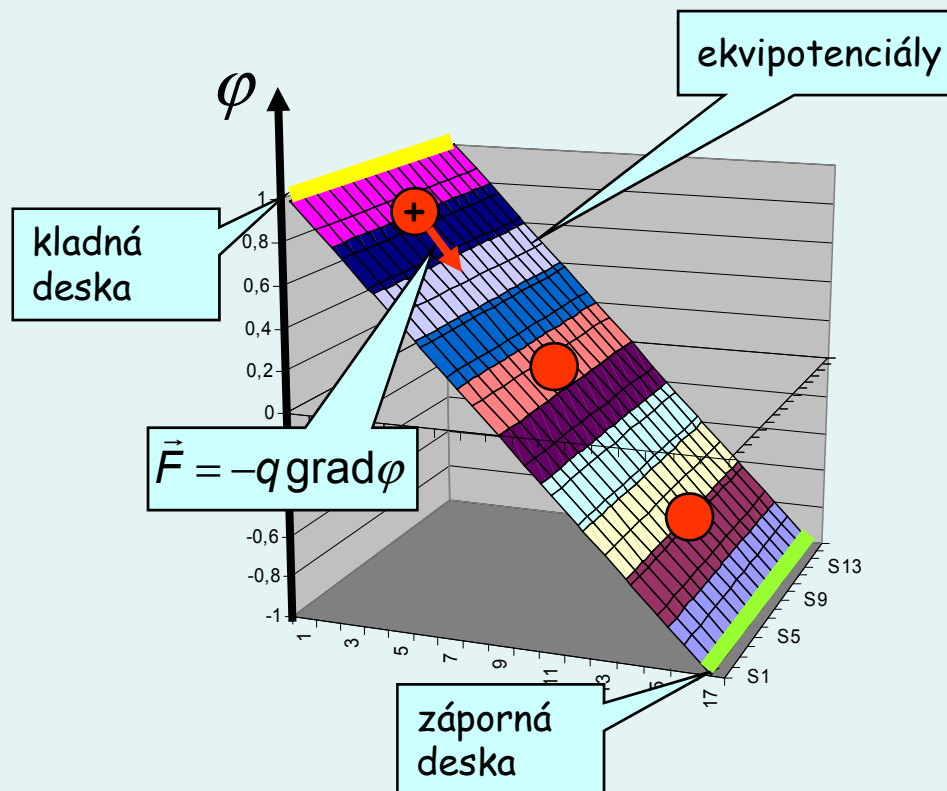
$$\varphi_{střed} = \frac{1}{4} (\sum \varphi_{okolo})$$

Napíšeme tento vzorec do libovolné vnitřní buňky kondenzátoru a zopakujeme ho ve všech vnitřních buňkách, tzn. najedeme kurzorem na pravý roh a roztáhneme do celé oblasti. Přitom nám vznikne cyklický odkaz (hodnota v jedné buňce je závislá na hodnotách v buňkách okolo, hodnoty v nich zase závisí také na té původní atd. ), proti čemuž Excel oprávněně reptá. Cyklické odkazy řeší Excel pomocí iterací, výpočet spočívá v tom, že se doblba přepočítávají hodnoty buněk. Proto zvolíme menu *Nástroje/Možnosti/Výpočty* a zaškrtneme *Iterace*.



## Stránky pro experty! Můžete je přeskočit, ale co to zkusit !

4. Zpravidla se pole ukazuje u nekonečného kondenzátoru, my máme v Excelu pouze konečnou oblast. Zkusíme to zařídit tak, aby se pole vlevo a vpravo neměnilo, tzn. buňky ve sloupci A položíme rovné hodnotám ve sloupci B a podobně to uděláme vpravo.
5. Nyní necháme Excel počítat; držte klávesu F9 tak dlouho, dokud se čísla v tabulce budou měnit.
6. Vypočítané hodnoty znázorníme v grafu. Označíme celou oblast kondenzátoru včetně desek a zvolíme v menu *Vložit/Graf/Povrchový(prostorový)*.

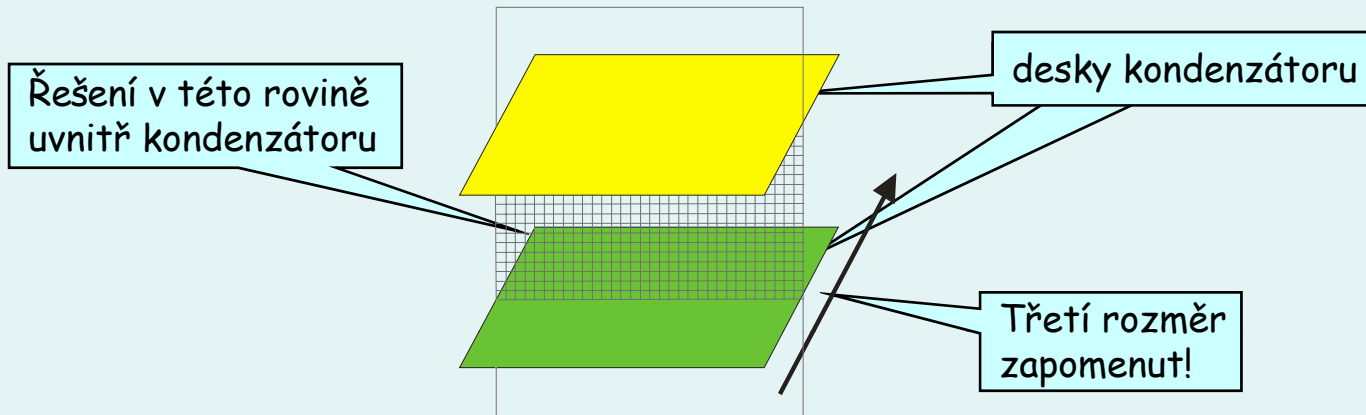


Jak se pohybuje kladná částice v takovémto poli? ... zrychleně pod působením síly, která je gradientem potenciálu (lidštěji řečeno, síla míří tam, kam potenciál klesá, a její velikost odpovídá derivaci  $\varphi$  v daném směru).

