Crisi della razionalità e interferenza di probabilità quantum-like nelle scelte (*quantum cognition*)

FRANCO VAIO

(francovaio@yahoo.it)

CERN - ITP 2014

1. Introduzione storica: comparsa e definizione dell’idea di razionalità

Nel 1789, Jeremy Bentham pubblica a Oxford:

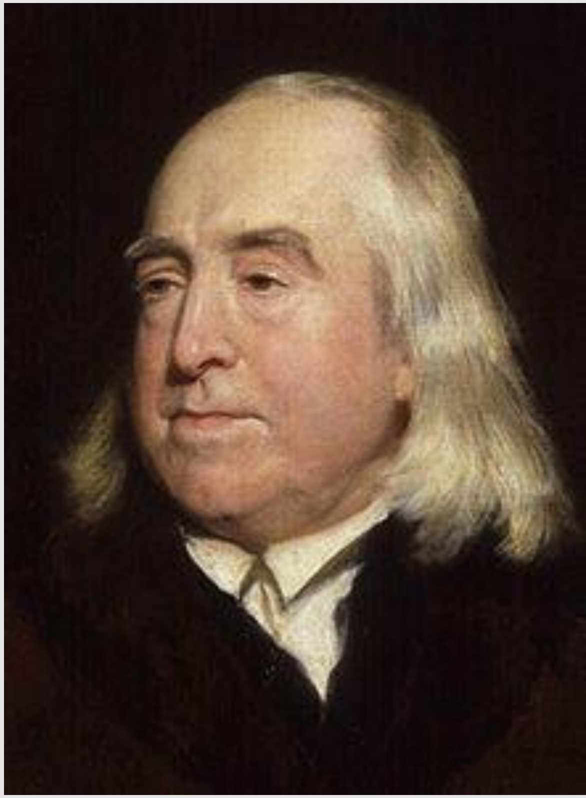
An Introduction to the Principles of Morals and Legislation

Bentham, non ritiene valida l'ipotesi contrattualistica del giusnaturalismo, alla base dello Stato non vi è alcun contratto sociale: solo una necessità utilitaria di promuovere collettivamente la felicità, il piacere di tutti: cioè l’utilità.

Le leggi quindi devono promuovere l’utilità pubblica (NON quella di un singolo attore!)

Ottimo proposito, ma... che cos’è l’utilità? Come misurarla o valutarla?

Il *felicific calculus* è un algoritmo formulato da Bentham stesso, filosofo utilitarista, per calcolare il grado di piacere che una specifica azione è presumibile produca.



1. Intensità del piacere
2. Durata del piacere
3. Incertezza, la probabilità che il piacere si verifichi
4. Vicinanza nel tempo del piacere atteso
5. Fecondità, la probabilità che l'azione sia seguita da sensazioni dello stesso tipo.
6. Purezza, la probabilità che l'azione non sia seguita da sensazioni di tipo opposto
7. Estensione, il numero di persone che riceveranno il piacere

La questione dell'utilità diventa subito oggetto di discussioni da parte di filosofi e di economisti (fra i quali John Stuart Mill, *Principles of Political Economy*, 1848)

Negli anni Settanta dell'Ottocento l'economia cambia forma, metodi e scopi: è la rivoluzione neoclassica.

Non è più una scienza morale, volta al miglioramento della società, ma diventa la teoria che deve utilizzare l'imprenditore per realizzare il massimo profitto: nasce l'economia neoclassica, un'economia matematica, che copia concetti e tecniche della meccanica classica.

Ma che c'entrano la meccanica e la fisica matematica con la teoria interpretativa di fatti economici (e sociali) osservati? NULLA!

Ma alcuni (Walras!) lo credono con cieco entusiasmo.

Un esempio importante fra i tanti:

Léon Walras, professore di economia politica all'*Université de Lausanne* dal 1870 al 1892, la sua cattedra passerà subito dopo a Vilfredo Pareto.

Nel 1874 pubblica: *Éléments d'économie politique pure, ou théorie de la richesse sociale*

Riveduto e riedito 5 volte, l'ultima, postuma, nel 1926

La sua idea fissa, che porterà avanti per tutta la sua attività, cercando disperatamente di dimostrarla matematicamente è:

Un mercato globale, chiuso, di concorrenza perfetta dove tutti gli agenti economici sono perfettamente razionali e calcolatori della loro massima utilità individuale (l' *homo oeconomicius* di John Stuart Mill, 1848) e hanno istantaneamente tutta l'informazione disponibile (mercato perfetto), trova naturalmente uno stato di equilibrio stabile e unico dei prezzi. È **l'equilibrio economico generale**.

Walras concepisce il mercato come un sistema meccanico di parti sottoposte a forze che si fanno equilibrio insieme ai loro momenti, in una condizione di minimo di energia potenziale (anche se sbaglia le equazioni...).

L'utilità benthamina assume un valore cardinale, misurabile, come una vera grandezza fisica, assimilabile all'energia potenziale: l'equilibrio si ha con le massime utilità individuali, così come con i minimi di energia potenziale.

Non sarà così per Vilfredo Pareto, ingegnere prima che economista e poi, alla fine della sua importante carriera, sociologo.
Pareto, ben preparato in matematica e fisica, si rende conto della debolezza dell'analogia operata da Walras.
Pareto parlerà di solamente utilità ordinali e di un generale principio di piacere, l'ofelimità.

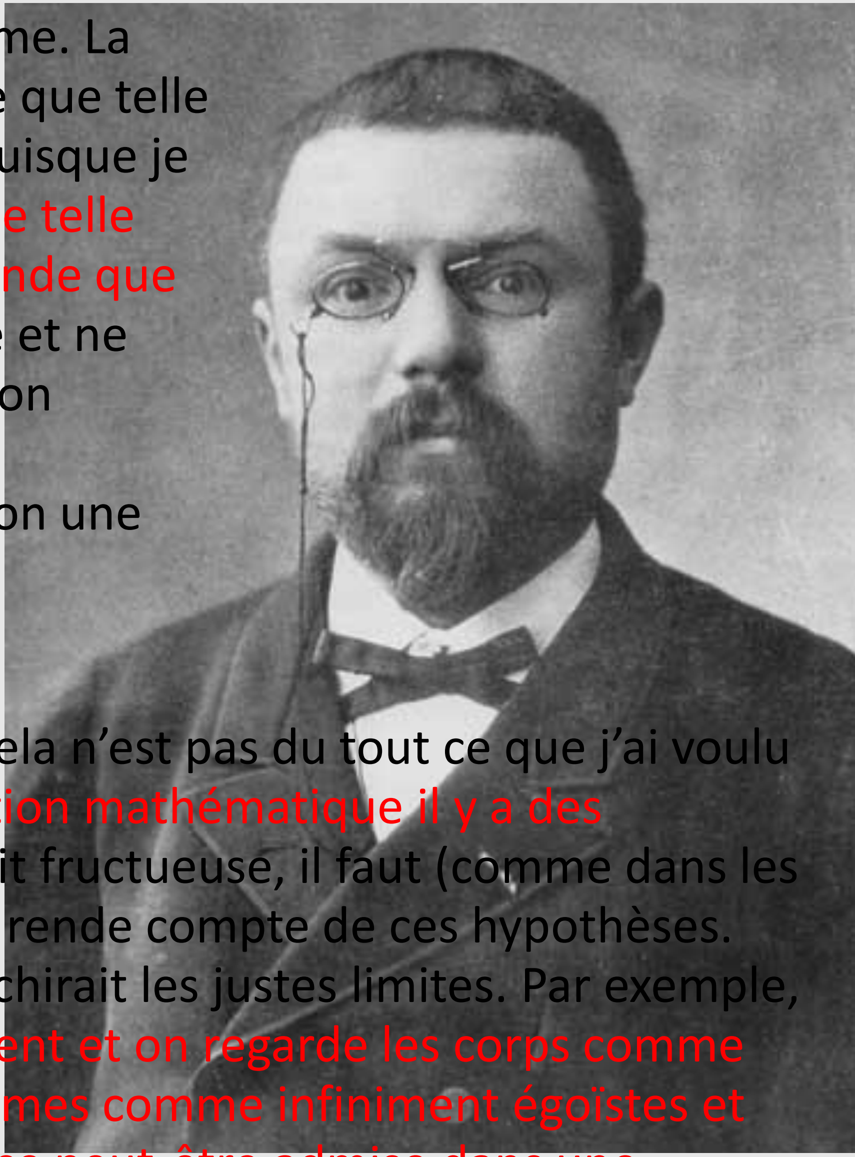
Assunzioni irrealistiche: (quasi) tutti coloro cui si ripetutamente e insistentemente Walras si rivolge per ottenere l'approvazione da parte di importanti matematici e economisti (come Poincaré, Hermann Laurent, Edgeworth e altri) le contestano.

