

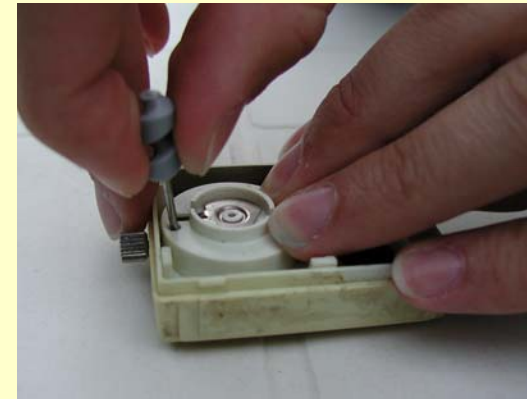
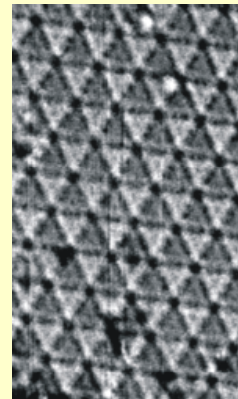
# Experiment v částicové fyzice

Jiří Dolejší, Olga Kotrbová, Univerzita Karlova v Praze

Věci kolem nás můžeme zkoumat různým způsobem, u některých objektů se stačí podívat dovnitř (jako např. do malého budíku na fotografii). Tento způsob ale nemůžeme použít pro zkoumání atomů a jejich částí... nemáme ani tak malý šroubovák, ani mikroskop, abychom se v atomech mohli šťourat a něco uvidět.



S dnešními nejlepšími mikroskopy můžeme vidět pouze jednotlivé atomy jako na tomto obrázku z tunelovacího mikroskopu, ale nemůžeme vidět dovnitř těchto atomů.



Už na začátku 20. stol. vymysleli E. Rutherford a jeho spolupracovníci novou metodu, jak studovat vnitřek atomů.  $\alpha$ - částicemi ostřelovali tenkou zlatou fólii a objevili, že experimentálním datům nejlépe odpovídá model téměř prázdného atomu s malým těžkým jádrem a elektrony obíhajícími kolem tohoto jádra. I dnes, po devadesáti letech, v rozptylových experimentech pokračujeme, např. srážkami jader zlata na RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) a očekáváme, že o hmotě zjistíme něco nového.

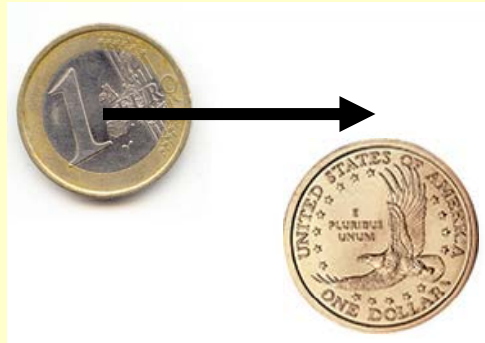
## Jak studovat věci pomocí srážek? Zkusme to!

První pokus: Zkusím použít srážku místo šroubováku ke studiu budíku:



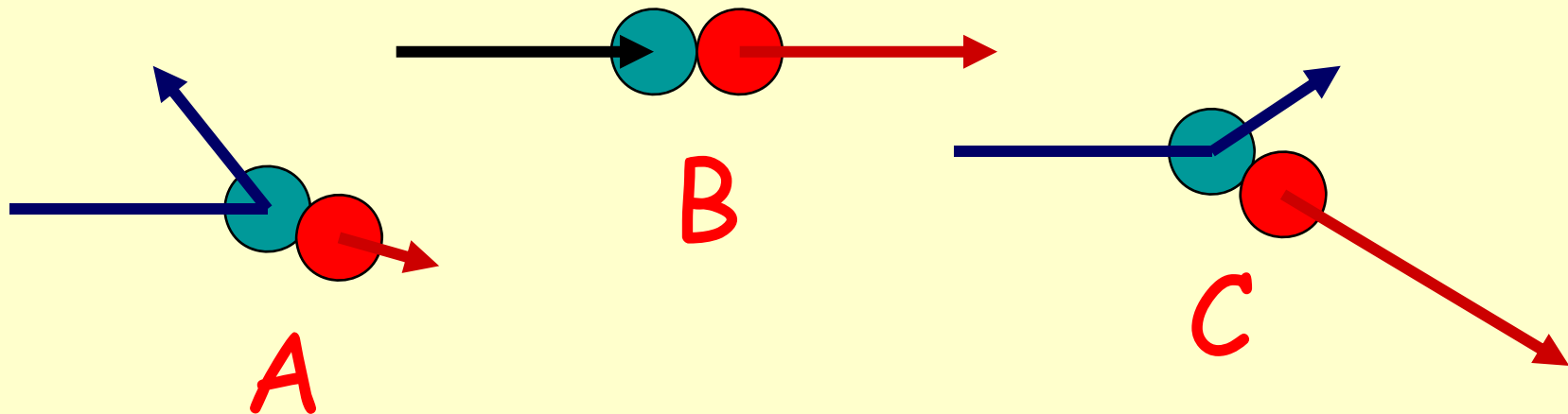
Uspěl jsem a dostal jsem se dovnitř! Ale ne dostatečně hluboko dovnitř. Možná potřebuji větší energii ... A také jsem z tohoto experimentu funkci budíku moc nepochopil. Asi bude lepší začít s něčím jednodušším ...

Atomy, jádra, částice ... Asi si je představujeme jako malé kuličky. Místo hraní si s kuličkami navrhuji cvrknat si s mincemi a studovat jejich srážky. Položme dvě mince na hladký povrch, cvrkněme jednou do druhé a sledujme výsledek.



*Varování před falešnou interpretací:  
Srážky eura a dolaru nemají ani  
politický, ani ekonomický význam.*

Budete-li si s mincemi chvíli hrát, získáte zkušenost s jejich chováním. Podívejte se na následující situace a rozhodněte, která z mincí je těžší (šipky ukazují rychlosti).

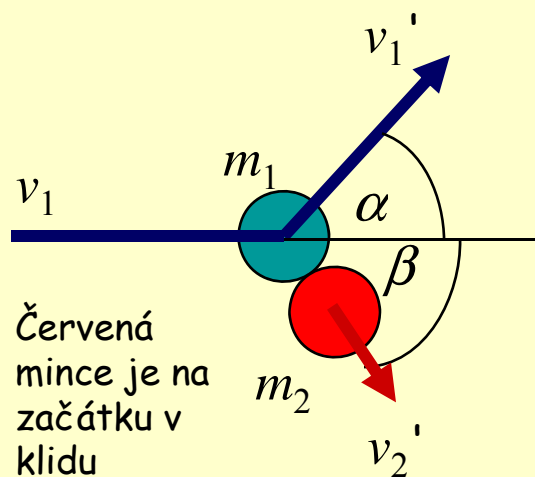


Doufáme, že jsou vaše odpovědi správné: obě mince mají stejnou hmotnost v případě B, modrá je lehčí v A a těžší v C.  
 Můžete si zopakovat pokus s „mincemi“ a „dvojmincemi“ slepenými oboustranou lepící páskou:



## A co popsat srážku mincí způsobem obvyklým v mechanice?

Potřebnými veličinami jsou hmotnosti  $m_1, m_2$ , rychlosti  $v_1, v_2$  před srážkou a  $v_1', v_2'$  po srážce. Důležité veličiny jsou také **energie**  $E$  a **hybnost**  $\vec{p}$ .



Červená mince je na začátku v klidu

$$v_2 = 0$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad p = mv = \sqrt{2mE}$$

Jak energie, tak hybnost se v izolovaném systému zachovává:

$$E_1 + E_2 = E_1' + E_2'$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

Pracujme pouze s hybnostmi:  
zachování energie...

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$$

... a zachování obou složek hybností

$$p_1 = p_1' \cos \alpha + p_2' \cos \beta$$

$$0 = p_1' \sin \alpha - p_2' \sin \beta$$

Pohrajme si s hybnostmi: Rádi bychom se zbavili  $p_2'$  a  $\beta$ , pro tento účel by se hodilo použít rovnici

$$\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1.$$

Upravíme rovnice pro složky hybnosti, každou z nich umocníme a sečteme je:

$$p_1 - p_1' \cos \alpha = p_2' \cos \beta$$

$$p_1' \sin \alpha = p_2' \sin \beta$$

$$(p_1 - p_1' \cos \alpha)^2 = p_2'^2 \cos^2 \beta$$

$$(p_1' \sin \alpha)^2 = p_2'^2 \sin^2 \beta$$

$p_2'^2$  můžeme dosadit do rovnice zachování energie:

$$\frac{m_2}{m_1} (p_1^2 - p_1'^2) = p_1^2 - 2p_1 p_1' \cos \alpha + p_1'^2$$

$$p_1^2 - 2p_1 p_1' \cos \alpha + p_1'^2 \cos^2 \alpha + p_1'^2 \sin^2 \alpha = p_2'^2 \cos^2 \beta + p_2'^2 \sin^2 \beta$$

$$p_1^2 - 2p_1 p_1' \cos \alpha + p_1'^2 = p_2'^2$$

Poslední rovnice  $\frac{m_2}{m_1}(p_1^2 - p_1'^2) = p_1^2 - 2p_1p_1' \cos \alpha + p_1'^2$

je kvadratická rovnice pro  $p_1'^2$

$$p_1'^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) - 2p_1p_1' \cos \alpha + p_1^2 \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) = 0.$$

Diskriminant je

$$D = 4p_1^2 \cos^2 \alpha - 4p_1^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) = 4p_1^2 \left[ \cos^2 \alpha - 1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \right]$$