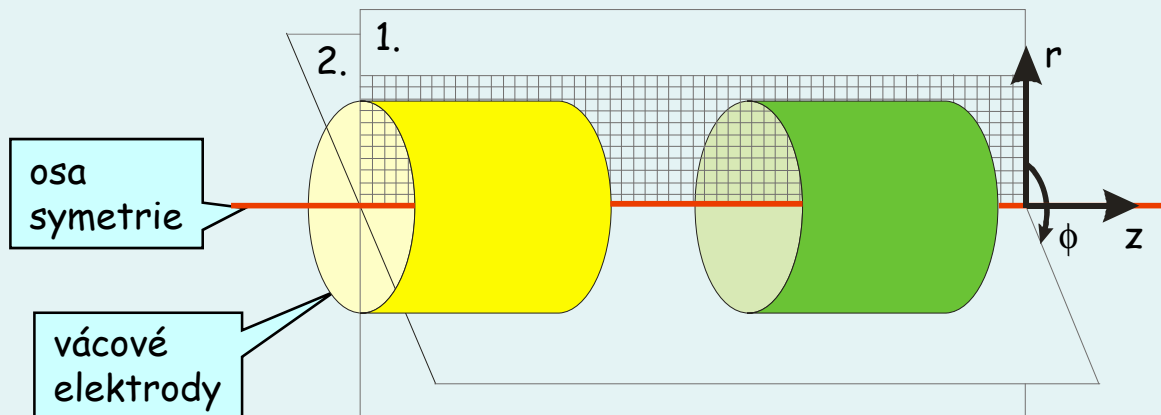
Odpovídá to situaci, kdybychom položili kuličku na nakloněnou plochu v homogenním gravitačním poli. Rozmyslete si to sami.

## Stránky pro experty! Můžete je přeskočit, ale co to zkusit !

Když jsme řešili rovinný kondenzátor, zapomněli jsme na třetí rozměr. Proč jsme na třetí rozměr mohli zapomenout? Protože není zajímavý, nic se v něm neděje - hodnota pole na této souřadnici nezávisí.



Nyní potřebujeme řešit pole válcových elektrod. To je sice opět 3-rozměrný problém, nedá se však také nějak zjednodušit? Rozložení pole v 1. a 2. rovině je stejné, protože systém má osovou symetrii. Jak to vzít v úvahu?



System s osovou symetrií je účelné popisovat ve válcových souřadnicích místo pravouhlých souřadnic. Právě ve válcových souřadnicích je vidět, že symetrie vůči ose  $z$  znamená nezávislost na úhlu  $\phi$ .

System má osovou symetrii, problém tedy stačí řešit pouze v jedné polorovině, potenciál nezávisí na úhlu  $\phi$ .



**Stránky pro experty! Můžete je přeskočit, ale co to zkusit !**

Zkusme spočítat takovéto pole mezi válcovými elektrodami ve válcových souřadnicích. Potenciál získáme vyřešením Laplaceovy rovnice  $\Delta\phi=0$ .

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplaceův operátor ve válcových souřadnicích

potenciál nezávisí na  $\phi$ , tento člen vynecháme

$$\Delta\phi=0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Laplaceova rovnice ve válcových souřadnicích

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{r_i} \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2h} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2ih^2}$$

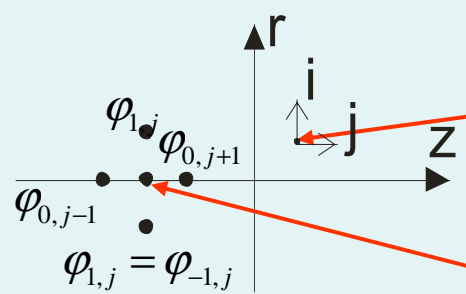
$$r_i = i \cdot h$$

$$\frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j}}{h^2}$$

$$\frac{\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j}}{h^2}$$

$$\frac{1}{h^2} \left( \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2i} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 4\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} \right) = 0$$

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{4} \left( \frac{(i+1/2)\phi_{i+1,j}}{i} + \frac{(i-1/2)\phi_{i-1,j}}{i} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} \right)$$



Na ose ( $i=0$ ):  $\Delta\phi = 2\phi_{1,j} + \phi_{0,j+1} + \phi_{0,j-1} - 4\phi_{0,j} = 0$

$$\phi_{0,j} = \frac{1}{4} (2\phi_{1,j} + \phi_{0,j+1} + \phi_{0,j-1})$$

$$\phi_{střed} = \frac{1}{4} (\sum \phi_{okolo}) \quad 21$$

# Stránky pro experty! Můžete je přeskočit, ale co to zkusit!

Kuchařku už neopakujeme, postup je podobný.

Microsoft Excel - Pole\_cylind\_fin

Soubor Úpravy Zobrazit Vložit Formát Nástroje Data Okno Nápověda

ODMOCNINA  $\Sigma$  Arial 10 % 000

Formula:  $=(((\$A9+1/2)/\$A9)*G8+((\$A9-1/2)/\$A9)*G10+F9+H9)/4$

1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
2		14																					
3		13																					
4		12																					
5		11																					
6		10																					
7		9																					
8		8																					
9		7																					
10		6																					
11		5																					
12		4																					
13		3																					
14		2																					
15		1																					
16		0																					
17		-1																					
18		-2																					
19		-3																					
20		-4																					
21		-5																					
22		-6																					
23		-7																					
24		-8																					
25		-9																					
26		-10																					
27		-11																					
28		-12																					
29		-13																					
30		-14																					
31																							
32																							
33																							
34																							

**1. potenciál na elektrodách**

**2.  $\varphi_{i,j} = \frac{1}{4} \left( \frac{(i+1/2)\varphi_{i+1,j}}{i} + \frac{(i-1/2)\varphi_{i-1,j}}{i} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} \right)$**