Dimostrare l'esistenza di un insieme di prezzi in grado di assicurare l'uguaglianza tra quantità domandate e quantità offerte su TUTTI i mercati.

Un enorme sistema di *n*-1 equazioni, in *n*-1 incognite, gli *n*-1 prezzi (*n* beni, di cui uno è numerario), pensa Walras, che non è abilissimo in matematica e lo dichiara, ha necessariamente una e una sola soluzione, data dagli *n*-1 prezzi in corrispondenza dei quali ciascuna offerta incontra la propria domanda.
Non è mai impossibile né indeterminato, ed è assunto essere sempre lineare.

Ma chi sollevava obiezioni all'idea di Walras? Quasi tutti! Gli economisti delle grandi scuole europee, inglesi, austriaci e anche italiani: Edgeworth, Pareto (successore di Walras a Losanna), Marshall, ecc. Lo stesso Keynes, vent'anni dopo la morte di Walras, adotta punti di vista totalmente differenti. Ma non solo: antropologi, sociologi, tutti gli scienziati sociali!

(Lettera di Poincaré a Walras, in Jaffé, ed. 1965, lettera n. 1496)



«Votre définition de la rareté me paraît légitime. La satisfaction peut-elle se mesurer? Je puis dire que telle satisfaction est plus grande que telle autre, puisque je préfère l’une à l’autre. Mais je ne puis dire que telle satisfaction est deux fois ou trois fois plus grande que telle autre. Cela n’a aucun sens par soi-même et ne pourrait en acquérir un que par une convention arbitraire.

La satisfaction est donc une grandeur, mais non une grandeur mesurable.

[…]

Quand donc j’ai parlé des « justes limites », cela n’est pas du tout ce que j’ai voulu dire. J’ai pensé qu’au début de toute spéculation mathématique il y a des hypothèses et que, pour cette spéculation soit fructueuse, il faut (comme dans les applications à la physique d’ailleurs) qu’on se rende compte de ces hypothèses. C’est si on oubliait cette condition qu’on franchirait les justes limites. Par exemple, en mécanique, on néglige souvent le frottement et on regarde les corps comme infiniment polis. Vous, vous regardez les hommes comme infiniment égoïstes et infiniment clairvoyants. La première hypothèse peut-être admise dans une première approximation, mais la deuxième nécessiterait peut-être quelques réserves»

Per economisti come Walras e Pareto, la matematica era necessaria per comprendere le relazioni generali fra le variabili e per compiere deduzioni rigorose attraverso la rappresentazione di un'economia per mezzo di sistemi di equazioni simultanee. L'equilibrio economico generale era *par excellence* il campo di applicazione della matematica.

In Germania, dominante la scuola storica del diritto, la quale, influenzata dal romanticismo, si opponeva al giusnaturalismo e al positivismo: l'economia matematica vi ebbe, in quegli anni, limitata diffusione.

E così anche in Russia, dove si seguiva la scuola tedesca.

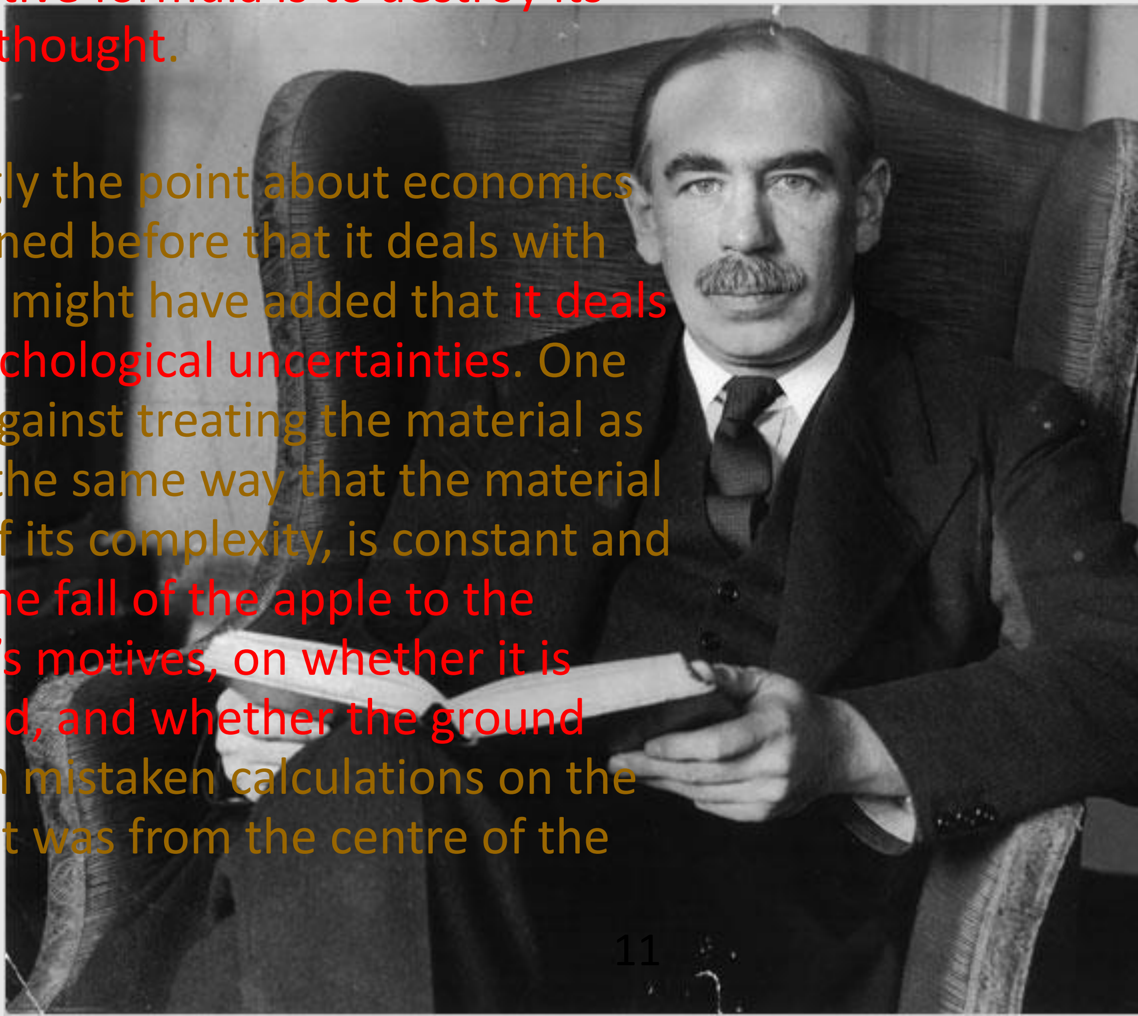
Quanto al grande Alfred Marshall, professore a Cambridge, la figura più influente dell'*economics* fine Ottocento, ottimo conoscitore della matematica, è celebre il suo monito contro i rischi insiti nelle lunghe catene di puro ragionamento logico-deduttivo, quando questo sia applicato a un materiale, come quello dei dati economici, variabile, incerto ed eterogeneo. L'economista deve conoscere a fondo i dati e fare un uso attento dell'analisi dei dati, dell'induzione e della deduzione.