... a řešení

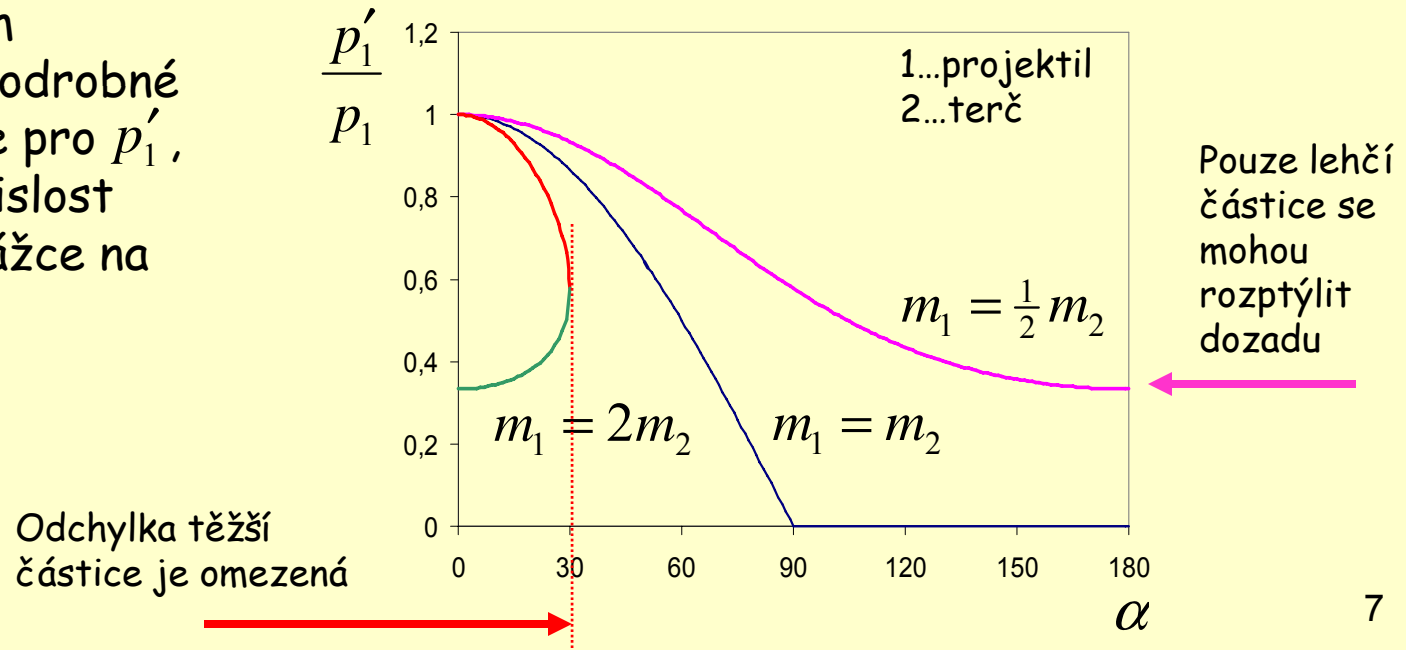
$$p_1' = \frac{2p_1 \cos \alpha \pm 2p_1 \sqrt{\cos^2 \alpha - 1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2}}{2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} = p_1 \frac{\cos \alpha \pm \sqrt{\cos^2 \alpha - 1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2}}{1 + \frac{m_2}{m_1}}.$$

Připomeňme si, že hledáme reálné nezáporné řešení (je to hybnost po srážce).  
Nejjednodušší je diskutovat případ, kdy jsou obě hmotnosti stejné  $m_1 = m_2$ :

$$p'_1 = p_1 \frac{\cos \alpha \pm \sqrt{\cos^2 \alpha}}{2} = p_1 \cos \alpha \text{ for } \alpha \leq 90^\circ \text{ or } p'_1 = 0.$$

Tedy při srážce dvou stejně těžkých mincí se mince nemůže rozptýlit dozadu.  
Bud' pokračuje dopředu, možná se odchýlí, nebo se zastaví. Ze zákona zákona zachování energie plyne, že když se mince zastaví, terčíková mince převezme veškerou energii i hybnost. Vyzkoušej si to na kulečnicku!!!

Místo, abychom pokračovali v podrobné diskusi formule pro  $p'_1$ , nakreslíme závislost hybnosti po srážce na úhlu rozptylu:



Když jsme si hráli s mincemi, používali jsme pouze ty nejobecnější zákony mechaniky. Naše výsledky tedy platí pro srážky jakýchkoliv objektů, včetně subatomových částic. Jediná „komplikace“ souvisí s příjemným faktem, že částice mohou být urychleny na **rychlost blízkou rychlosti světla**. Pak se objevují podivné efekty, které dobře popisuje nebo předpovídá **speciální teorie relativity** - částice mají větší hmotnost než v klidu, nestabilní částice žijí v pohybu déle než v klidu.

Náš výpočet můžeme na relativistické rychlosti jednoduše upravit :

Místo nerelativistické kinetické energie  $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$  budeme počítat s celkovou relativistickou energií  $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ .

$p_2'^2$  z bilance složek hybnosti dosadíme do rovnice zachování energie (všechny hmotnosti v této rovnici jsou klidové hmotnosti):

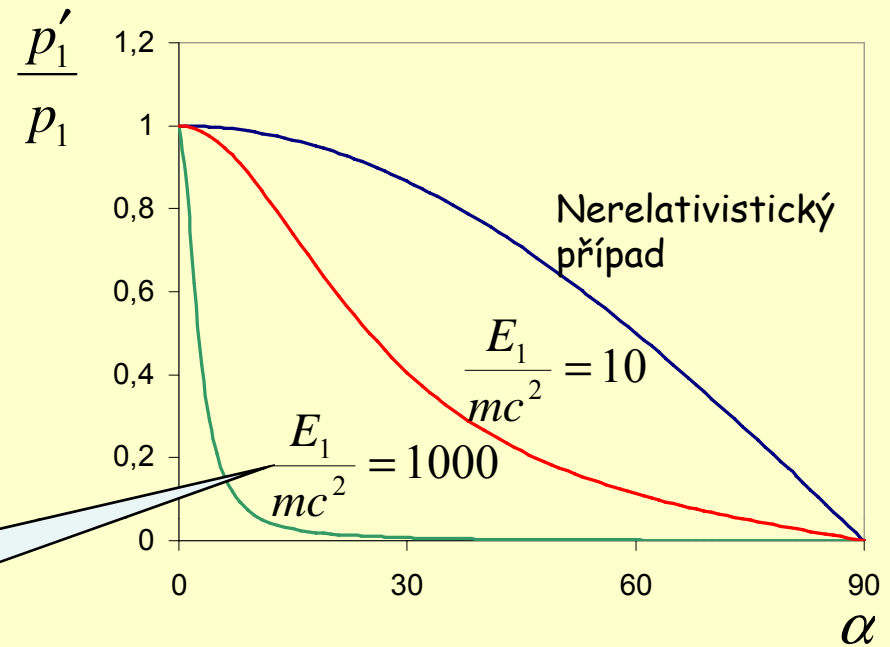
$$\sqrt{m_1^2c^4 + p_1^2c^2} + m_2c^2 = \sqrt{m_1^2c^4 + p_1'^2c^2} + \sqrt{m_2^2c^4 + p_2'^2c^2}$$

Na výpočet  $p_1'$  bychom potřebovali v relativistickém případě více času, více papíru a více trpělivosti. Výsledek vám ukážeme pouze v nejjednodušším případě, kdy  $m_1 = m_2 = m$ :

$$p_1' = p_1 \frac{\cos \alpha}{1 + \frac{p_1^2 \sin^2 \alpha}{2m(E_1 + m)}} \quad \text{or} \quad p_1' = 0.$$



Rozdíl mezi nerelativistickým a relativistickým výpočtem je vidět na tomto grafu:



Na urychlovači v laboratoři FNAL (USA) jsou protony urychlovány na energie více než 1000 krát větší než klidová hmotnost

**Porozumění kinematice srážek nám umožňuje porovnávat hmotnosti mincí nebo částic pouze jejich srážením.**

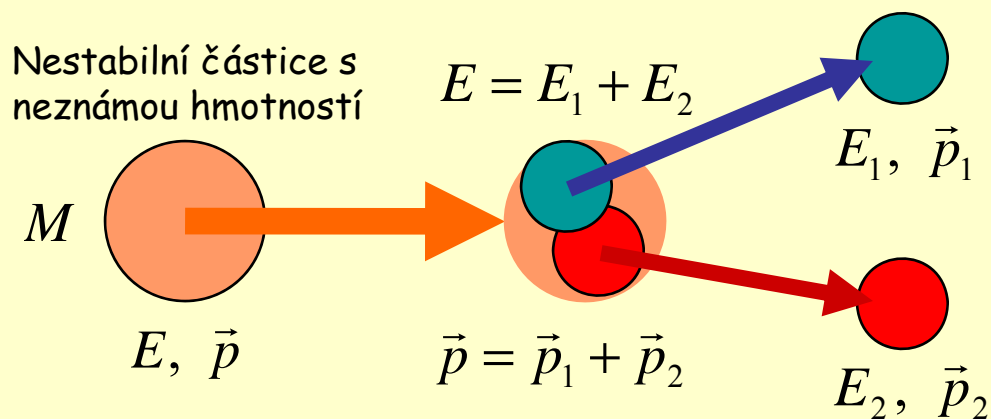
První úspěch! Srážky jsou přinejmenším k něčemu dobré, nejen k ničení ...

Rovnice pro relativistickou energii  $E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$

může být přepsána do tvaru  $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$ .

Energie a hybnost mají v různých **vztažných soustavách** jiné hodnoty - láhev v mé ruce ve vlaku nemá žádnou kinetickou energii vzhledem k vlaku, ale může mít docela podstatnou energii vzhledem k zemi či osobě u trati.

Ale ten speciální výraz nahoře - rozdíl kvadrátů  $E$  a  $\vec{p}$  - se vždy rovná (nezávisle na vztažné soustavě) kvadrátu klidové hmotnosti částice vynásobené  $c^4$ , což je konstanta. Tato vlastnost vede k překvapivě jednoduchému způsobu, jak měřit **hmotnosti nestabilních částic**:



Změřte energie a hybnosti produktů rozpadu  $E_1, \vec{p}_1$  a  $E_2, \vec{p}_2$  a potom spočítejte

$$(E_1 + E_2)^2 - (p_1 + p_2)^2 c^2 = M^2 c^4.$$

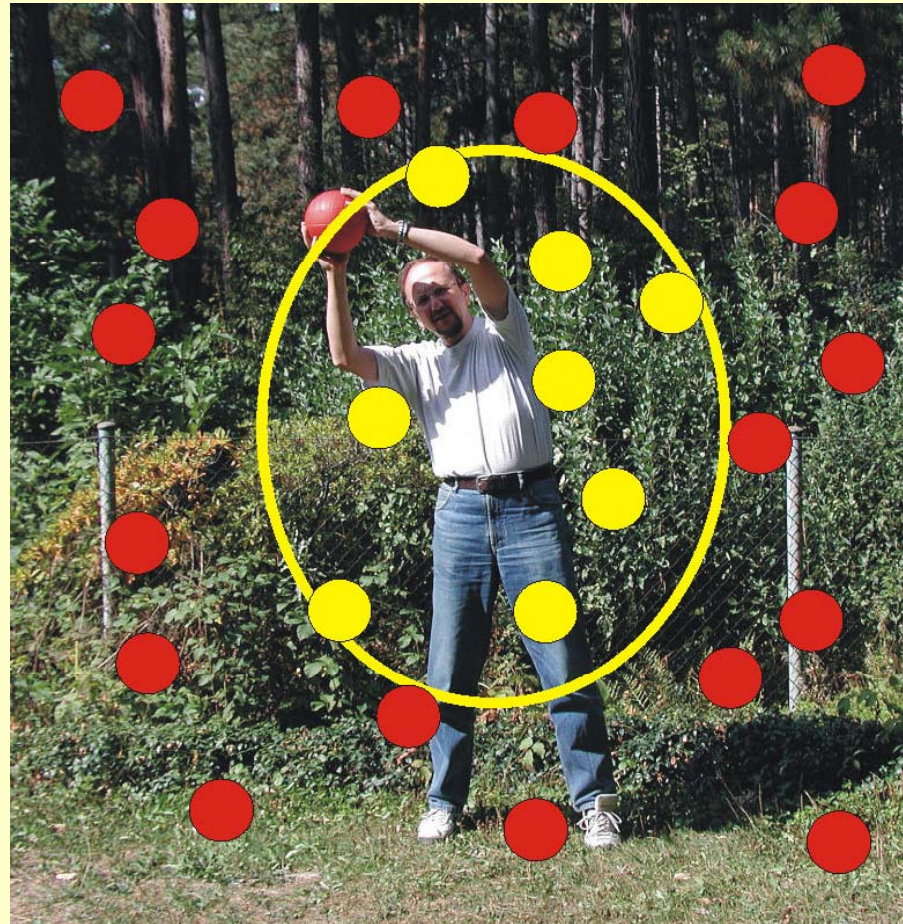
**Dostanete hmotnost  $M$ !**

V knihách o teorii relativity se můžete setkat s pojmem čtyřvektor energie-hybnosti, invariantní hmotnosti atd. Tyto pojmy se týkají přesně našeho tématu, poučte se více ...