**3.  $\varphi_{střed} = \frac{1}{4} (\sum \varphi_{okolo})$**

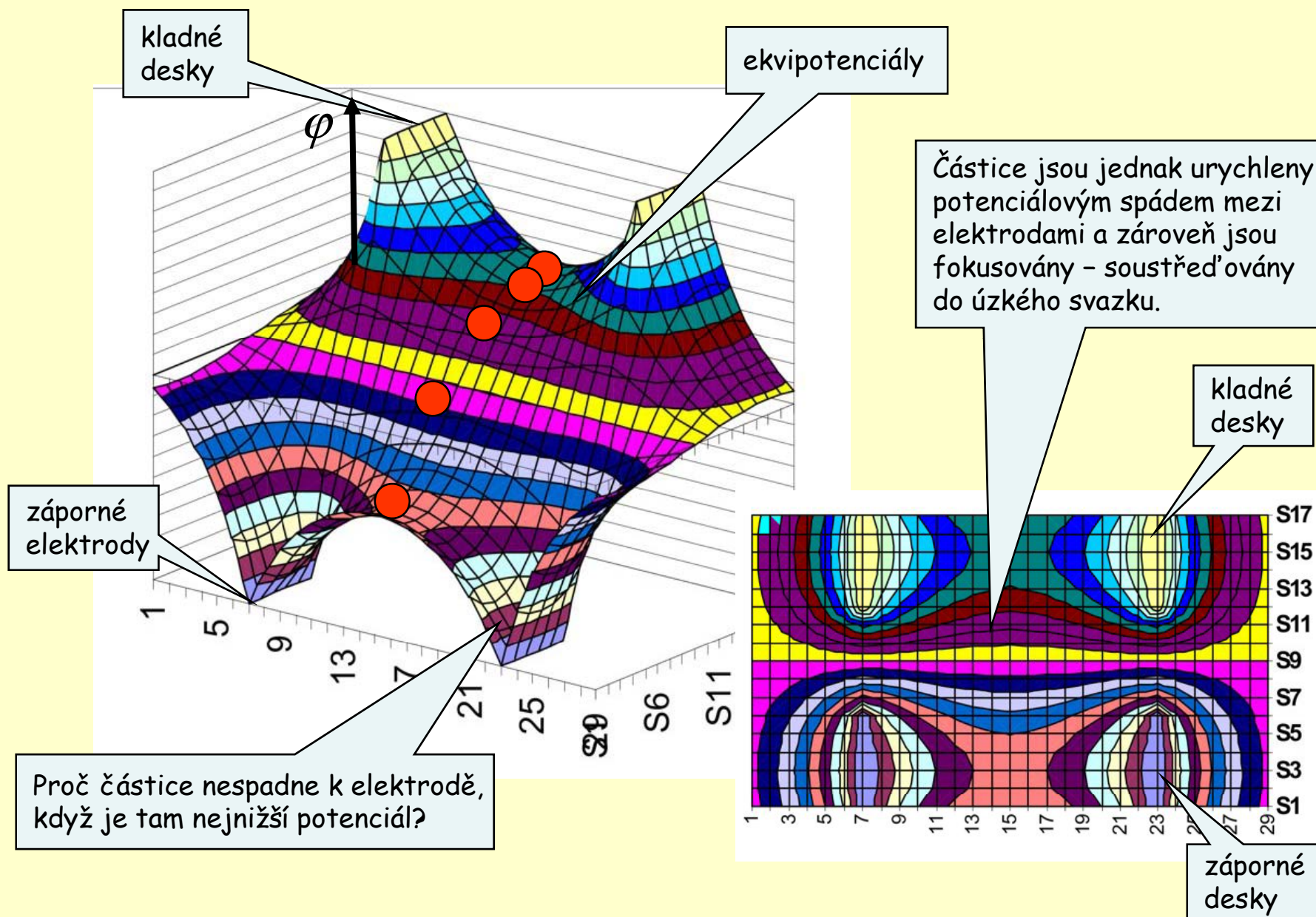
**4. okrajová podmínka (stejná je i vpravo u záporné elektrody)**

**nulový potenciál**

**Pozn.: Výpočet stačí udělat jen v jedné polorovině, neboť problém je osově symetrický. Pro lepší názornost ho počítáme v celé rovině.**

Potenciál je v rovině uprostřed mezi kladnou (+1 V) a zápornou (-1 V) elektrodou nulový. Toho využijeme při volbě okrajových podmínek. Předpokládáme řadu elektrod se střídajícími se potenciály. Potenciál bude nulový vždy uprostřed mezi nimi a tak můžeme náš výpočet zredukovat na oblast kolem jedné elektrody od „nuly“ k „nule“. Pro názornost je daleko hezčí počítat pole v oblasti alespoň dvou elektrod.