John Maynard Keynes:

«In chemistry and physics and other natural sciences the object of experiment is to fill in the actual values of the various quantities and factors appearing in an equation or a formula; and the work when done is once and for all. In economics that is not the case, and to convert a model into a quantitative formula is to destroy its usefulness as an instrument of thought.

[…]

I also want to emphasise strongly the point about economics being a moral science. I mentioned before that it deals with introspection and with values. I might have added that it deals with motives, expectations, psychological uncertainties. One has to be constantly on guard against treating the material as constant and homogeneous in the same way that the material of the other sciences, in spite of its complexity, is constant and homogeneous. It is as though the fall of the apple to the ground depended on the apple's motives, on whether it is worth while falling to the ground, and whether the ground wanted the apple to fall, and on mistaken calculations on the part of the apple as to how far it was from the centre of the earth»



E allora? come mai, dopo che a Walras, vivente, tutti o quasi hanno detto che sbagliava, dopo aspre polemiche (ai limiti dell'insulto reciproco con Edgeworth!), le sue idee sintetizzate nel concetto di *homo oeconomicus*, e di equilibrio economico generale esistente e unico, criticabili e criticate, sono tuttora nel background di qualsiasi economista? E hanno prodotto una gran numero di premi Nobel dal 1969 in avanti?

È una questione di sociologia della scienza e di come sono andati gli eventi.

Ci torneremo su...

La dimostrazione che Walras cerca dell'esistenza e unicità dell'equilibrio generale, in realtà, è tutt'altro che banale e verrà data, nel caso non lineare, solo a metà Novecento, prima da Abraham Wald nel 1936, in un caso parziale, poi da Kenneth Arrow (Nobel nel 1972) e da Gérard Debreu (Nobel nel 1983) nel caso generale.
E ciò solo dopo la dimostrazione del teorema del punto fisso di Brouwer e Hadamard del 1909-1910, di cui Walras non disponeva! (...rimescolando con il cucchiaino una tazza di caffè c'è sempre almeno un punto, le cui coordinate sono funzione del tempo, che resta fermo istantaneamente).

OK! La matematica della dimostrazione dell'esistenza dell'equilibrio economico generale è assolutamente splendida, non c'è dubbio! Il problema tecnico è risolto! Debreu è un raffinato matematico bourbakista di indiscussa e straordinaria abilità.
Ma resta aperta la pesante questione della non realisticità delle ipotesi!
Stiamo parlando di matematica astratta, NON di fatti economici e di persone reali che scelgono e agiscono su basi ben lontane dalla postulata razionalità dell'*homo oeconomicus*, introdotto da John Stuart Mill nel 1848!

C’è un’altra importante questione legata all’economia matematica. Va bene postulare l’agente economico razionale, ma come fa costui a calcolare le proprie azioni economiche ‘*ottime’* dal punto di vista dell’utilità, cioè, in sostanza, dopo la svolta neoclassica, del profitto? Come si fa a ottimizzare il proprio comportamento economico?

Ma c’era lì, pronto, il vecchio principio di minima azione di Maupertuis e del grande Eulero! Lagrange l’aveva applicato alla meccanica celeste con enorme successo solo cinquant’anni prima! Tutti gli ingegneri e i fisici studiavano la *Méchanique analytique* di Lagrange (1788, 1815...) e tutti avevano imparato il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per cercare il massimo di una funzione di più variabili con vincoli fra le variabili! Tutti... tranne gli economisti del tempo!

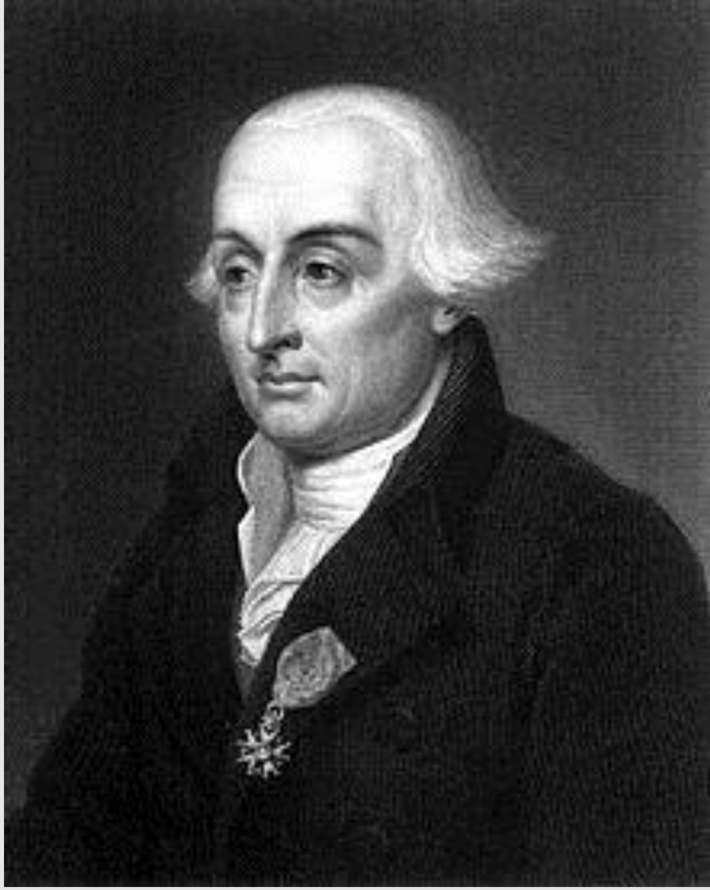
Il messaggio, però, dagli anni Quaranta del ‘900 è diventato: Scrivete lagrangiane nell’economica teorica, avendo postulato profonde analogie fra economia e meccanica: funziona meravigliosamente in meccanica e in tutta la fisica (anche per l’Higgs!), funzionerà ben anche per le scelte economiche! (...o no?)

Una riflessione...

L’ipotesi introdotta dai neoclassici era di considerare il mercato in strettissima analogia con un sistema meccanico, e che il mercato, proprio in quanto considerato tale, possa essere descritto, modellizzato e interpretato con i metodi matematici propri della meccanica classica.

Si trattava dei metodi del calcolo differenziale e integrale, concepiti e applicati alla meccanica analitica. Ciò a seguito dello straordinario successo di cui quest’ultima stava godendo negli ambienti scientifici accademici fin dall’inizio del Settecento. In particolare dopo la pubblicazione del grandioso lavoro teorico scritto da Lagrange, la *Méchanique analitique*, che egli aveva pubblicato a Parigi nel 1788, nei primi anni del più che venticinquennale soggiorno parigino.

La meccanica analitica, come branca della meccanica classica, sviluppata da Luigi Lagrange improntera di sé e del proprio metodo e delle proprie tecniche (il ‘metodo lagrangiano’), tutti gli studi successivi, diventerà il pilastro di tutta la cosiddetta meccanica classica e sarà insegnato in tutti i corsi accademici di meccanica generale.