Samozřejmě, že měřit hmotnosti částic je trochu málo. Jak se tedy dozvědět více, jak rozumět struktuře částic, jejich interakcím, atd.? Jedním způsobem je sledovat, co se všechno může stát a s jakou pravděpodobností. Můžeme zase začít s naším „makro“ světem.

Jaká je pravděpodobnost, že chytím míč, který na mě letí? Nejlepším řešením, jak odpovědět na tuto otázku je experimentovat.

Z náhodně zamířených mírných střel jsem chytil všechny žluté. Při mnohém opakování tohoto experimentu se mi podařilo chytat všechny střely uvnitř plochy se žlutým okrajem. Střely letící vně žluté čáry jsem díky své lenosti a neschopnosti nechytal.



Moje „schopnost“ chytit vystřelený míč je charakterizovaná žlutou plochou - ta je něco okolo  $2 \text{ m}^2$  - to znamená, že při „toku“ střel o hustotě 10 střel na jeden metr čtvereční očekávám, že chytím 20 střel.

Moje „schopnost chytání“ je charakterizovaná **efektivní plochou**, kterou jsem schopen pokrýt. Pro tuto veličinu používají fyzici speciální výraz - „účinný průřez“ a obvykle ho označují písmenem  $\sigma$ . Jestliže tok nalétávajících částic s hustotou  $j$  zasáhne terč, potom počet zajímavých událostí  $N$  s účinným průřezem  $\sigma$  je

$$N = \sigma \cdot j.$$

Standardní jednotkou pro účinný průřez je 1 barn =  $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$ .



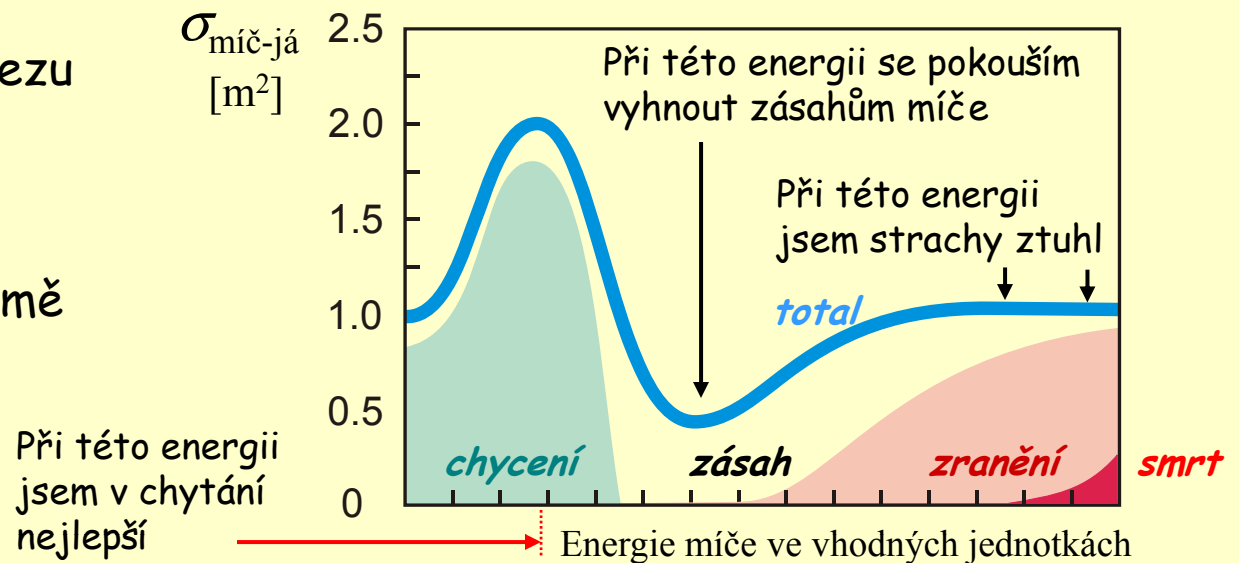
Pomocí účinného průřezu můžeme vyjádřit mnoho informací. Například počet střel, které chytím, se může měnit podle jejich tvrdosti - podle energie míče. Jednodušeji chytím pomalý míč, před děsivě rychlým se naopak raději pokusím uhnout nebo schovat.

Proto bude můj účinný průřez chytání pro rychlé střely nulový a účinný průřez toho, že mě míč zasáhne, bude velmi blízký ploše mého obrysu (zvětšené o pás o šířce poloměru míče).

Lze uvažovat speciální (tzv. „parciální“) účinný průřez pro neradostný průběh experimentu, kdy míč rozbije mé brýle atd. Všechny možné procesy mohou být sečteny v jeden **totální účinný průřez**.



Závislost účinného průřezu na energii týkající se interakce mě a míče by mohla vypadat jako na tomto grafu (a hodně o mě prozradit...).

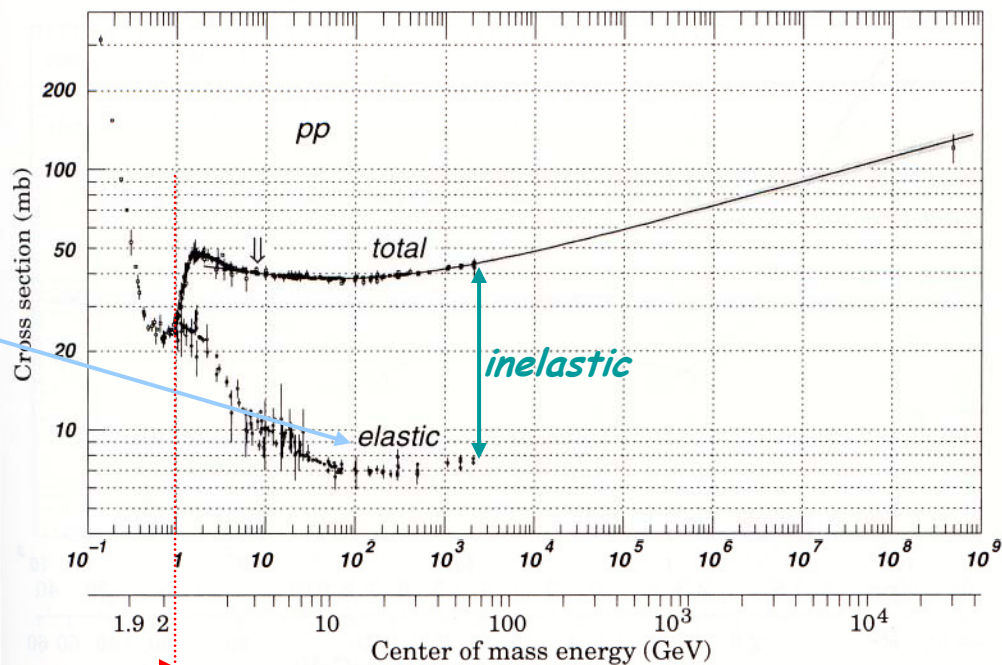


Účinné průřezy pro proton-protonovou interakci jsou znázorněny na tomto grafu:

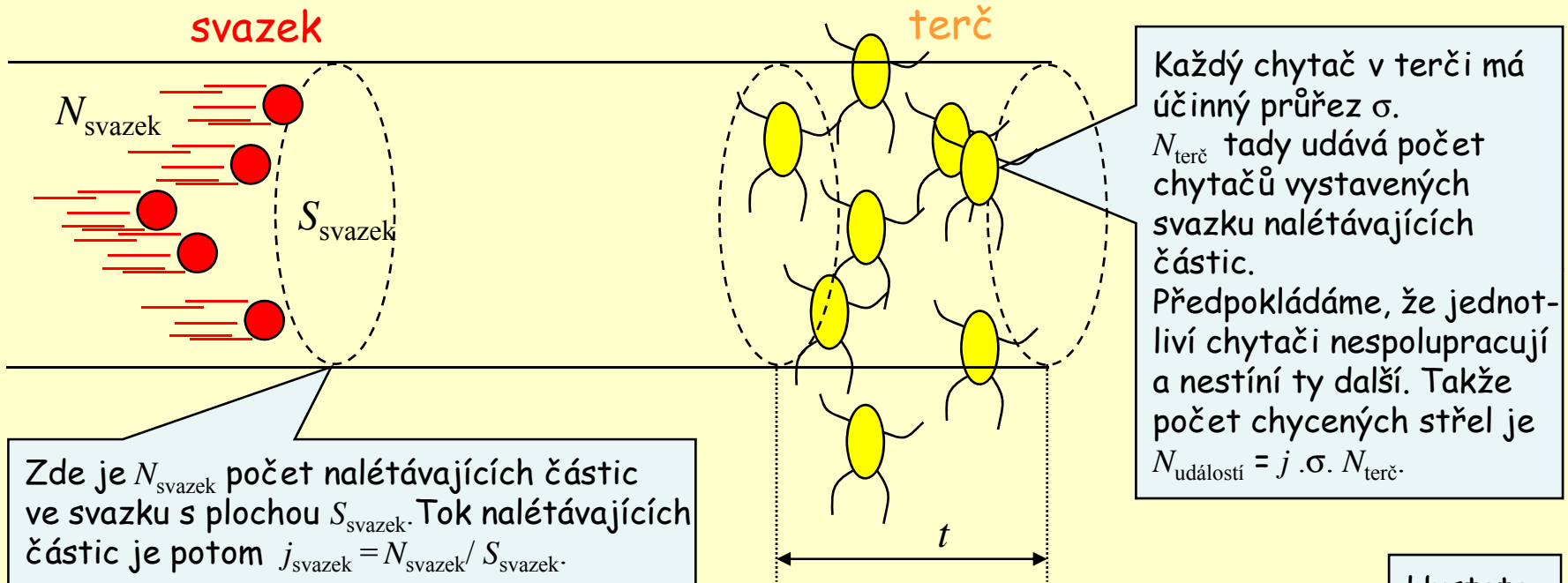
**Elastický účinný průřez** - srážející se částice zůstávají neporušené, mění pouze směr svého letu.