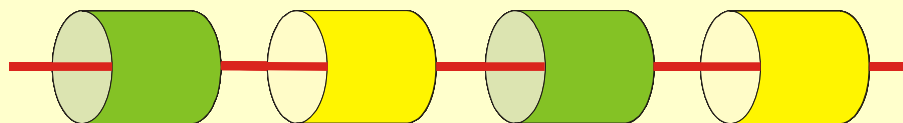
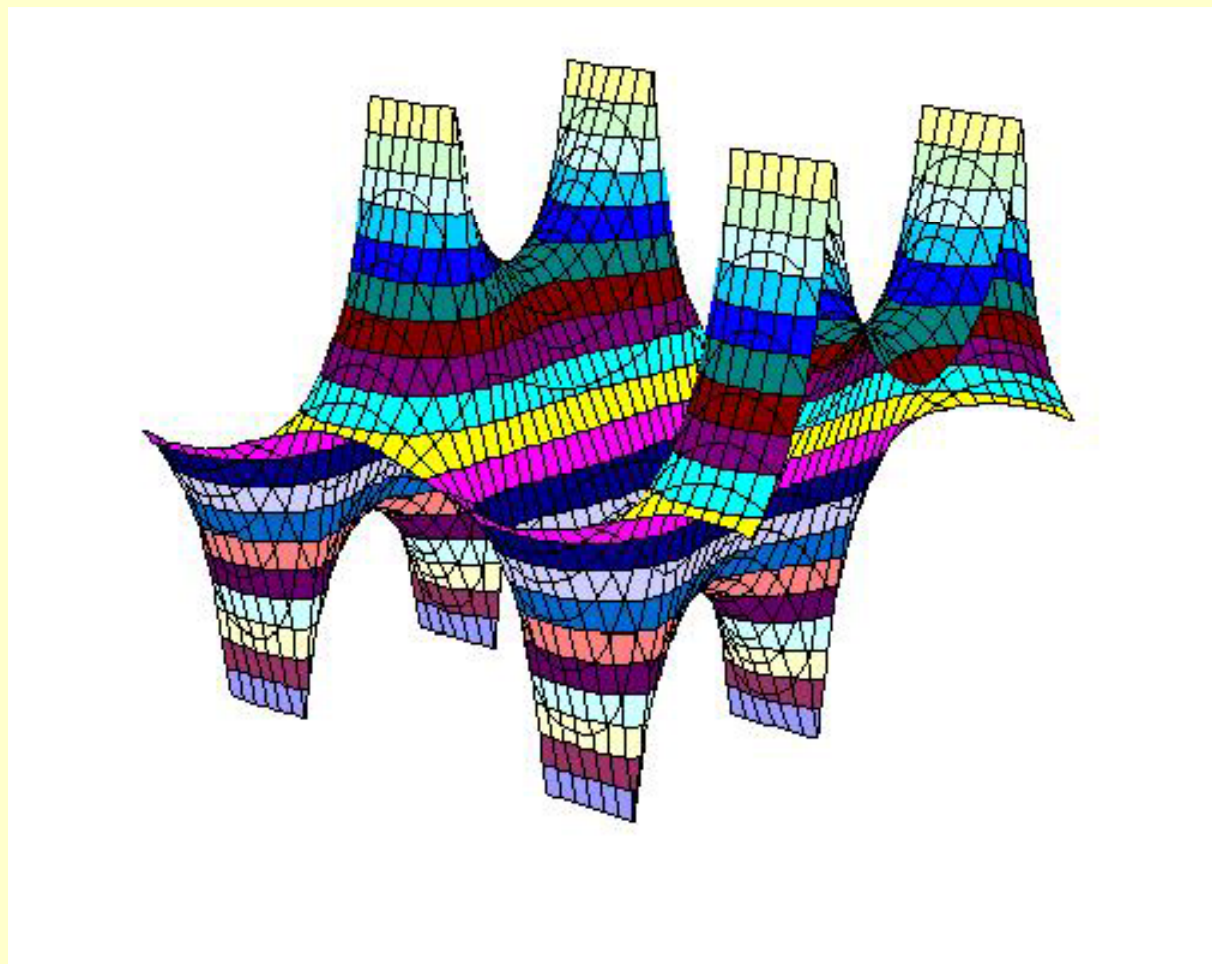
# Elektrostatická čočka a pole mezi elektrodami vůbec



# Elektrostatická čočka a pole mezi elektrodami vůbec

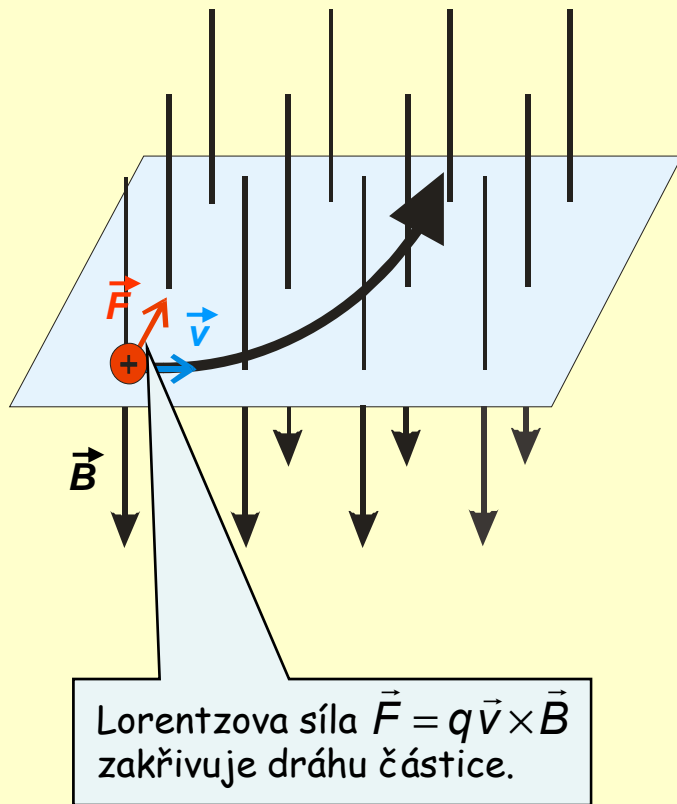
Když je částice uvnitř elektrody, elektroda je přepólována na opačný potenciál, aby mohla být částice urychlena k další elektrodě. To znamená, že potenciálové pole se změní a částice je v další mezeře opět urychlována.

Ve skutečnosti neurychlujeme jednu částici, ale skupinu, shluk neboli bunch.



## Urychlovače II. Kruhové urychlovače

Další možností, jak urychlovat částice, je nechat částici obíhat po kruhové dráze, kdy při každém oběhu projde částice jednou nebo více urychlovacími dutinami. V tomto případě potřebujeme kromě elektrického pole také silné magnetické pole, které zakříví dráhu částice.



Na nabitou částici působí Lorentzova síla, která je silou dostředivou

$$qvB = \frac{mv^2}{R}$$

Pro poloměr tedy platí:

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB}$$

Aby se částice pohybovala po kruhové dráze s konstantním poloměrem, musí platit:

$$\frac{p}{B} = konst$$

tzn. magnetické pole  $B$  se během urychlování musí synchronně měnit s rostoucí energií, proto se tomuto urychlovači říká synchrotron.

**Pozn.:** Velikost magnetického pole: Země  $10^{-5}$  T, odhad v televizi  $10^{-3}$  T, tyčový magnet  $10^{-2}$  T, velké elektromagnety 1,5 T. 25



# Jak vypadá a jak funguje dnešní urychlovač?

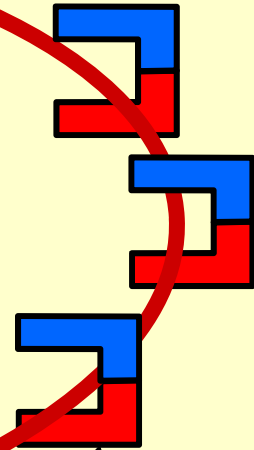
Urychlovač je vestavěn v tunelu podobném tunelu metra.