Il metodo lagrangiano in fisica, per la sua grande efficacia, sarà subito applicato, e tuttora costituisce l’idea originaria fondamentale, su cui poggia anche gran parte del formalismo della fisica quantistica (Dirac, 1930) e della fisica contemporanea.

La riflessione continua...

Se, da una parte, è vero che l'economia tratta di quantità misurabili, e quindi è assimilabile a una disciplina quantitativa, dall'altra parte, il tipo di matematica utilizzata, il modo e lo scopo con cui la matematica vi svolge il ruolo modellistico (e non per la sola contabilità!) che le viene attribuito deve essere attentamente considerato, per evitare palesi errori metodologici.

L'economia tratta di uomini e dei loro comportamenti individuali e aggregati: essi sono differenziati fra loro e mutevoli nel tempo, poco prevedibili, poiché seguono logiche diverse da quella classica su cui costruiamo l'idea consueta di razionalità. Le scelte individuali e le dinamiche sociali che ne derivano non sono assimilabili a quelle di corpi materiali identici fra loro, soggetti a forze che ne determinano la dinamica, corpi che, nelle stesse condizioni, reagiscono sempre allo stesso modo. Gli agenti economici reali non sono descrivibili come i sassi in caduta e i pianeti!

Compiamo un errore epistemologico se applichiamo uno strumento modellistico, l'analisi matematica tradizionale, che è stato costruito per modellizzare il moto di corpi inanimati, in condizioni in cui tutto è noto, e sotto certe ipotesi ben definite, alla descrizione di situazioni differenti fra loro, come quelle delle scienze umane e sociali, dove gli agenti sono differenziati e mutevoli, dove la natura, le modalità di azione e gli effetti di ciò che causa la dinamica dei mercati, ciò che in meccanica sono le forze, è scarsamente noto e non è costante nel tempo.

Ma da dove viene il principio di minima azione (meglio: di azione stazionaria)? Facciamo un passo indietro nel tempo...

Pierre-Louis Maureau de Maupertuis suggeriva, nel 1744-46, senza giustificare l'assunzione (personalità brillante e di successo, non era abilissimo in matematica, a differenza del contemporaneo Eulero): Nei moti naturali è minimo il prodotto della durata del moto per la *vis viva* (Leibniz aveva introdotto la vis viva sessant'anni prima, come grandezza conservata nel moto, dimostrando un errore di Cartesio) o (ciò che è lo stesso): è minimo il prodotto della lunghezza del moto per la massa e per la velocità ($l \times m \times v$).

Cartesio, più di cento anni prima, aveva pensato $m \times v$ come grandezza conservata nel moto (invece della *vis viva* di Leibniz: $m \times v^2$), come una proprietà della *res extensa* che riflette la perfezione di Dio creatore.

Un principio filosofico, metafisico (... teologico!)

«Tous les phénomènes de la réfraction s’accordent maintenant avec le grand principe, que *la Nature dans la production de ses effets agit toûjours par les voies les plus simples.* De ce principe suit que *lorsque la lumière passe d’un milieu dans un autre, le sinus de son angle de réfraction est au sinus de son angle d’incidence en raison inverse des vîtesses qu’a la lumière dans chaque milieu.»*

(Maupertuis, comunicazione all’*Assemblée publique de l’Académie Royale des Sciences de Paris,* tenuta il 15 aprile 1744, intitolata *Accord de différents loix de la nature, qui avaient jusqu’ici paru incompatibles18*, stampata nelle *Mémoires de l’Académie* 1744)

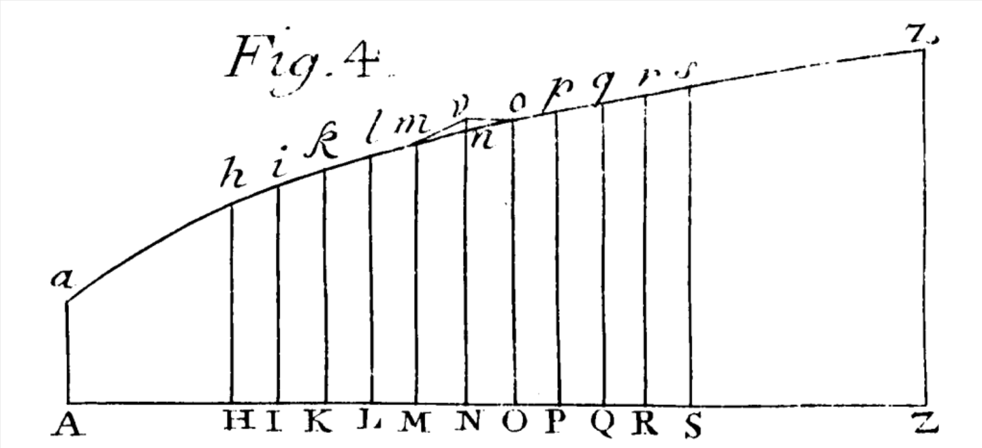
«C’est le principe de la *moindre quantité d’action*: principe si sage, si digne de l’Etre suprême, & auquel la Nature paroît si constamment attachée ; qu’elle l’observe non seulement dans tous ses changemens, mais que dans sa permanence, elle tend encore à l’observer. *Dans le Choc des Corps, le Mouvement se distribue de manière que la quantité d’action, que suppose le changement arrivé, est la plus petite qu’il soit possible. Dans le Repos, les Corps qui se tiennent en équilibre, doivent être tellement situés, que s’il leur arrivoit quelque petit Mouvement, la quantité d’action seroit la moindre.*

[…]

«PRINCIPE GENERAL.
Lorsqu’il arrive quelque changement dans la Nature, la Quantité d’Action, nécessaire pour ce changement, est la plus petite qui soit possible.
La *Quantité d’Action* est le produit de la Masse des Corps, par leur vîtesse & par l’espace qu’ils parcourent. Lorsqu’un Corps est transporté d’un lieu dans un autre, l’Action est d’autant plus grande, que la masse est plus grosse; que la vîtesse est plus rapide; que l’espace, par lequel il est transporté, est plus long»

(Maupertuis, *Les loix du mouvement et du repos,* 1746)

Eulero, anche lui all'Accademia di Berlino, di cui Mauperuis era direttore, matematizza il tutto e crea il calcolo variazionale:



$$S = \int_{x_0}^{x_n} F(x, y, y')dx \to \varphi(y_1, y_2, \dots y_{n-1})$$

Da cui, con qualche passaggio, si ricava la condizione di estremo:

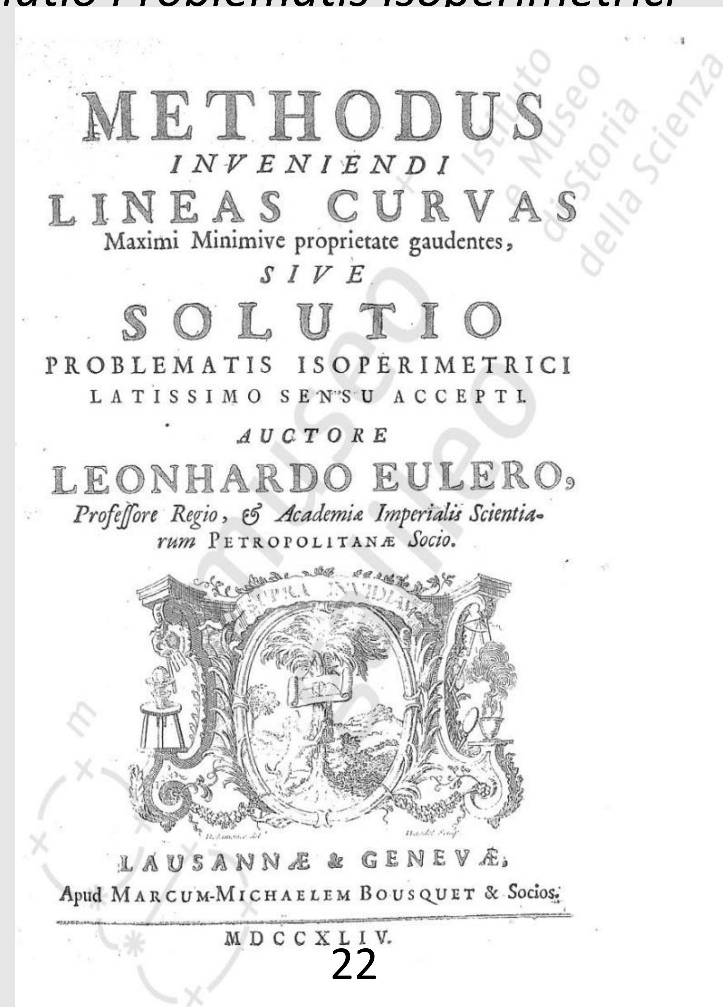
$$\frac{d}{dy}F - \frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dy'}\right) = 0$$