Při této energii mají srážející se protony dostatečnou energii, aby vznikla nová částice - pion. Toto je jeden příklad procesu, který přispívá k inelastickému účinnému průřezu

$$\sigma_{inelastic} = \sigma_{total} - \sigma_{elastic}$$



Ve skutečnosti se hejno nalétávajících částic rozptyluje ne na jedné částici terče, ale na mnoha. Tato situace může vypadat jako na našem obrázku ....



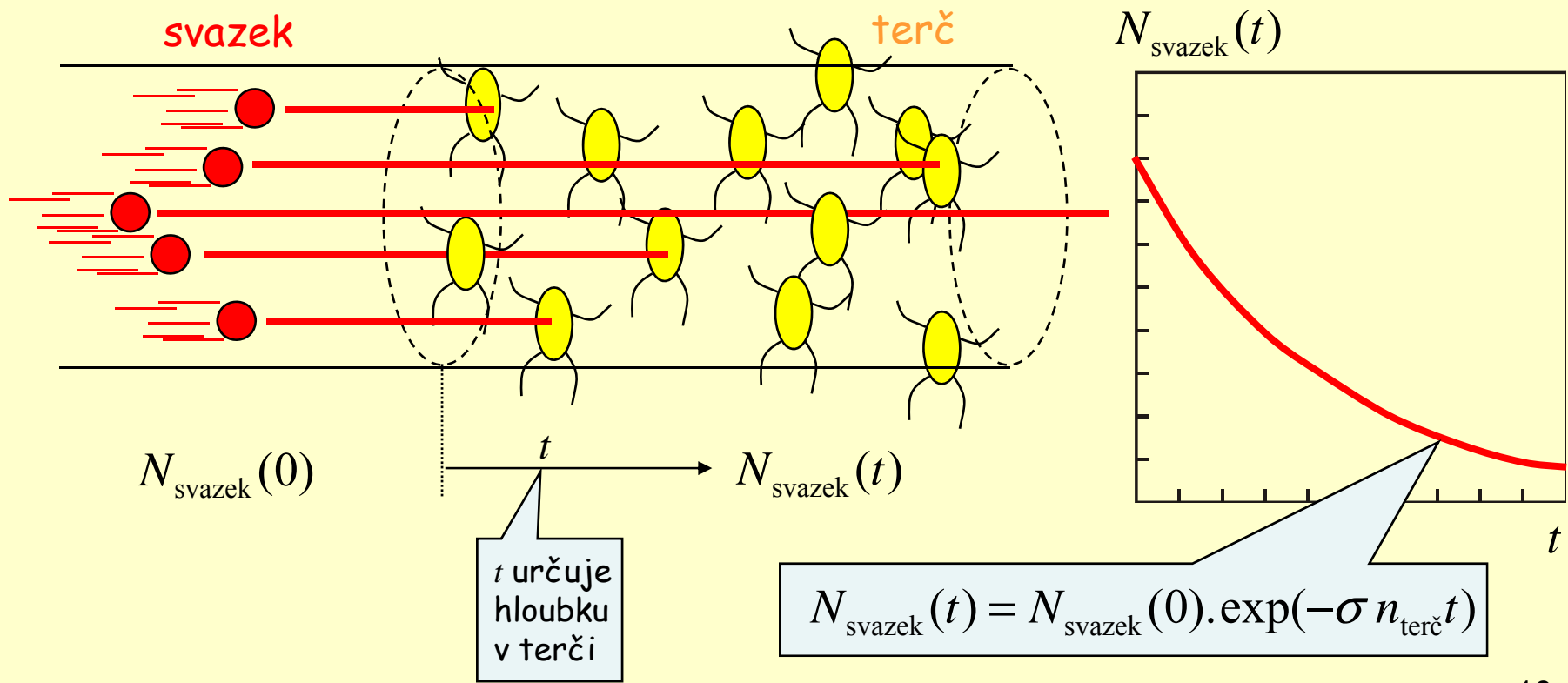
Na jednu situaci se můžeme vždy dívat z různých hledisek ...

$$N_{\text{událostí}} = j_{\text{svazek}} \cdot \sigma \cdot N_{\text{terč}} = \frac{N_{\text{svazek}}}{S_{\text{svazek}}} \cdot \sigma \cdot N_{\text{terč}} = N_{\text{svazek}} \cdot \sigma \cdot \frac{N_{\text{terč}}}{S_{\text{svazek}}} \cdot \frac{t}{t} = N_{\text{svazek}} \cdot \sigma \cdot n_{\text{terč}} \cdot t$$

Dospěli jsme k vyjádření, které říká, že pravděpodobnost interakce nalétávající částice je

$$\text{pravděpodobnost interakce} = \frac{N_{\text{událostí}}}{N_{\text{svazek}}} = \sigma \cdot n_{\text{terč}} \cdot t.$$

V případě, kdy projektily jsou v terči opravdu zachycovány (experti mluví o absorpci), se svazek postupně zeslazuje -  $N_{\text{svazek}}$  závisí na hloubce v terči.





## Stránky pro experty! Můžete je přeskočit, ale co to zkusit !

Zkusme najít závislost  $N_{\text{svazek}}(t)$ . Můžeme začít již známou rovnicí

$$N_{\text{událostí}} = N_{\text{svazek}} \cdot \sigma \cdot n_{\text{terč}} \cdot t$$

a použít ji jen na malou vrstvičku uvnitř terče (modrá vrstva na obrázku).

- $N_{\text{událostí}}$  udávalo počet absorbovaných částic, tzn. změnu  $N_{\text{svazek}}$ , kterou budeme nazývat -  $\Delta N_{\text{svazek}}$ . Znaménko mínus nám připomíná, že  $N_{\text{svazek}}$  se zmenšuje.

- $t$  v této rovnici znamenalo tloušťku terče. Tloušťka uvažovaného terče, ve kterém počítáme absorbované částice (modrá vrstvička), je  $\Delta t$ , zatímco  $t$  bude udávat hloubku v terči.

Po všech těchto změnách dostaneme

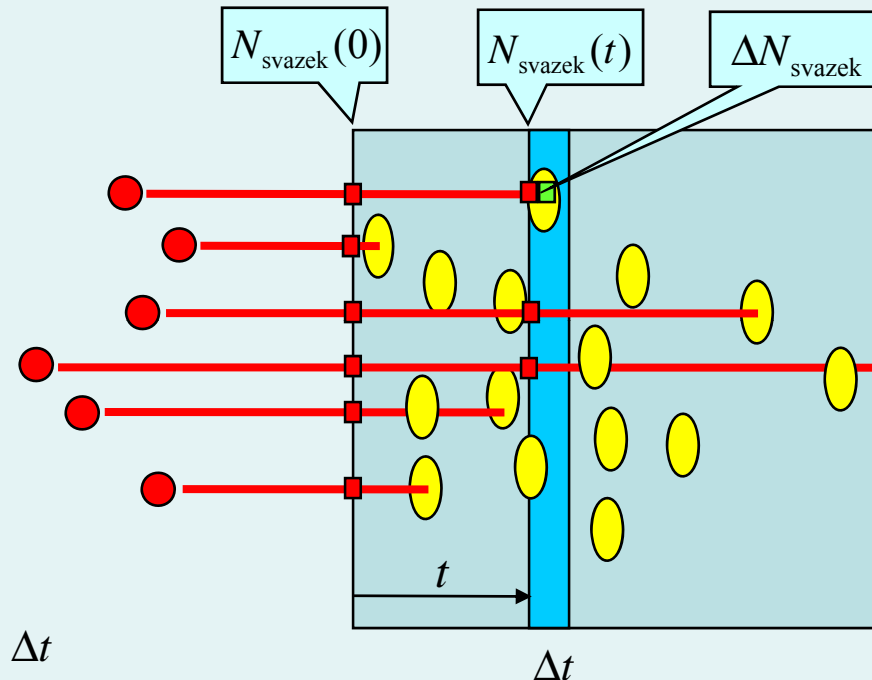
$$\Delta N_{\text{svazek}} = -N_{\text{svazek}} \cdot \sigma \cdot n_{\text{terč}} \Delta t$$

nebo s infinitesimálním  $\Delta t$

$$dN_{\text{svazek}} = -N_{\text{svazek}}(t) \cdot \sigma \cdot n_{\text{terč}} dt$$

$$\frac{dN_{\text{svazek}}(t)}{dt} = -N_{\text{svazek}}(t) \cdot \sigma \cdot n_{\text{terč}}$$

kde jsme kladli důraz na závislost  $N_{\text{svazek}}$  na  $t$ .



## Stránky pro experty! Můžete je přeskočit, ale co to zkusit !

Místo abychom se děsili z nutnosti řešit tuto diferenciální rovnici, doporučujeme zapřemýšlet, jaká funkce je téměř identická se svou derivací - jistě si vzpomínáte na exponenciální funkci. Při jejím derivování jenom seskakuje konstanta v argumentu a tu musíme najít tak, abychom splnili rovnici.