Kromě „zahýbacích“ magnetů má urychlovač magnety na zaostřování svazku.



Na několika místech jsou částice urychlovány vysokofrekvenčním polem v urychlovacích dutinách.

Urychlované částice létají ve vakuu v trubce zahnuté do kruhu. K letu po kruhové dráze jsou nuceny magnetickým polem magnetů obklopujících trubku.





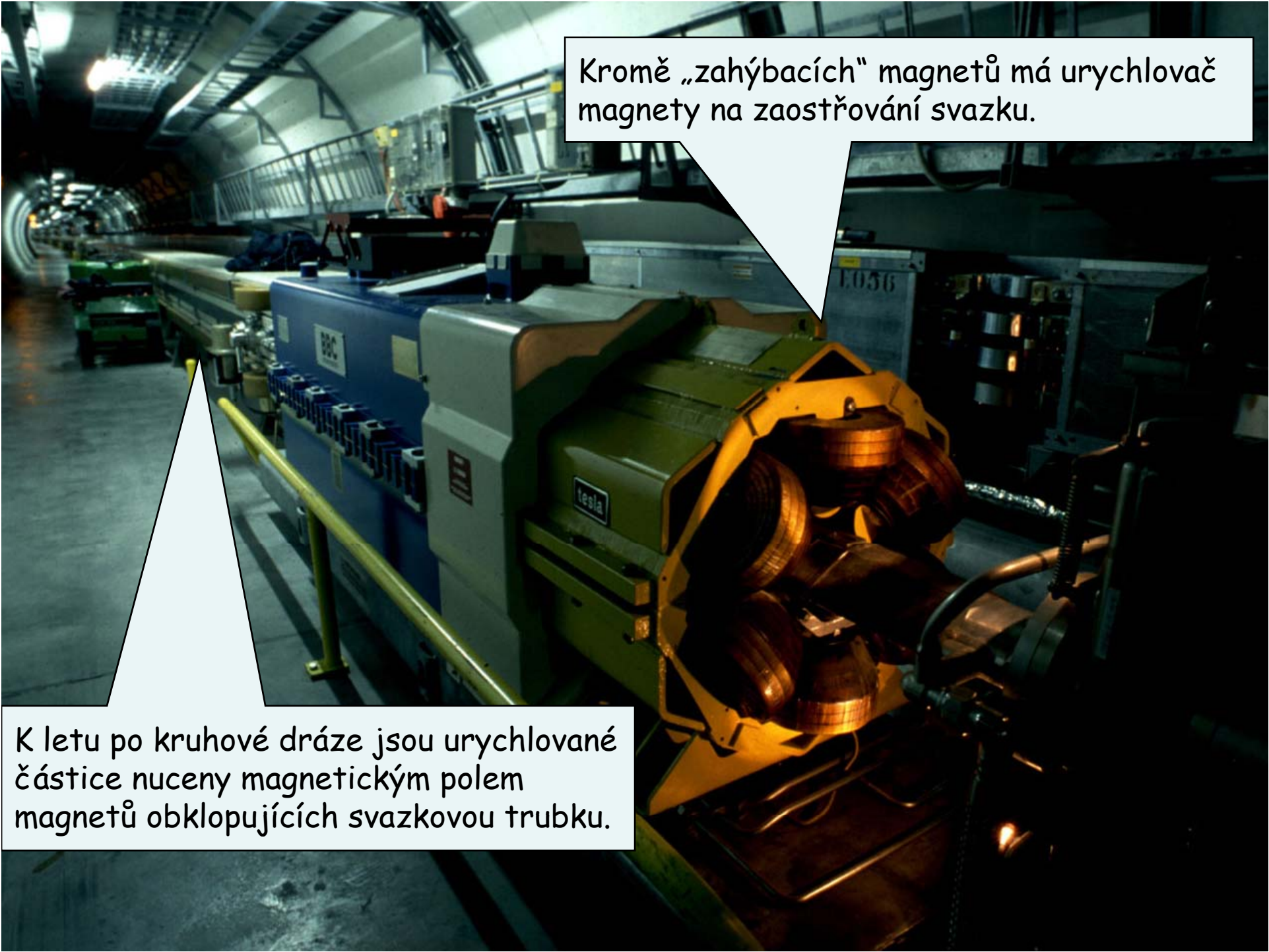
Urychlovač je vestavěn v tunelu podobném tunelu metra.





Urychlované částice létají ve vakuu  
v trubce zahnuté do kruhu. ...



A photograph of a particle accelerator tunnel. The tunnel is long and narrow, with a curved ceiling and floor. In the foreground, there is a large, complex piece of machinery, likely a magnet assembly, with a yellow frame and several large, cylindrical components. The machinery is labeled with the word "tesla". In the background, the tunnel extends into the distance, with various pipes and structures visible. A callout box with a white background and black border points to the machinery. The text inside the callout box is in Czech. The overall lighting is dim, with some bright spots from overhead lights.

Kromě „zahýbacích“ magnetů má urychlovač magnety na zaostřování svazku.

K letu po kruhové dráze jsou urychlované částice nuceny magnetickým polem magnetů obklopujících svazkovou trubku.





Na několika místech jsou částice urychlovány vysokofrekvenčním polem v urychlovacích dutinách.



## Urychlovací dutiny

Zatím jsme mluvili o urychlování částic mezi dvěma elektrodami. Energetický zisk částice  $E = qU$  je závislý na amplitudě napětí mezi elektrodami  $U$  a je omezený tím, jak velké (střídavé) napětí umíme vyrobit. Větší napětí, resp. větší intenzity pole se dá dosáhnout tak, že se pole nechá oscilovat v uzavřené dutině a jen se poštuchuje zvenku. Ona dutina je podstatná jako „krabička“ na elektromagnetické vlnění, vlnění v dutině se chová podobně jako sloupec vzduchu v nějakém hudebním nástroji.

Vlnění v dutině je potřeba nějak budit podobně jako stojaté zvukové vlny v hudebním nástroji. Optimální situace nastává, když budíme vlny, které dobře „pasují“ do dutiny - když nastává REZONANCE.



Urychlovací  
rezonanční dutiny .