L'idea è la seguente. Se l'integrale d'azione *S* è minimo lungo l'intera traiettoria, esso deve anche essere minimo in qualsiasi piccolo tratto sulla traiettoria. Minima azione significa allora che qualsiasi cambiamento nella traiettoria, per esempio se il punto *n* di un arco della traiettoria compreso fra altri due punti *m* ed *o*, come in Figura 4, viene 'variato', al punto *v*, si ha un cambiamento dell'azione nullo al primo ordine.

Eulero dimostrò che, se questa condizione deve essere soddisfatta per tutti i punti della poligonale e se si passa al limite per lunghezze dei segmenti della traiettoria che tendono a zero, allora si ottiene un'equazione differenziale, nota come l'equazione di Eulero, la cui soluzione è la traiettoria caratterizzata dall'essere l'azione stazionaria.

Anche Eulero mantiene la visione metafisico-teologica del principio:

«Cum enim Mundi universi fabrica sit perfectissima atque a Creatore sapientissimo absoluta nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quaepiam eluciat» (Euler, *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minive Proprietate Gaudentes, Sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu Accepti,* 1744).



METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ *Socio.*

LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLIV.

Sarà Lagrange, la generazione successiva a quella di Eulero, espressione di una nuova cultura, a trasferire alla meccanica le profonde intuizioni e realizzazioni tecniche di Eulero. Le equazioni di Eulero, applicate alla meccanica e reinterpretate e applicate nel contesto della meccanica saranno le equazioni di Lagrange.

Lagrange completò il lavoro che Eulero aveva iniziato nel 1744 con il *Methodus inveniendi*, il quale conteneva metodi geometrici finiti, e solo per scopi matematici. Lagrange diede la prima formulazione analitica del calcolo delle variazioni e ne scrisse l'applicazione in meccanica.

Lagrange critichò le visione metafisica di Maupertuis e di Eulero, sostenendo che il principio di minima azione deve essere considerato come un risultato semplice e generale delle leggi della meccanica.

Qualche dato storico...

Nel 1757, Giuseppe Ludovico Lagrangia (Louis Lagrange), Giuseppe Angelo Saluzzo di Monesiglio and Gianfrancesco Cigna fondano a Torino la *Privata Società Scientifica* che diventerà, in seguito, la *Accademia delle Scienze di Torino*.

Nel 1759, la *Privata Società Scientifica* inizia la pubblicazione della rivista *Miscellanea philosophico-mathematica Societatis Privatae Taurinensis*. Nel secondo volume dei *Miscellanea*, del 1762, Lagrange scrisse due articoli fondamentali: *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indefinies* e *Application de la méthode esposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique,* dove è la formalizzazione generale del calcolo delle variazioni e la sua applicazione alla meccanica.

In *Recherches sur la libration de la Lune, dans lesquelles on tâche de résoudre la question proposée par l'Académie Royale des Sciences, pour le Prix de l'année 1764*, del 1764, e in *Théorie de la libration de la Lune et des autres phénomènes qui dépendent de la figure non sphérique de cette planète,* del 1782, Lagrange presentò il primo uso di ciò che poi sarebbe stato chiamato 'funzione lagrangiana' e 'metodo dei moltiplicatori di Lagrange'. In questi articoli sono anche scritte le celebri equazioni di Lagrange, che saranno il nucleo centrale del celeberrimo libro *Méchanique analytique* (prima ed. 1788), sul quale generazioni di fisici, matematici e ingegneri del secolo successivo si sarebbero formati.

ESSAI D'UNE NOUVELLE MÉTHODE

POUR

DÉTERMINER LES MAXIMA ET LES MINIMA

DES

FORMULES INTÉGRALES INDÉFINIES.

(*Miscellanea Taurinensia*, t. II, 1760-1761.)

Pour peu qu'on soit au fait des principes du Calcul différentiel, on connaît la méthode de déterminer les plus grandes et les moindres ordonnées des courbes; mais il est des questions *de maximis* et *minimis* d'un genre plus élevé et qui, quoique dépendantes de la même méthode, ne s'y appliquent pas si aisément. Ce sont celles où il s'agit de trouver les courbes mêmes, dans lesquelles une expression intégrale donnée soit un maximum ou un minimum par rapport à toutes les autres courbes.

Le premier Problème de ce genre, que les Géomètres aient résolu, est celui de la *Brachistochrone*, ou ligne de la plus vite descente, que M. Jean Bernoulli proposa vers la fin du siècle passé. On n'y parvint alors que par des voies particulières, et ce ne fut que quelque temps après, et à l'occasion des recherches sur les *Isopérimètres*, que le grand Géomètre dont nous venons de parler et son illustre frère M. Jacques Bernoulli, donnèrent quelques règles générales pour résoudre plusieurs autres questions de même nature. Mais ces règles n'ayant pas assez d'étendue, le célèbre M. Euler a entrepris de réduire toutes les recherches de ce genre à une méthode générale, dans l'ouvrage intitulé : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi, minimive proprietate gaudentes : sive solutio*

Problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti; ouvrage original et qui brille partout d'une profonde science du calcul. Cependant, quelque ingénieuse et féconde que soit sa méthode, il faut avouer qu'elle n'a pas toute la simplicité qu'on peut désirer dans un sujet de pure analyse. L'Auteur le fait sentir lui-même dans l'Article 39 du Chapitre II de son livre, par ces paroles : « Desideratur itaque methodus a resolutione geometrica et lineari libera, qua pateat in tali investigatione maximi minimique, loco $P\,dp$ scribi debere $-p\,dP$. »

Maintenant voici une méthode qui ne demande qu'un usage fort simple des principes du Calcul différentiel et intégral; mais avant tout je dois avertir que, comme cette méthode exige que les mêmes quantités varient de deux manières différentes, pour ne pas confondre ces variations, j'ai introduit dans mes calculs une nouvelle caractéristique δ. Ainsi δZ exprimera une différence de Z qui ne sera pas la même que dZ, mais qui sera cependant formée par les mêmes règles; de sorte qu'ayant une équation quelconque $dZ = m\,dx$, on pourra avoir également $\delta Z = m\,\delta x$, et ainsi des autres. Cela posé, je viens d'abord au Problème suivant.

I.