Předpokládejme  $N_{\text{svazek}}(t) = C \cdot \exp(D \cdot t)$  a dosadíme ji do diferenciální rovnice

$$\frac{dN_{\text{svazek}}(t)}{dt} = -N_{\text{svazek}}(t) \cdot \sigma \cdot n_{\text{terč}}$$

$$CD \cdot \exp(Dt) = -C \exp(Dt) \cdot \sigma \cdot n_{\text{terč}} \quad \text{Zřejmě potřebujeme } D = -\sigma \cdot n_{\text{terč}}.$$

V našem řešení máme ještě jednu neznámou konstantu  $C$ . Ale víme, že řešení musí vyhovovat počáteční podmínce -  $N_{\text{svazek}}(0)$  je na povrchu terče v  $t = 0$ . Tedy nakonec docházíme k výsledku

$$N_{\text{svazek}}(t) = N_{\text{svazek}}(0) \exp(-\sigma \cdot n_{\text{terč}} \cdot t).$$

S tímto výsledkem si můžeme chvíli hrát: Poměr  $N_{\text{svazek}}(t) / N_{\text{svazek}}(0)$  udává **pravděpodobnost**, že nalétávající částice **přežije dráhu  $t$**  v terči:

$$\text{pravděpodobnost přežití}(t) = \frac{N_{\text{svazek}}(t)}{N_{\text{svazek}}(0)} = \exp(-\sigma \cdot n_{\text{terč}} \cdot t).$$

## Stránky pro experty! Můžete je přeskočit, ale co to zkusit !

Pravděpodobnost přežití hloubky  $t$  a následné interakce je

$$(\text{pravděpodobnost interakce v } t) \cdot dt = \exp(-\sigma \cdot n_{\text{terč}} t) \cdot \sigma \cdot n_{\text{terč}} dt.$$

Jestliže je terč dost silný ("nekonečný"), měl by svazek dříve nebo později zaniknout - pravděpodobnost interakce v jakémkoli místě ( $\rightarrow$  integrál od 0 do nekonečna) by měla být 1.

$$\int_0^{\infty} (\text{pravděpodobnost interakce v } t) \cdot dt = \int_0^{\infty} \exp(-\sigma \cdot n_{\text{terč}} t) \cdot \sigma \cdot n_{\text{terč}} dt = \int_0^{\infty} \exp(-x) dx = 1.$$

Toto byla pouze kontrola, že náš vztah odpovídá „poučenému selskému rozumu“. Pokusme se spočítat **střední interakční (absorbční) délku** (se standardním symbolem  $\tau$ ) - průměrnou vzdálenost, na které se částice ze svazku absorbuje. Můžeme ji spočítat jako průměrnou hodnotu drah přežitých až do místa interakce.

$$\tau = \int_0^{\infty} t \cdot (\text{pravděpodobnost interakce v } t) \cdot dt = \int_0^{\infty} t \cdot \exp(-\sigma \cdot n_{\text{terč}} t) \cdot \sigma \cdot n_{\text{terč}} dt = \frac{1}{\sigma \cdot n_{\text{terč}}} \int_0^{\infty} x \exp(-x) dx$$

$$\tau = \frac{1}{\sigma \cdot n_{\text{terč}}}$$

S tímto výsledkem můžeme přepsat vzorec pro pokles intenzity svazku do přehledného tvaru

$$N_{\text{svazek}}(t) = N_{\text{svazek}}(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

## Stránky pro experty! Můžete je přeskočit, ale co to zkusit !

Pokračujme v naší hře. Exponenciální funkce a magické  $e$   
(2,71828182845904523536028747135266249775724790369995957496696762772407663 ...)  
nemusí být všem důvěrně známá - můžeme je nahradit nějakým „normálním“ číslem:

$$N_{\text{svazek}}(t) = N_{\text{svazek}}(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = N_{\text{svazek}}(0) \exp\left(-\frac{\ln 2}{\ln 2} \frac{t}{\tau}\right) = N_{\text{svazek}}(0) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{\tau \ln 2}}.$$

Můžeme definovat „polohloubku“ nebo „polotloušťku“  $t_{1/2} = \tau \ln 2$  místo střední interakční délky  $\tau$  - po průchodu  $t_{1/2}$  se intenzita svazku sníží na polovinu.

Určitě jste si všimli, že vzorce popisující absorpci částic ve svazku v materiálu terče jsou podobné vzorcům popisující rozpad nestabilních částic. Můžeme přecházet mezi těmito dvěma významy a uvědomit si, že:

$t$  je buď hloubka nebo čas,

$\tau$  je buď střední interakční délka nebo střední doba života,

$t_{1/2}$  je buď polotloušťka nebo poločas rozpadu ...

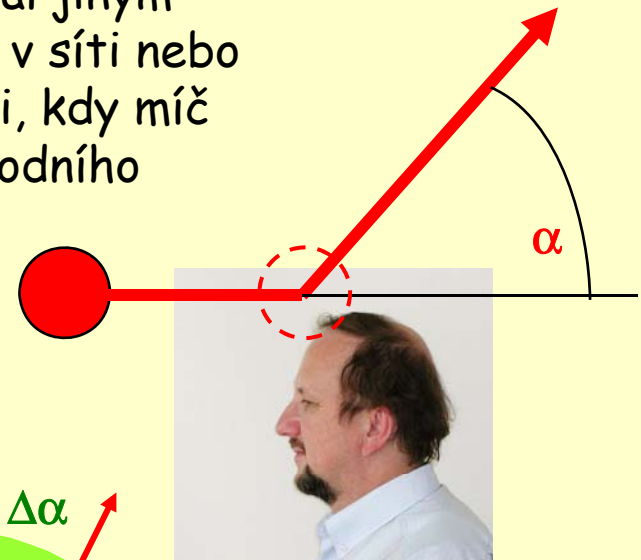
Jsou tu další zajímavé **otázky**, mohli by jste zkusit na ně odpovědět?

1. Předpokládejte, že atomy (nahlížené jako černé koule) mají účinný průřez absorpce viditelného světla okolo  $10^{-19} \text{ m}^2$ . Jaká je střední absorpční délka? Dává to smysl? Jak je možné, že se můžeme dívat z okna ven?

2. Kolikrát je redukován svazek, který projde 10 absorpčních délek?

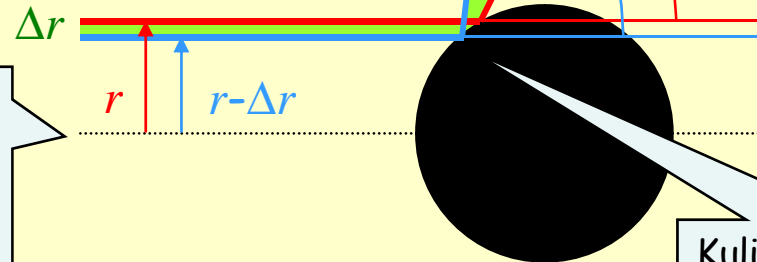
3. Kolik je potřeba absorpčních délek k úplnému „zabití“ svazku?

Když míč nechytíme, může nás zasáhnout a letět dál jiným směrem. I to je důležité pro brankáře (míč skončí v síti nebo mimo ni). Představme si (velmi nepříjemnou) situaci, kdy míč zasáhne mou hlavu a vychýlí se pod úhlem  $\alpha$  od původního směru:



Méně bolestivým a jednodušším modelem té samé situace je pružný rozptyl malých lehkých kuliček na tvrdé těžké kouli (např. hrachu ...).

Můžeme očekávat, že počet rozptýlených kuliček do jakéhokoli přesně zadaného úhlu bude zanedbatelný. Proto se raději podíváme na nějaký interval úhlů  $\Delta\alpha$ .



Raději jsem si sundal brýle ...

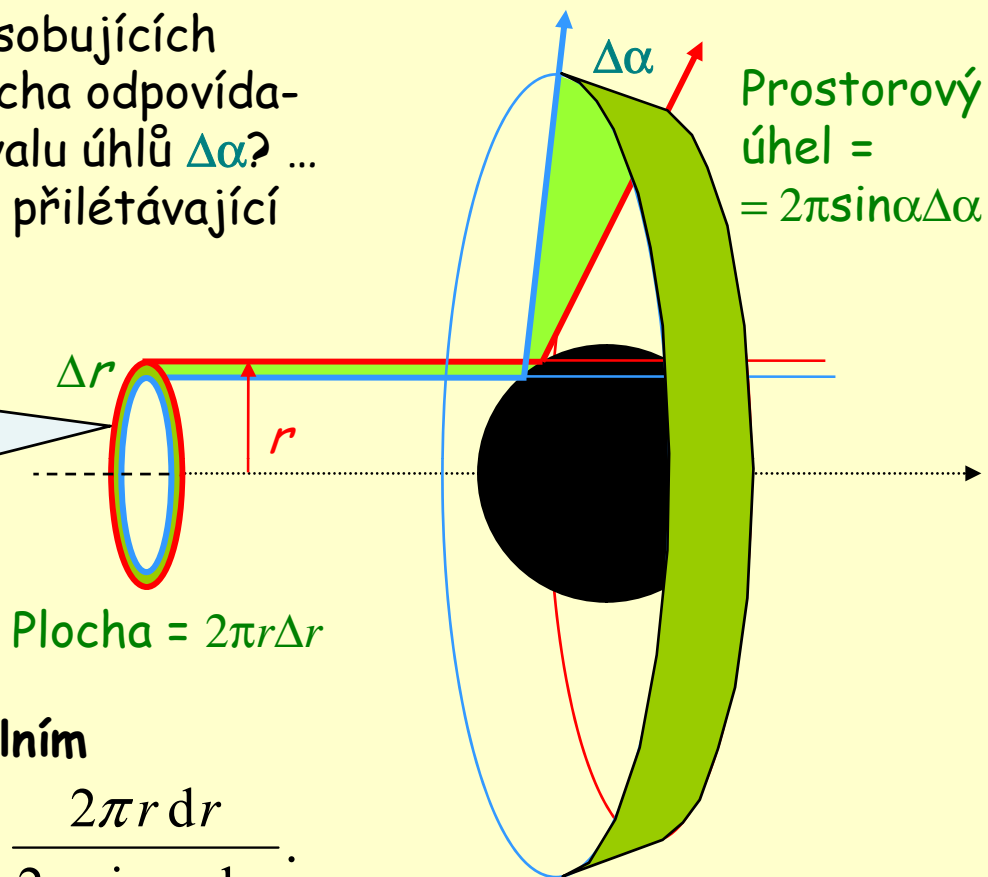
Narozdíl od mé hlavy je tvrdá koule úplně symetrická a tedy i rozptyl na ní bude kolem této osy symetrický

Kuličky letící dále od osy se rozptýlí méně

### Jak určit účinný průřez?

Účinný průřez jsme si zavedli jako efektivní plochu toku míčů (nebo částic) způsobujících nějaký efekt. Jaká je efektivní plocha odpovídající kuličkám rozptýleným do intervalu úhlů  $\Delta\alpha$ ? ... Můžeme se na to podívat z pohledu přilétávající kuličky ...

Všechny kuličky prolétající tímto mezikružím o ploše  $\Delta S = 2\pi r \Delta r$  se rozptýlí do intervalu úhlů  $\Delta\alpha$  roztočeného kolem osy, tzn. do prostorového úhlu  $\Delta\Omega = 2\pi \sin\alpha \Delta\alpha$ .