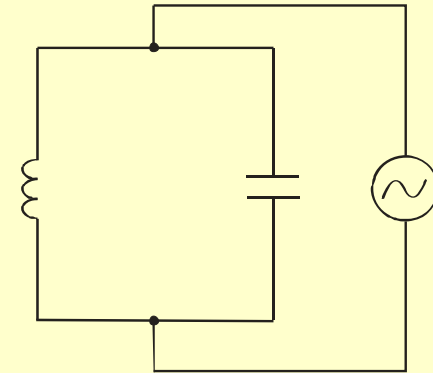
## Urychlovací dutiny

Podobně jako v RLC obvodu může zdroj s malým napětím při rezonanční frekvenci nabudit velké kmitající napětí v obvodu, lze v rezonanční urychlovací dutině dosáhnout přivedením budících mikrovln (používané frekvence jsou typicky stovky MHz) velkých intenzit pole, např. 25 MV/m.

Libovolné rozložení elektromagnetického pole by však ještě nemuselo správně urychlovat - například vlny ve volném prostoru sice nabité částice rozkmitají, ale nedonutí je letět nějakým směrem.

Pro urychlování je potřeba tvarem dutiny a způsobem buzení vytvořit speciální rozložení (mód) elektromagnetického pole, který je schopen shluky částic přilétající ve vhodném okamžiku urychlit.

Elektromagnetické pole v dutině indukuje proudy v jejích stěnách, které stěny zahřívají a působí tak ztráty. Řešením je udělat vnitřní stěny dutiny supravodivé (stačí 1-2 $\mu$ m vrstva) a tyto ztráty drasticky omezit.

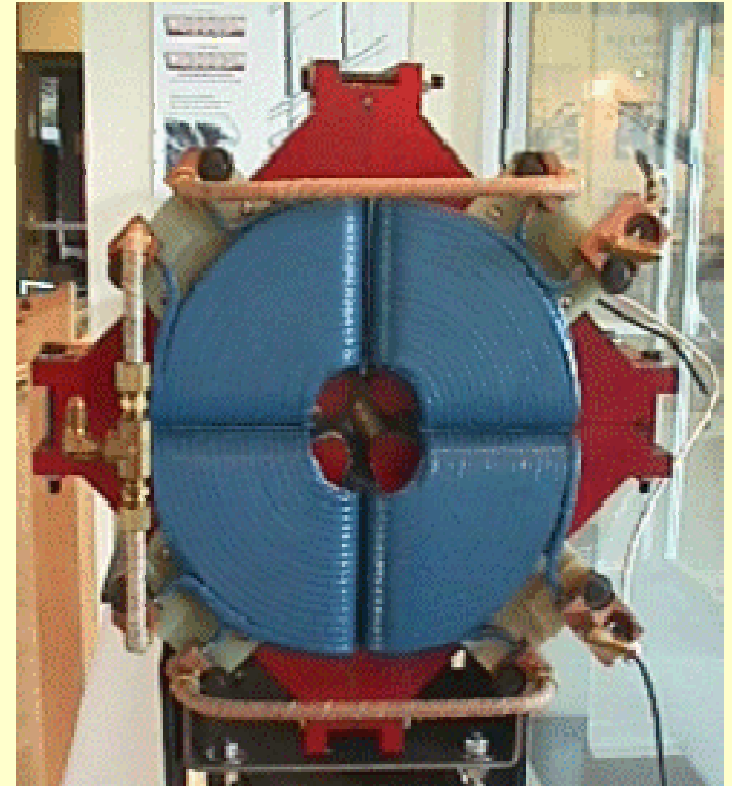


Pro urychlování je důležitý mód, ve kterém vzniká podélné elektrické pole s největší hodnotou na ose.

## Fokusace a kvadrupólové magnety

Částice by se měly pohybovat v urychlovači poblíž ideální dráhy uprostřed urychlovací trubice tak, aby nenarážely do stěn trubice. Nehomogenity magnetického pole, srážky se zbytkovým plynem a další efekty však částice od ideální dráhy odchylují, proto musí být vráceny k ideální dráze – fokusovány.

To lze udělat např. pomocí magnetického pole, ve kterém na částice pohybující se po ideální dráze nepůsobí žádná síla a na odchýlené částice působí síla, která je vrátí na požadovanou dráhu. Takovýto požadavek splňují kvadrupólové magnety.



Jak takový kvadrupólový magnet vypadá?

KVADRUpóly mají čtyři póly, dva protější póly jsou jižní a dva severní. Prakticky všechny magnety, o nichž mluvíme, jsou elektromagnety – feromagnetický materiál (ocel) je zmagnetován velkým elektrickým proudem protékajícím cívkami. Tvar pole je dán tvarem pólových nástavců.

# Fokusace a kvadrupólové magnety

Jaké síly působí na záporně nabitou částici procházející kvadrupólem?

Na částici vychýlenou ve svislém směru působí síly, které vrátí částici k ideální dráze, „zaostří“ - fokusuje svazek ve vertikálním směru.

Čím dál je částice od středu kvadrupólu, tím větší síla na ní působí.

Ve středu nepůsobí na částici žádná síla  
(ve čtvrtěk taky ne).

Siločáry magnetického pole kvadrupólu a síly působící na záporně nabitou částici vstupující do obr.

Na částici vychýlenou do strany působí síly, které částici vychýlí ještě dále od středu - svazek se „rozostří“ !

To ale znamená, že v jednom směru funguje magnet jako spojka a v druhém jako rozptylka ...

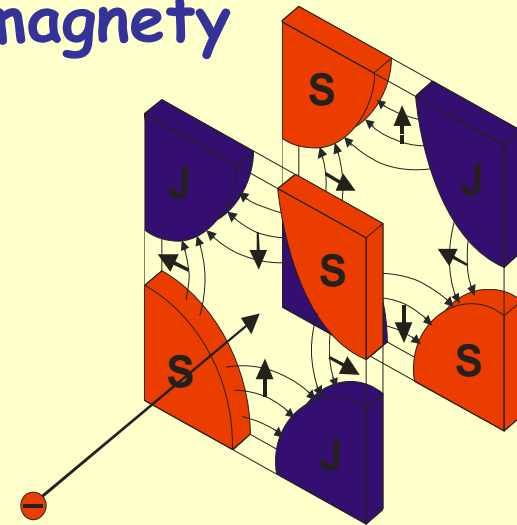
# Fokusace a kvadrupólové magnety

... to vyřešíme umístěním dvou kvadrupólů za sebou pootočených navzájem o  $90^\circ$ .