Problème I. — *Étant proposée une formule intégrale indéfinie représentée par $\int Z$, où Z désigne une fonction quelconque déterminée des variables x, y, z, et de leurs différences $dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, \ldots$, trouver la relation que ces variables doivent avoir entre elles, pour que la formule $\int Z$ devienne un maximum ou un minimum.*

Solution. — Suivant la méthode connue *de maximis* et *minimis*, il faudra différentier la proposée $\int Z$, en regardant les quantités $x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, \ldots$, comme variables, et faire la différentielle qui en résulte, égale à zéro. Marquant donc ces variations par δ, on aura d'abord, pour l'équation du maximum ou minimum,

$$\delta \int Z = 0,$$

APPLICATION DE LA MÉTHODE

EXPOSÉE DANS LE MÉMOIRE PRÉCÉDENT

A LA SOLUTION DE

DIFFÉRENTS PROBLÈMES DE DYNAMIQUE.

(*Miscellanea Taurinensia*, t. II, 1760-1761.)

M. Euler, dans une Addition à son excellent ouvrage qui a pour titre : *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes : sive solutio Problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, a démontré ce principe que, dans les trajectoires que des corps décrivent par des forces centrales, l'intégrale de la vitesse, multipliée par l'élément de la courbe, fait toujours un maximum ou un minimum.

Je me propose ici de généraliser ce même principe, et d'en faire voir l'usage pour résoudre avec facilité toutes les questions de Dynamique.

Principe général. — *Soient tant de corps qu'on voudra* M, M', M'',..., *qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, et qui soient de plus, si l'on veut, animés par des forces centrales proportionnelles à des fonctions quelconques des distances; que* $s, s', s'', \ldots$, *dénotent les espaces parcourus par ces corps dans le temps* t, *et que* $u, u', u'', \ldots$, *soient leurs vitesses à la fin de ce temps; la formule*

$$\mathrm{M}\int u\,ds + \mathrm{M}'\int u'\,ds' + \mathrm{M}''\int u''\,ds'' + \ldots$$

sera toujours un maximum ou un minimum.

I.

Problème I. — *Trouver le mouvement d'un corps* M *attiré vers tant de centres fixes qu'on voudra par des forces* P, Q, R,..., *exprimées par des fonctions quelconques des distances.*

Solution. — Comme il n'y a ici qu'un seul corps M, la formule qui doit être un maximum ou un minimum sera simplement $\mathrm{M}\int u\,ds$; on aura donc, suivant la méthode expliquée dans le Mémoire précédent, l'équation

$$\delta\left(\mathrm{M}\int u\,ds\right) = 0,$$

ou, en divisant par M qui est constante,

$$\delta\left(\int u\,ds\right) = 0.$$

Or,

$$\delta(u\,ds) = u\,\delta\,ds + \delta u\,ds;$$

donc, changeant l'expression $\delta\left(\int u\,ds\right)$ en son équivalente $\int \delta(u\,ds)$, comme on l'a enseigné (Article I, Mémoire précédent), on aura l'équation

$$\int (u\,\delta\,ds + \delta u\,ds) = 0.$$

Soient $p, q, r, \ldots$ les distances du corps M aux centres des forces P, Q, R,..., on aura, comme tous les Géomètres le savent,

$$\frac{u^2}{2} = \text{const} - \int(\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \ldots);$$

donc

$$\begin{aligned} u\,\delta u &= -\delta\int(\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \ldots) \\ &= -\int(\delta\mathrm{P}\,dp + \mathrm{P}\,\delta\,dp + \delta\mathrm{Q}\,dq + \mathrm{Q}\,\delta\,dq + \delta\mathrm{R}\,dr + \mathrm{R}\,\delta\,dr + \ldots) \end{aligned}$$

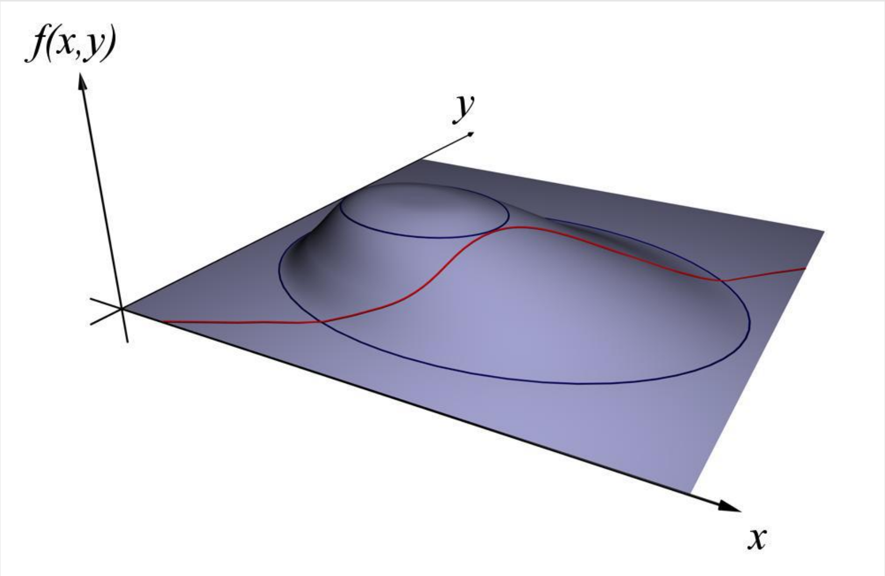
ou en changeant $\delta dp, \delta dq, \delta dr, \ldots$ en $d\delta p, d\delta q, d\delta r, \ldots$, et intégrant

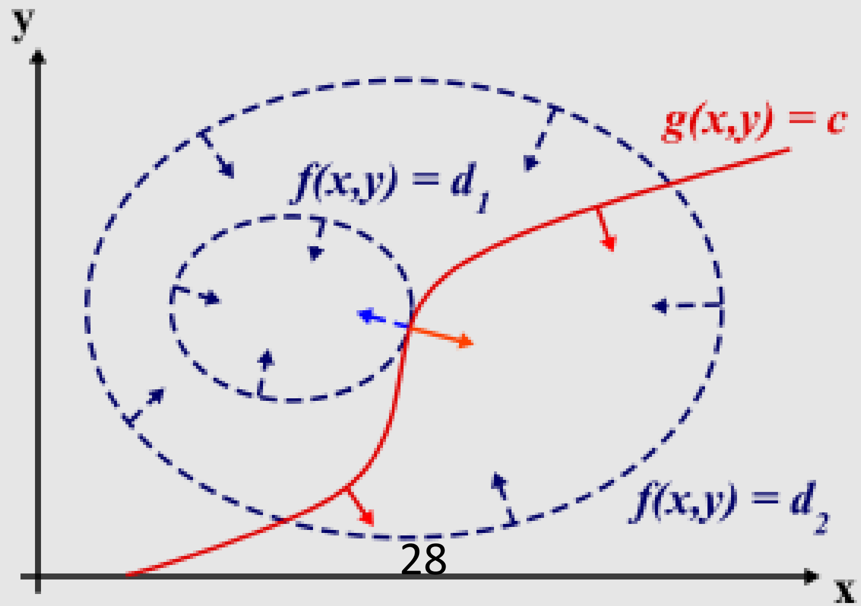
Il calcolo delle variazioni è matematica, puro risultato di un metodo ipotetico-deduttivo che non ha da confrontarsi con fatti estranei alla matematica.

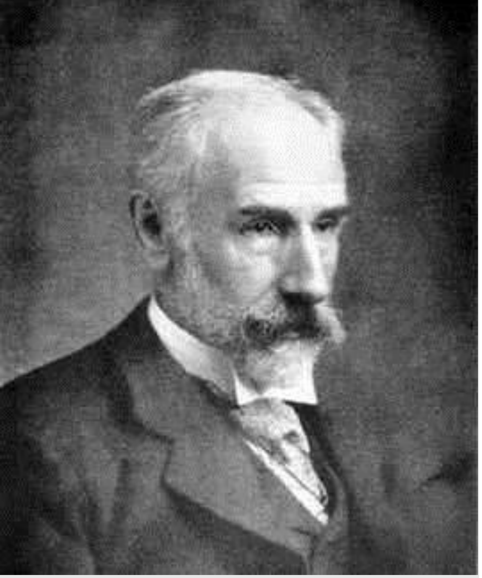
L’applicazione di Lagrange riguarda la meccanica, la scienza del moto, l’astrazione di una scienza empirica.