V této situaci mluvíme o **diferenciálním účinném průřezu**:

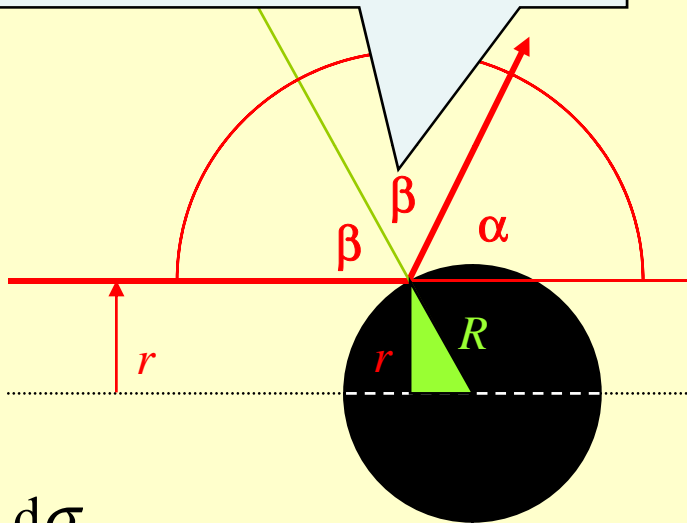
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi r dr}{2\pi \sin \alpha d\alpha}.$$

Účinný průřez odpovídající částicím rozptýleným do všech směrů získáme integrací:

$$\sigma = \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin \alpha d\alpha.$$

Pro výpočet diferenciálního účinného průřezu potřebujeme znát vztah mezi  $r$  a  $\alpha$ . Zkusíme tento vztah odvodit pro náš jednoduchý případ malé kuličky pružně rozptýlené na tvrdé kouli:

Pružný rozptyl znamená, že se kulička na povrchu odrazí pod stejným úhlem jako byl úhel dopadu.



Pro malý zelený trojúhelník a úhly  $\alpha$  a  $\beta$  platí

$$\frac{r}{R} = \sin \beta, \quad 2\beta + \alpha = \pi.$$

Zbavme se  $\beta$  a nechejme si  $\alpha$

$$r = R \sin \frac{\pi - \alpha}{2} = R \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Máme to, co potřebujeme!

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \\ &= \frac{2\pi r dr}{2\pi \sin \alpha d\alpha} = \frac{r}{\sin \alpha} \frac{dr}{d\alpha} = \frac{R \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} R \sin \frac{\alpha}{2} \left( -\frac{1}{2} \right) = -\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{4 \sin \alpha} R^2 = -\frac{R^2}{4}. \end{aligned}$$

Znaménko mínus vyjadřuje fakt, že úhel  $\alpha$  se zmenšuje s rostoucím  $r$ . Pro výpočet účinného průřezu ale stačí znát pouze absolutní hodnoty. Dospěli jsme k výslednému vztahu pro diferenciální účinný průřez pružného rozptylu malé kuličky na tvrdé těžké kouli

$$\text{Hurá!!!} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4} \quad \text{My jsme tak skvělí!!!}$$

Kde jsou média?

Účinný průřez odpovídající částicím rozptýleným do všech směrů dostaneme integrací:

$$\sigma = \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin \alpha \, d\alpha = \int_0^\pi \frac{\pi R^2}{2} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{\pi R^2}{2} [-\cos \alpha]_0^\pi = \pi R^2.$$

Tento výsledek odpovídá běžné intuici - efektivní plocha tvrdé koule je  $\pi R^2$ ...

**Neuvěřitelné! Není to tedy úplně špatně!**

Tento diferenciální účinný průřez nezávisí na úhlu  $\alpha$ , je „izotropní“. To znamená, že rozptýlená kulička letí se stejnou pravděpodobností do jakéhokoli směru podobně jako je vyzařováno světlo z ideálního (dokonale všesměrového) zdroje.

Výpočet diferenciálního účinného průřezu v případě tohoto modelu byl jednoduchý, souhlasíte? A co v případě komplikovanějších modelů?



Zajímavým modelem by mohl být rozptyl nabitých částic (s nábojem  $ze$ , hmotností  $m$  a rychlostí  $v$ ) na těžkém nabitěm objektu (s nábojem  $Ze$ ). Trochu složitějším výpočtem, než byl ten předchozí, dostaneme tento výsledek

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{Zze^2}{8\pi\epsilon_0 mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}}.$$

Narozdíl od pružného rozptylu kuliček tento účinný průřez již není izotropní, je největší pro malá  $\alpha$ , tj. nejvíce částic se málo odchyluje od původního směru letu.

**Předpovědi modelu mohou být porovnány s experimentem, tak můžeme zjistit, který model je pro popis přírody vhodnější.**

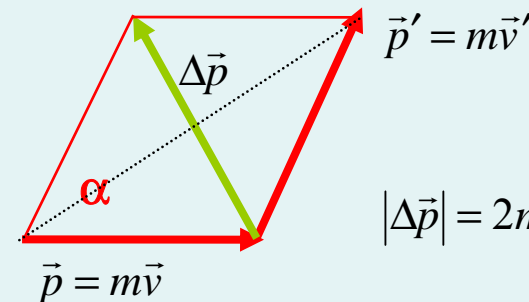
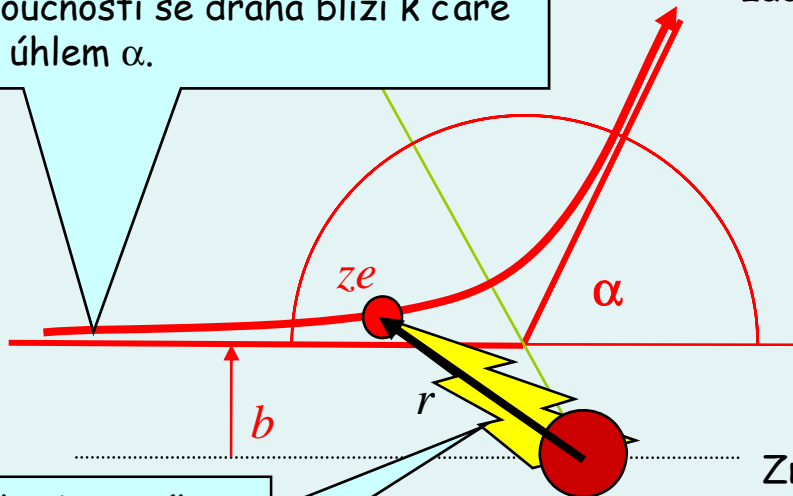
Tímto způsobem můžeme také zjistit, co je uvnitř atomů, což chceme už od začátku našeho příběhu. Ernest Rutherford a jeho spolupracovníci Geiger a Marsden použili poprvé tuto metodu více než před stoletím.

## Stránky pro experty! Můžete je přeskočit, ale co to zkusit !

Zkusme vypočítat diferenciální účinný průřez pro rozptyl částic s hmotností  $m$ , rychlostí  $v$  a nábojem  $ze$  na nekonečně těžkém terči s nábojem  $Ze$  ( $e$  je elementární náboj). Rozptyl je velmi podobný případu tvrdých koulí až na to, že částice neinteragují při dotyku, ale na dálku podle Coulombova zákona:

Dráha nalétávající částice je zakřivená - je to **hyperbola**. Ve vzdálené minulosti se dráha blíží k červené čáře ve vzdálenosti  $b$  od středu terče. Ve vzdálené budoucnosti se dráha blíží k čáře pod úhlem  $\alpha$ .

Prvním krokem výpočtu by mohlo být použití zákona zachování energie a hybnosti. Hmotnost terče je nekonečná, takže pohltí jakoukoli hybnost bez pohybu a ztratí energii (zkuste si toto tvrzení ověřit!). Energie nalétávající částice se proto zachovává, směr hybnosti se mění:



$$|\Delta \vec{p}| = 2mv \sin \frac{\alpha}{2}$$

Coulombova síla

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Zze^2}{r^2}$$

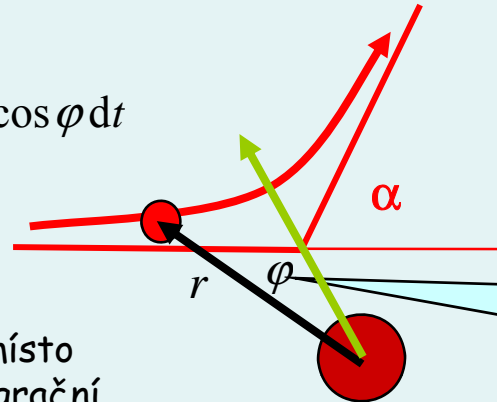
Změna momentu byla způsobena Coulombovou silou:

$$\Delta \vec{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(r) dt.$$

## Stránky pro experty! Můžete je přeskočit, ale co to zkusit !

V této rovnici jsou vektory, ale my se jim můžeme vyhnout. Nejjednodušším způsobem je promítnout celou rovnici do směru  $\Delta \vec{p}$

$$\Delta \vec{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(r) dt \quad \longrightarrow \quad |\Delta \vec{p}| = \int_{-\infty}^{+\infty} F(r) \cos \varphi dt$$



Úhel  $\varphi$  se mění od  $-(\pi-\alpha)/2$  v  $t=-\infty$  do  $(\pi-\alpha)/2$  v  $t=+\infty$ .

A co použít úhel  $\varphi$  k parametrizaci dráhy místo času  $t$ ? K takové záměně stačí změnit integrační proměnnou  $t$  na  $\varphi$ .

$$|\Delta \vec{p}| = \int_{-\infty}^{+\infty} F(r(t)) \cos \varphi(t) dt = \int_{-\frac{\pi-\alpha}{2}}^{+\frac{\pi-\alpha}{2}} F(r(\varphi)) \cos \varphi \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| dt$$

Co je  $d\varphi/dt$ ? ... úhlová rychlost  $\omega$ ! A navíc se moment hybnosti  $L=mr^2\omega$  pro částice v centrálním poli zachovává! Moment hybnosti můžeme spočítat také z počáteční podmínky  $L=mvb$  (moment hybnosti = hybnost×průvodič).

$$L = mr^2\omega = mvb \quad \omega = \frac{vb}{r^2}$$

Nyní jsme připraveni dát vše dohromady...