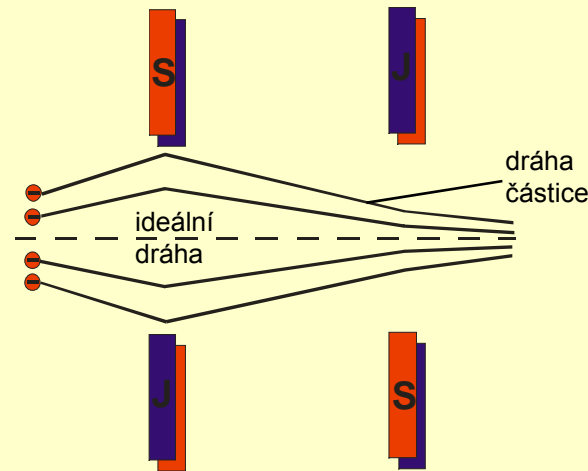
Takto umístěné magnety za sebou fungují v obou rovinách stejně jako rozptylka a spojka u světla.

Při vhodné volbě vzdálenosti mezi nimi je svazek „zaostřen“ - fokusován v obou rovinách.

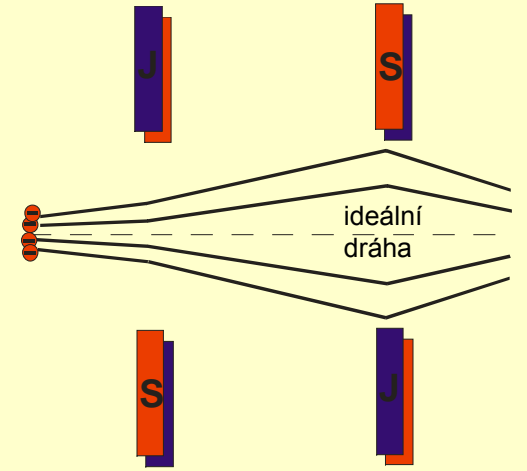
Ve starších knihách najdete tuto metodu pod názvem „silná fokusace“.



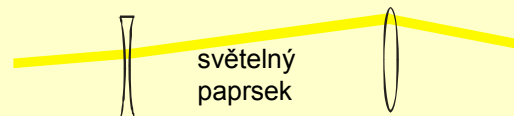
Pohled ze strany



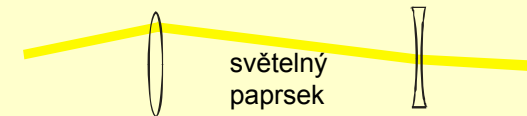
Pohled ze shora



Svazek částic se chová stejně jako světlo při průchodu čočkami.



světelný paprsek



světelný paprsek



# Synchrotronové záření

Problémem u kruhových urychlovačů jsou ztráty energie, neboť pokud se nabitě částice pohybují po zakřivené dráze, ztrácí energii tzv. synchrotronovým zářením. Pro „vyzářený“ výkon relativistické částice platí:

$$P = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^4$$

Ztráty jsou úměrné čtvrté mocnině poměru energie a hmotnosti částice.

Tomuto výkonu odpovídají ztráty energie vyzařené při jednom oběhu urychlovačem:

$$\Delta E = Pt = \frac{e^2 c}{6\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^4 \frac{2\pi R}{c} = \frac{e^2}{3\epsilon_0} \frac{1}{R} \left( \frac{E}{m_0 c^2} \right)^4$$

obvod urychlovače

Ztráty jsou pro lehké částice (elektrony) daleko větší než pro těžké částice (protony) se stejnou energií.

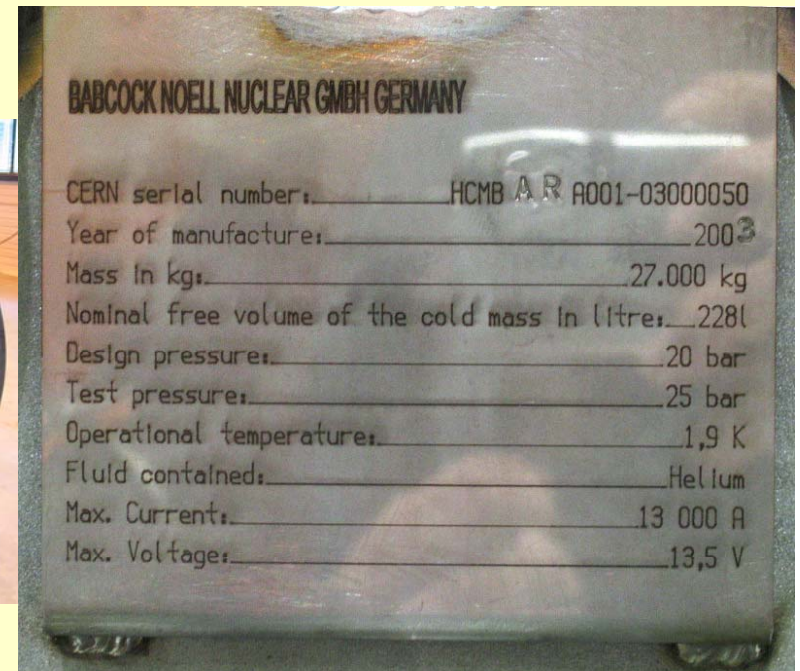
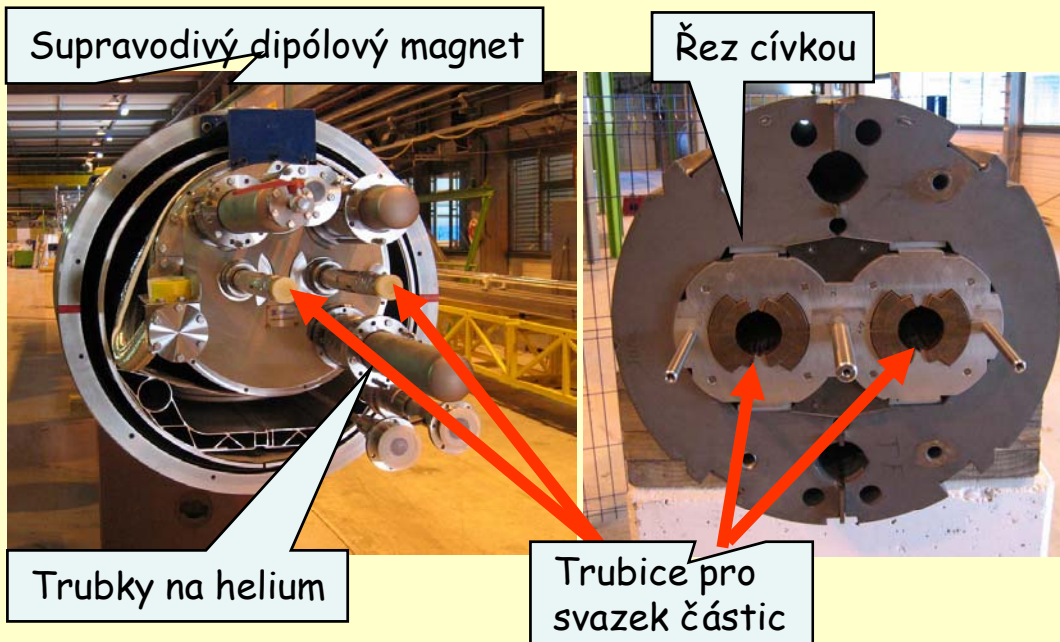
urychlené částice letí skoro rychlostí světla