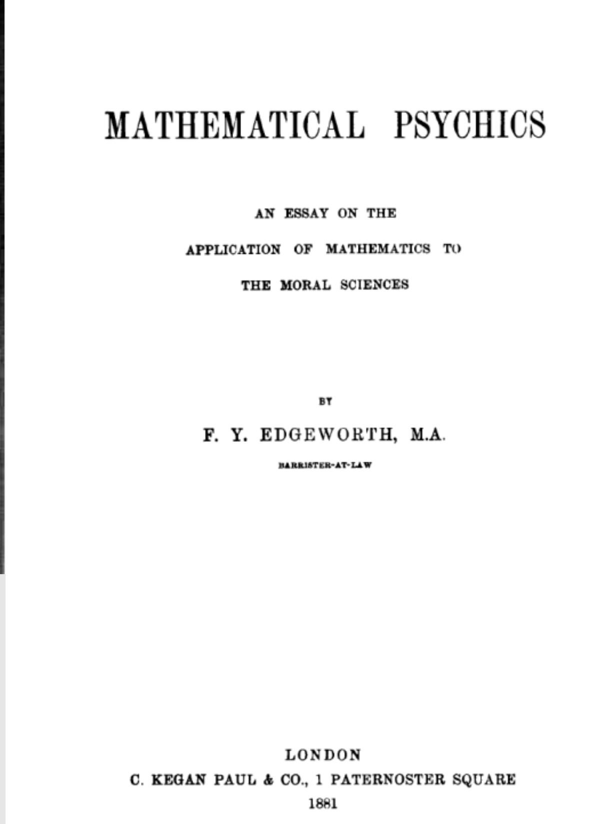
L’applicazione della prima alla seconda è corretta SOLO perché, come mostrò Hamilton, il calcolo delle variazioni è un altro modo di esprimere la legge di Newton (legge ampiamente confermata dalle osservazioni). Se accettiamo la meccanica newtoniana, alla cui base sono postulati molto forti su spazio, tempo, inerzia, forze ecc…, allora la meccanica lagrangiana e anche quella hamiltoniana, formulata una ventina di anni dopo la morte di Lagrange, ne derivano senza aggiungere, concettualmente, nulla di nuovo. In alcuni casi è utile la formulazione differenziale, in altri quella integrale.

Il concetto di razionalità dell'agente economico che si forma negli anni Settanta dell'800 ha ben poco di filosofico: l'*homo oeconomicus* è un uomo astratto, onnisciente, razionale, che prima di decidere è in grado di compiere calcoli di ottimizzazione, del tipo di quelli che Lagrange e gli altri aveva sviluppato nella meccanica.
Tipico esempio: l'uso del metodo dei moltiplicatori di Lagrange tuttora insegnato nelle scuole di economia per l'ottimizzazione dell'utilità quando si è soggetti a vincoli di bilancio.









MATHEMATICAL PSYCHICS

AN ESSAY ON THE
APPLICATION OF MATHEMATICS TO
THE MORAL SCIENCES

BY

F. Y. EDGEWORTH, M.A.

BARRISTER-AT-LAW

LONDON
C. KEGAN PAUL & CO., 1 PATERNOSTER SQUARE
1881

«The application of mathematics to the world of soul is countenanced by the hypothesis (agreeable to the general hypothesis that every psychical phenomenon is the concomitant, and in some sense the other side of a physical phenomenon), the particular hypothesis adopted in these pages, that Pleasure is the concomitant of Energy. Energy may be regarded as the central idea of Mathematical Physics; *maximum energy* the object of the principal investigations in that science. By aid of this conception we reduce into scientific order physical phenomena, the complexity of which may be compared with the complexity which appears so formidable in Social Science» (Edgeworth, *Mathematical Psychics. An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences*, 1881, p. 9).

«Now this accumulation (or time-integral) of energy which thus becomes the principal object of the physical investigation is analogous to that accumulation of pleasure which is constituted by bringing together in prospect the pleasure existing at each instant of time, the end of rational action, whether self-interested or benevolent» (Edgeworth, *Mathematical Psychics,* 1881, p. 11).

«The Economical Calculus investigates the equilibrium of a system of hedonic forces each tending to maximum individual utility; the Utilitarian Calculus, the equilibrium of a system in which each and all tend to maximum universal utility» (Edgeworth, *Mathematical Psychics*, 1881, p. 15).

«This 'moral arithmetic' is perhaps to be supplemented by a moral differential calculus, the Fechnerian method applied to pleasures in general. For Wundt has shown that sensuous pleasures may thereby be measured, and, as utilitarians hold, all pleasures are commensurable» (Edgeworth, *Mathematical Psychics*, 1881, p. 60).

Edgeworth è uno dei primi economisti a comprendere e a utilizzare il metodo di moltiplicatori di Lagrange (*New and Old Methods of Ethics*, 1877). Dopo aver discusso i possibili significati del 'the greatest happiness of the greatest number', Edgeworth considera la natura della funzione utilità e afferma esplicitamente che la derivata prima è positiva e la derivata seconda negativa. Queste assunzioni erano basate unicamente sui risultati degli psicologi sperimentali (Weber, Fechner…) .

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

1) Si scrive la lagrangiana nella forma: $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

2) Si uguagliano a zero separatamente le due derivate della lagrangiana *L* rispetto a *x* e a *λ* (assumiamo, per semplicità, che troviamo un massimo della quota *z* in un punto in cui i vettori forza e reazione vincolare sono paralleli all'asse *x*, in modo da poter porre uguali a zero le componenti *y* di entrambi i gradienti).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \lambda \dfrac{\partial}{\partial x} g(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Ciò ha senso se le funzioni *f* e *g* sono differenziabili rispetto a *x* e *y* in un intorno almeno del punto di massimo studiato, e se le derivate prime sono continue (funzioni almeno di classe C^1). Il metodo dei moltiplicatori dà una condizione necessaria per i massimi vincolati o, in generale, per i punti stazionari di una funzione di più variabili, in presenza di vincoli fra le variabili indipendenti.

Fuori dal contesto della meccanica, il metodo si snatura: se non si può parlare in senso stretto di forze, di vettori, e di funzioni C^1, diventa fine a se stesso.

A p. 43 di *New and Old Methods of Ethics* di Edgeworth è riportata una delle prime applicazioni del metodo lagrangiano per ricavare la distribuzione di reddito che massimizza la somma delle utilità individuali.

Edgeworth assume la funzione utilità di un individuo nella forma: $k[f(y) - f(\beta)]$

k è la capacità individuale di essere sensibile al piacere

y sono i *means of pleasure* (es. la ricchezza individuale)

β è il valore minimo di *y* capace di suscitare piacere

k e β sono assunti uguali per tutti gli individui; *f* è assunta essere convessa.

Egli ricerca poi il massimo dell'utilità totale, vincolato alla disponibilità totale di *means of pleasure*, applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, cercando il massimo della lagrangiana definita così: $k\left[f\left(y_1\right)+f\left(y_2\right)+\&c\right]-c\left[y_1+y_2+\&c\right]$

La soluzione (calcolo differenziale elementare) è ottenuta derivando la lagrangiana totale rispetto a tutte le *y*, una dopo l'altra, cioè rispetto a tutti i *means of pleasure*, individuo per individuo. Ricava un insieme di equazioni, una per ciascun individuo:

$kf'\left(y_i\right)=c$ L'utilità massima, somma delle utilità individuali, è raggiunta quando i *means of pleasure y*, cioè la ricchezza individuale, sono uguali fra loro.