Stránky pro experty! Můžete je přeskočit, ale co to zkusit !

$$|\Delta \vec{p}| = 2mv \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$|\Delta \vec{p}| = \int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{+\frac{\pi-\alpha}{2}} F(r(\cos(\varphi)) \cos \varphi \frac{d\varphi}{\left| \frac{d\varphi}{dt} \right|}$$

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Zze^2}{r^2}$$

$$\left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = \omega = \frac{vb}{r^2}$$

$$2mv \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{+\frac{\pi-\alpha}{2}} \frac{1}{r^2} \cos \varphi \frac{d\varphi}{\frac{vb}{r^2}}$$

$$\int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{+\frac{\pi-\alpha}{2}} \cos \varphi d\varphi = [\sin \varphi]_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{+\frac{\pi-\alpha}{2}} = 2 \sin \frac{\pi-\alpha}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$b \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{Zze^2}{8\pi\epsilon_0 mv^2} \int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{+\frac{\pi-\alpha}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

Pro výpočet diferenciálního účinného průřezu potřebujeme  $b(\alpha)$ :  $b = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \cotan \frac{\alpha}{2}$ .  
Potom stejně jako předtím

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \alpha} \left| \frac{db}{d\alpha} \right| = \left( \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin \alpha} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \left( \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2} \right)^2 \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{Zze^2}{8\pi\epsilon_0 mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}}$$

# Stránky pro experty! Můžete je přeskočit, ale co to zkusit !

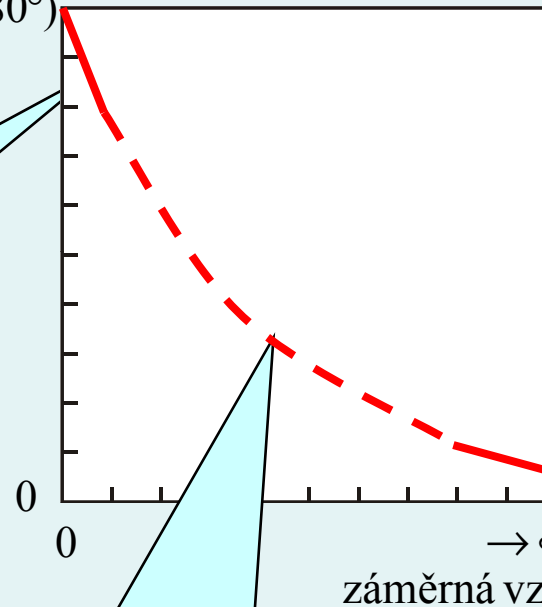
Je možné uhádnout tento výsledek? Odpovídá to „selskému rozumu“? Rozumíme vzorci kvalitativně?

Dík Rupertu Leitnerovi za podnět této stránky.

Začněme se vztahem mezi vzdáleností  $b$  (nazývané **záměrná vzdálenost**) a úhlem rozptylu  $\alpha$ .

úhel rozptylu  $\alpha$

$\pi$  ( $180^\circ$ )



Částice letící blíže k terči (s menším  $b$ ) bude cítit silnější Coulombické odpuzování a proto bude rozptýlena více než částice letící dál od terče. Limitní případ je pro  $b = 0$ , kdy se částice odrazí zpět ( $\alpha = \pi$ ).

Protože má Coulombovská interakce nekonečný dosah, může být  $b$  nekonečné a může dojít i k několika (nekonečně malým) odchýlením.

Pro jednoduchost a krásu můžeme očekávat hladkou funkci spojující limitní oblasti ...??  
O jakou funkci by mohlo jít?

$$b = \text{konst} \cdot \cotan \frac{\alpha}{2}$$

Protože se zabýváme úhly, vede nás to k myšlence uvažovat trigonometrické funkce. Které z nich se blíží do nekonečna? Které z nich rostou do nekonečna v nulovém úhlu? Pro které úhly procházejí nulou? Jak upravíme argument této funkce, aby to vyšlo?

## Stránky pro experty! Můžete je přeskočit, ale co to zkusit !

Abychom mohli pracovat se vztahem kvantitativně, dosadíme tam tato čísla, uvažujme rozptyl  $\alpha$  na zlatě:

Náboje srážejících se objektů

$$Z_{\text{Au}} = 79$$

$$z_{\alpha} = 2$$

Univerzální konstanty

$$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$$

Místo dosazování za hmotnost a rychlost nalétávající  $\alpha$  částice můžeme použít její kinetickou energii...  $mv^2 = 2 E_k$ .

Typická kinetická energie  $\alpha$  z radioaktivního zdroje je okolo 1 MeV =  $1,60 \times 10^{-13} \text{ J}$ .

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{Zze^2}{8\pi\epsilon_0 mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}} = \frac{3.23 \times 10^{-27} \text{ m}^2}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}}$$

Jaká je pravděpodobnost, že se  $\alpha$  částice odchýlí o více než 1 stupeň?

$$\sigma^{a \geq 1^\circ} = (\dots)^2 \int_{1^\circ}^{180^\circ} \frac{2\pi \sin \alpha d\alpha}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}} = 2\pi (\dots)^2 \int_{1^\circ}^{180^\circ} \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha}{\sin^4 \frac{\alpha}{2}} = 8\pi (\dots)^2 \int_{1^\circ}^{180^\circ} \frac{\cos \frac{\alpha}{2} d\frac{\alpha}{2}}{\sin^3 \frac{\alpha}{2}} =$$

Substituce  $\sin \frac{\alpha}{2} = x$

$$8\pi (\dots)^2 \int_{\sin 0,5^\circ}^{\sin 90^\circ} \frac{dx}{x^3} = 8\pi (\dots)^2 \left[ \frac{-1}{2x^2} \right]_{\sin 0,5^\circ}^{\sin 90^\circ} = 5,33 \times 10^{-22} \text{ m}^2$$

## Stránky pro experty! Můžete je přeskočit, ale co to zkusit !

Jaká je vzdálenost  $b$  (experti mluví o **záměrné vzdálenosti**) odpovídající úhlu rozptylu  $1^\circ$ ?

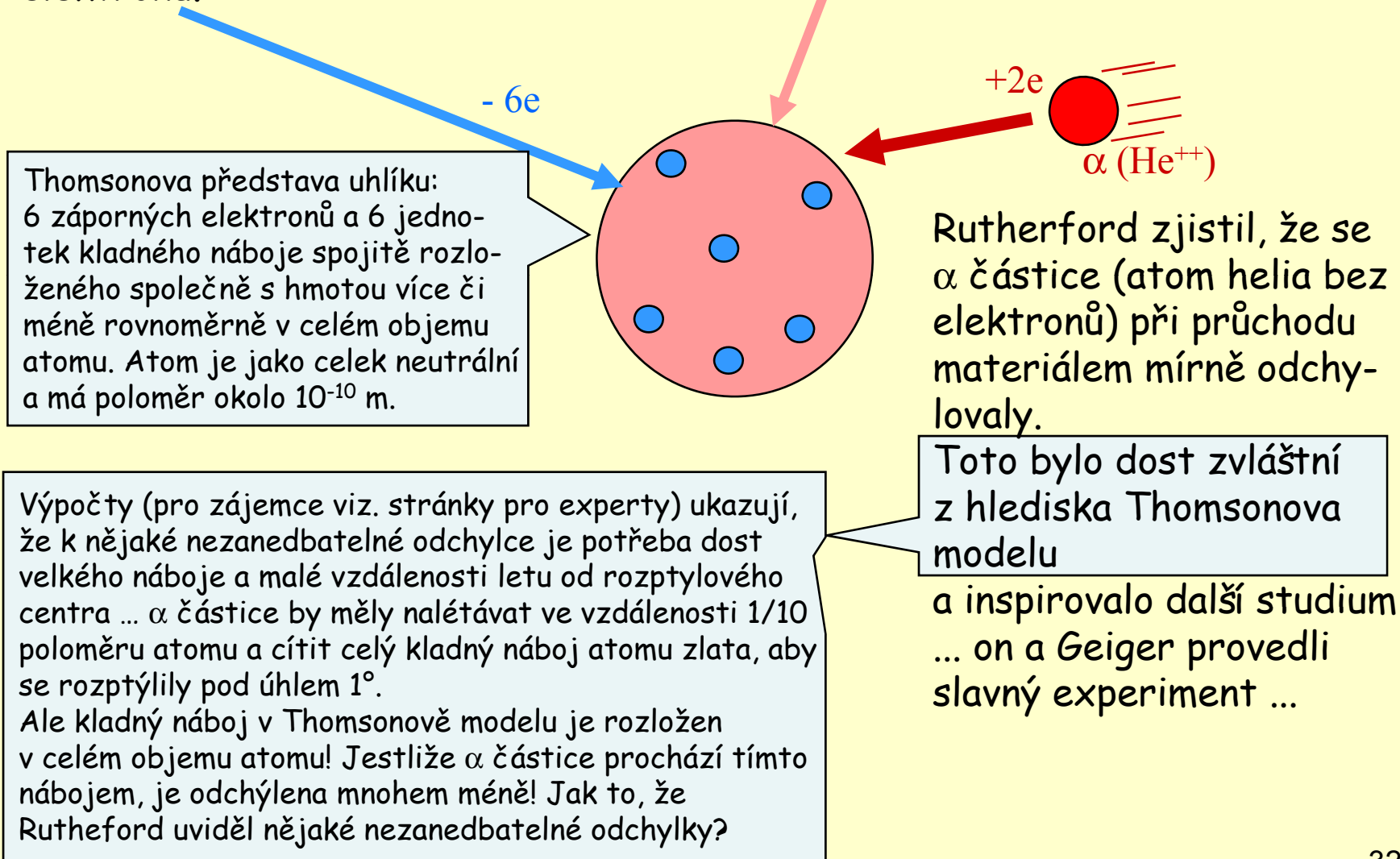
$$b = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0mv^2} \cotan \frac{\alpha}{2} = 1,14 \times 10^{-13} \cdot \cotan 0,5^\circ \text{ m} = 1,30 \times 10^{-11} \text{ m}$$

Tyto kvantitativní výsledky mají význam, který budeme diskutovat dále.

Experti potřebují nějaký další trénink, aby prakticky zvládli dané téma. Zde je několik **námětů a otázek**:

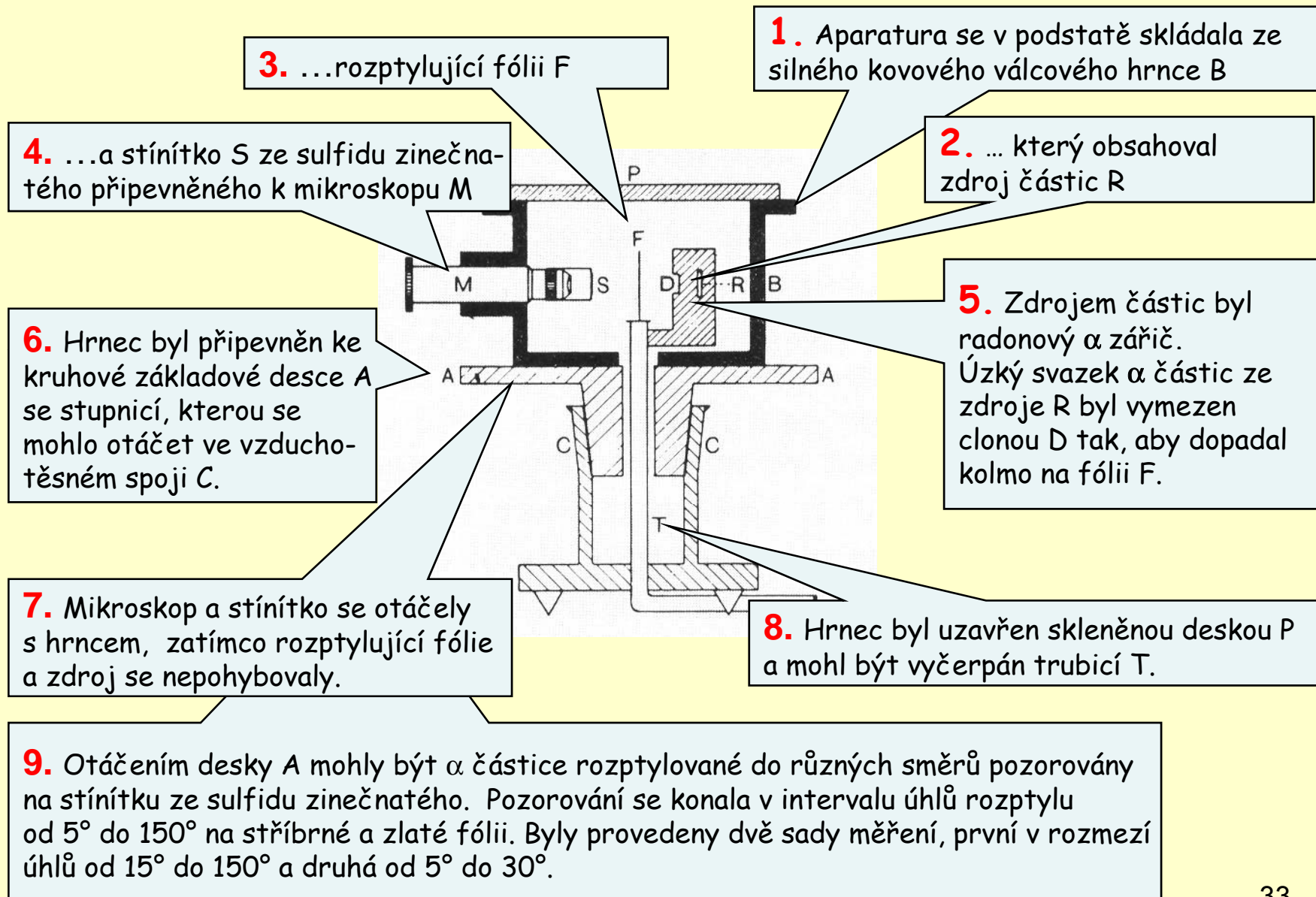
1. Ověřte tvrzení o bilanci energie a hybnosti při rozptylu lehké částice na nekonečně těžkém terči.
2. Vysvětlete, proč se moment hybnosti zachovává v centrálním poli.
3. Uvědomte si, že vypočítaná hodnota účinného průřezu pro rozptyl do úhlu většího než  $1^\circ$  je vlastně nějaká efektivní plocha a porovnejte tuto plochu s geometrickým účinným průřezem koule o poloměru  $10^{-10}$  m?
4. Zopakujte výpočet účinného průřezu pro částice rozptýlené pod úhlem **menším** než  $1^\circ$ .
5. Na předcházejících stránkách jsme získali výsledek pro centrální bodový náboj (nebo náboj soustředěný v kouli menší než  $b$  - když letíme okolo, tak to nepoznáme). Co se stane, když bude  $b$  menší než poloměr oblasti náboje (Projektíl bude „lépe mířit na terč“, proletí nabitou oblastí.)?

Rutherford zkusil rozptylovat  $\alpha$  částice na tenké zlaté fólii v době, kdy byl atom považován za něco jako kladně nabitý pudink se zápornými zrníčky elektronů.





## Experiment provedený Geigerem (1911) a Geigerem & Marsdenem (1913)

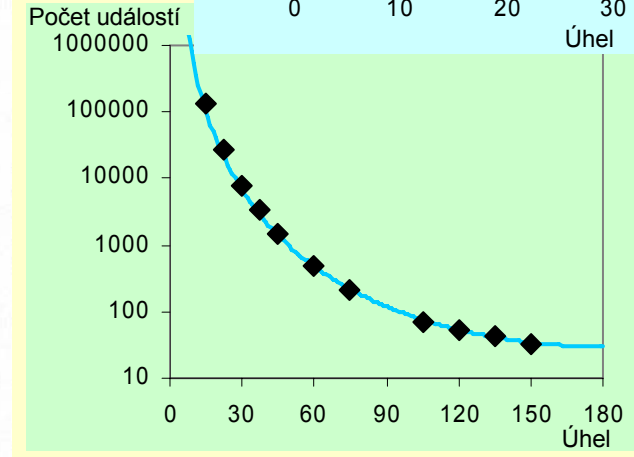
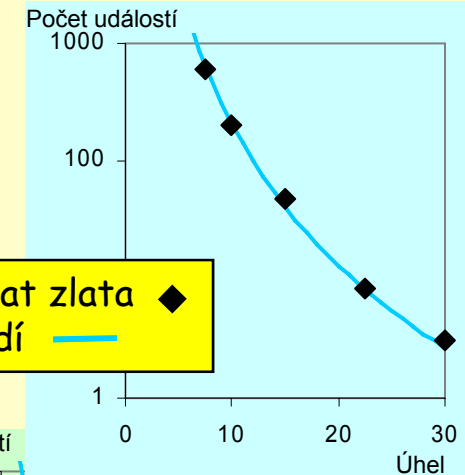


Výsledky Geigera & Marsdena porovnané s Rutherfordovou předpovědí založenou na modelu atomu s malým těžkým jádrem a elektrony kolem:

Variation of scattering with angle.

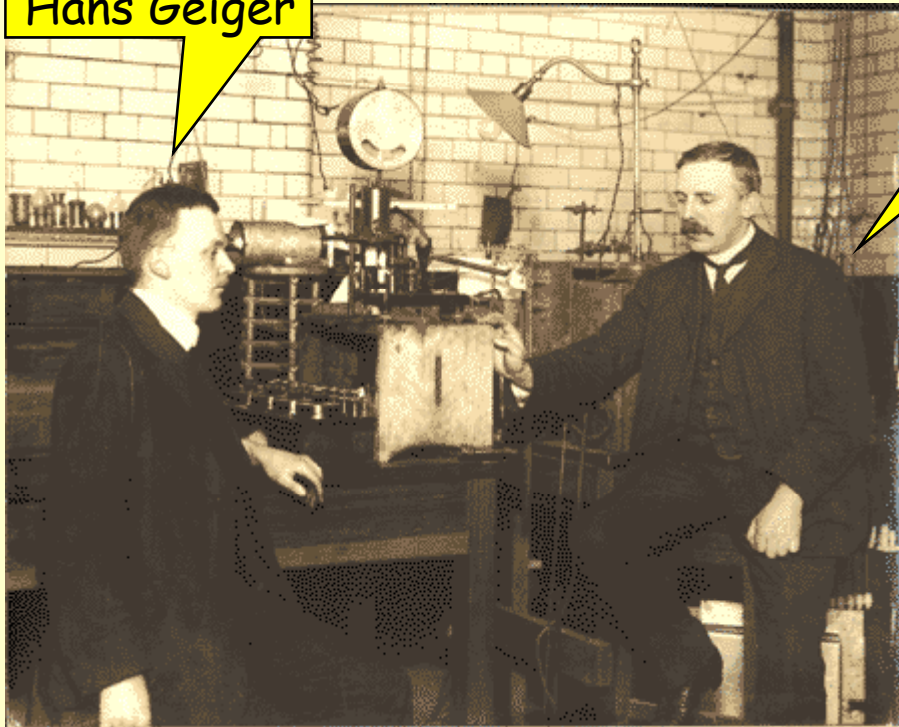
I Angle of deflection, $\phi$	II $\text{cosec}^4 \frac{1}{2}\phi$	III SILVER		V GOLD		VI
		Number of scintillations, $N$	$\frac{N}{\text{cosec}^4 \frac{1}{2}\phi}$	Number of scintillations, $N$	$\frac{N}{\text{cosec}^4 \frac{1}{2}\phi}$	
150°	1.15	22.2	19.3	33.1	28.8	
135	1.38	27.4	19.8	43.0	31.2	
120	1.79	33.0	18.4	51.9	29.0	
105	2.53	47.3	18.7	69.5	27.5	
75	7.25	136	18.8	211	29.1	
60	16.0	320	20.0	477	29.8	
45	46.6	989	21.2	1435	30.8	
37.5	93.7	1760	18.8	3300	35.3	
30	223	5260	23.6	7800	35.0	
22.5	690	20300	29.4	27300	39.6	
15	3445	105400	30.6	132000	38.4	
30	223	5.3	0.024	3.1	0.014	
22.5	690	16.6	0.024	8.4	0.012	
15	3445	93.0	0.027	48.2	0.014	
10	17330	508	0.029	200	0.0115	
7.5	54650	1710	0.031	607	0.011	
5	276300	—	—	3320	0.012	

Porovnání dat zlata s předpovědí



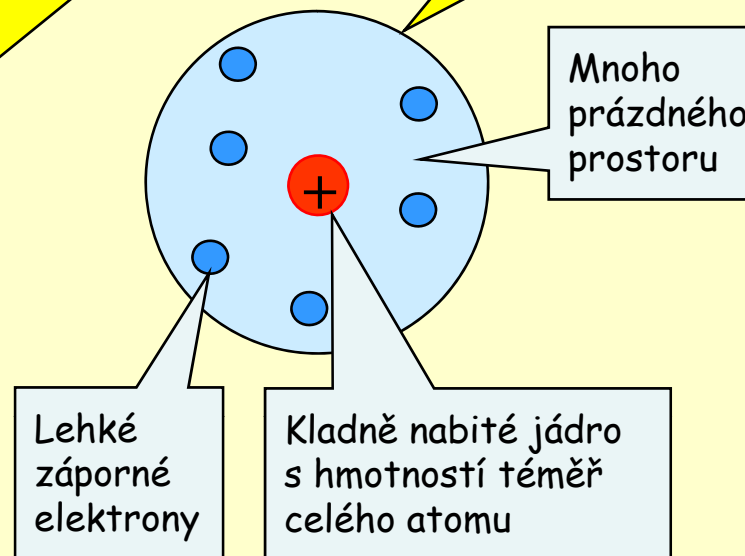
Extrakt z *Radiations from Radioactive Substances* od Ernesta Rutherforda, Jamese Chadwicka a C. D. Ellis, publikováno v Cambridge University Press, 1930

Hans Geiger



Ernest Rutherford

a jeho atom



Data souhlasila dobře s Rutherfordovým modelem. Během následujících let fyzici zjistili, jak se chovají elektrony v atomu, z čeho se skládá jádro, ...

Všechny experimenty vykonané až do dnešní doby dobře souhlasí s Rutherfordovým modelem. Jako obvykle ve fyzice, mluvíme často o skutečnosti (atom se skládá z jádra a ...) a ne o nejvhodnějším modelu. Prosím vzpomeňte si, co všechno jsme udělali od první myšlenky rozptylového experimentu. Později se ještě setkáme s dalšími variantami rozptylového experimentu.