Ztráty jsou tím větší, čím větší je zakřivení, tedy menší poloměr.

Pojďme si ztráty ilustrovat na nedávném největším urychlovači LEP o délce 27 km, kde byly v poslední fázi urychlovány elektrony na energii 100 GeV. Ztráty elektronu při jednom oběhu byly 2 GeV (protony by ztrácely  $1,8 \times 10^{-4}$  eV na oběh). V tomto tunelu se nyní buduje nový urychlovač LHC, kde se budou urychlovat protony na energii 7 TeV. Ztráty způsobené synchrotronovým zářením budou jen 4 keV na jeden oběh.

# Synchrotronové záření

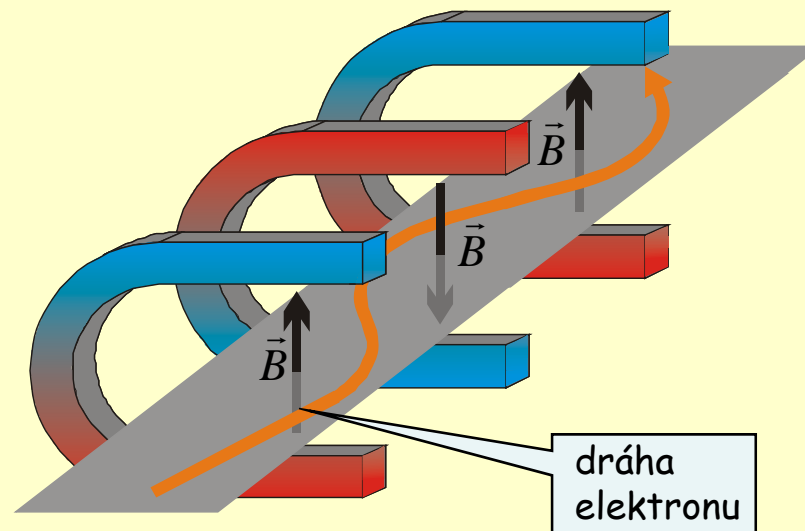
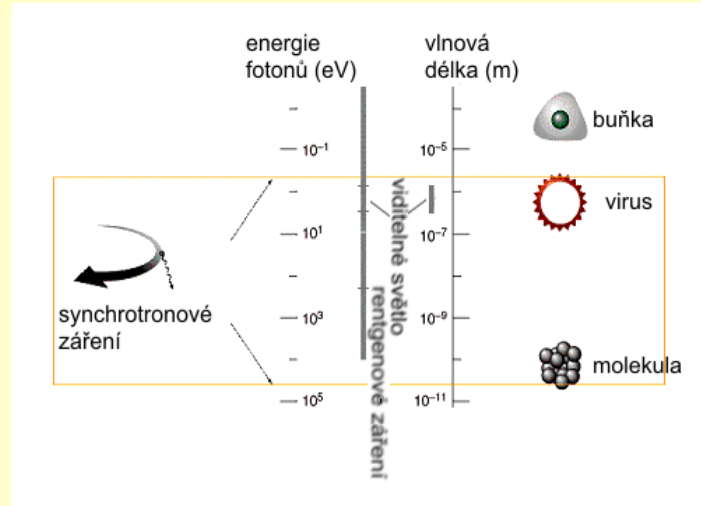
Ztráty způsobené synchrotronovým zářením omezují dosažitelnou energii elektronových urychlovačů. Řešením je stavět urychlovače s větším poloměrem a tím snížit ztráty energie a dodávat svazku elektronů vyzářenou energii použitím dostatečného množství urychlovacích dutin. Radikálním řešením je návrat k lineárnímu urychlovači. Dosažitelnou energii protonových urychlovačů neomezuje synchrotronové záření, ale dosažitelná velikost magnetické indukce v dipólových magnetech zakřivujících dráhy protonů. Například na urychlovači LHC budou použity supravodivé magnety s indukcí magnetického pole 8,4 T, zatímco na LEP stačilo 0,1 T.



# Synchrotronové záření

Kromě toho, že synchrotronové záření způsobuje při urychlování částic problémy, lze ho využít například ke zkoumání struktury materiálů, molekul a virů. Je to záření o energiích několika keV - MeV s vlnovými délkami od viditelného světla až po tvrdé RTG záření.

Pro získání větší intenzity synchrotronového záření se budují speciální zařízení, kde je magnetické pole postaveno tak, že elektrony jsou nuceny kličkovat a tím více vyzařují.



## Světové laboratoře s největšími urychlovači