MECHANICS/PHYSICS

Lagrange 1736-1813

Euler 1707-1783

Fermat's principle 1662

Newtonian dynamics *F=ma* 1687

J. Bernoulli brachistochrone problem 1696

Maupertuis least action principle 1744

Lagrange *Miscellanea* 1762

Lagrange *Mécanique analytique* 1788

Hamilton's principle and equations 1835

Joule, Helmholtz, Maxwell, Boltzmann, the conservation of energy, the apotheosis of classical physics 1840-1880…

1640 Descartes's conservation of quantity of motion

1686 Leibniz conservation of kinetic energy: 'vis viva'

1744 Euler *Methodus inveniendi*

1755-1762 Lagrange's calculus of variations

1795 Laplace *Essai philosophique des probabilités* 'The Laplacean dream'

…1905-1930 relativity, quantum mechanics, the collapse of classical physics and of the energy concept

ECONOMICS

Quesnay *Tableau économique* 1759

Adam Smith *On the Wealth of Nations* 1776

Say's law 1803

Cournot 1838

Marx *Das Kapital* 1867

Walras, Jevons Menger 1870

Marshall, Edgeworth Pareto 1890

mercantilists

physiocracy (the first well-developed theory of economics)

classical economics

1848 Marx *Das Manifest* J.S. Mill *Principles of Political Economy*

1876 Westergaard *Den moralske formue og det moralske haab* 1877 Edgeworth *The New and Old Methods of Ethics*

marginalism, neoclassical economics

La razionalità dell'agente economico e delle scelte dunque diventa un oggetto centrale dell'economia dalla fine dell'Ottocento.

Il metodi della meccanica, metodi descrittivi dei fenomeni naturali (pianeti, corpi in caduta, libera o vincolata...) diventano prescrittivi, per indicare il comportamento 'ottimo' dell'agente economico e delle sue scelte.

Manca ancora tuttavia una definizione formale generale di cosa siano le scelte razionali.
Arriverà nel 1944...

La modellizzazione matematica dell'utilità attesa (*expected utility*) in economia inizia con il fondamentale lavoro teorico di John von Neumann e Oskar Morgenstern sul comportamento economico e sulla teoria dei giochi:

The Theory of Games and Economic Behaviour (1944).

Quattro assiomi alla base ciò che essi definiscono la teoria razionale della scelta (*rational choice theory*):

Completezza. Per ogni A e B, si ha o $A \succcurlyeq B$ (A preferito a B) or $A \preccurlyeq B$

Transitività. Per ogni A, B e C, con $A \succcurlyeq B$ e $B \succcurlyeq C$, si deve avere: $A \succcurlyeq C$

Continuità. Siano A, B e C tre lotterie con $A \succcurlyeq B \succcurlyeq C$, allora esiste una probabilità p tale per cui: $B \approx pA+(1-p)C$

Indipendenza. Siano A, B, e C tre lotterie con $A \succcurlyeq B$, e sia t in $(0, 1]$; allora: $tA+(1-t)C \succcurlyeq tB+(1-t)C$

Nel corso degli anni sono state date diverse versioni più elaborate rispetto all'originale assiomatizzazione di von Neumann e Morgenstern. Queste assiomatizzazioni costituiscono la base della attuale teoria della decisione.

Nel 1954, Leonard Savage nel suo *Foundations of Statistics* riformula l'assioma dell'indipendenza che diventa il «sure-thing principle» (oltre a ciò, Savage estese la teoria al caso in cui probabilità 'fisiche' non siano note, considerando le probabilità soggettive, già introdotte negli anni Trenta da Ramsey, de Finetti...).

Il principio della cosa sicura afferma che elementi comuni a una coppia di alternative di scelta possono essere ignorati.
'Indipendenza' significa che se un individuo è indifferente nella scelta fra le lotterie *L1* e *L2* , allora è indifferente anche nella scelta fra *L1* mescolata a una lotteria *L3* con probabilità *p* e *L2* mescolata a *L3* con la stessa probabilità *p*.

Savage (1954, p.21):

«A businessman contemplates buying a certain piece of property. He considers the outcome of the next presidential election relevant. So, to clarify the matter to himself, he asks whether he would buy if he knew that the Democratic candidate were going to win, and decides that he would. Similarly, he considers whether he would buy if he knew that the Republican candidate were going to win, and again finds that he would. Seeing that he would buy in either event, he decides that he should buy, even though he does not know which event obtains, or will obtain, as we would ordinarily say. It is all too seldom that a decision can be arrived at on the basis of this principle, but except possibly for the assumption of simple ordering, I know of no other extralogical principle governing decisions that finds such ready acceptance»

2. La psicologia e la crisi del modello tradizionale della razionalità nelle scelte e nelle preferenze

Il modello delle scelte razionali di von Neumann e Morgenstern riscosse un larghissimo successo, diventando subito il paradigma della teoria economica dominate (il cosiddetto *mainstream*).

Ben presto comparvero alcuni studi che mettevano in dubbio la sensatezza delle assunzioni e che, sulla base di resoconti di ricerche sul campo, e smentivano le assunzioni del modello delle scelte razionali. Primi, furono i rivoluzionari lavori sperimentali (vere e proprie indagini sul campo: test e interviste) di due economisti: in Francia, Maurice Allais (1953); negli Stati Uniti, Daniel Ellsberg (1961).

Dagli anni Settanta in avanti, questo tipo di ricerche fu condotto soprattutto da psicologi e NON da economisti (i quali ultimi, tranne poche eccezioni, restavano nel *mainstream*): un gran numero di ricerche sul campo evidenziò comportamenti palesemente in contraddizione con le assunzioni di von Neumann e Morgenstern.

E cioè?

Si affacciano nuove concezioni di agenti economici come individui differenziati:

- comunicanti e interagenti, attraverso meccanismi di varia natura
- non pienamente razionali, che spesso decidono su basi emotive
- non onniscienti, accedono solo a una parte dell' informazione disponibile
- con limitata capacità di elaborazione delle informazioni
- che fanno valutazioni asimmetriche del rischio e del guadagno
- che scelgono in condizioni di asimmetria informativa, di rischio e/o incertezza.

Sono agenti non omogenei fra loro, che interagiscono entro una società strettamente connessa, e non più individui indifferenziati, egoisti, autoreferenziali. Le scelte sono determinate dall'elaborazione di informazione incompleta, condotta secondo processi non riconducibili alla sola razionalità; sono legate alla comunicazione fra gli agenti, i quali si scambiano informazioni, opinioni, stati d'animo, emozioni e non decidono utilizzando unicamente la razionalità e il calcolo.

L’elemento fondamentale che il nuovo quadro, in cui l’economia si sposa alla psicologia e alle scienze cognitive, introduce nella teoria economica è una sostanziale revisione del concetto di razionalità e del suo ruolo nelle decisioni.

Viene drasticamente ridotto il ruolo della razionalità nel processo di scelta (nelle teorie classiche era esclusivo e presupponeva, prima della decisione, il calcolo delle diverse utilità conseguibili con le differenti alternative di scelta).

Tra gli anni Settanta e Novanta, vengono evidenziati vari fenomeni di violazione della razionalità, come:

Il *preference reversal* (Lichtenstein e Slovic), l’ancoraggio, il *background contrast effect*, l’*asymmetric dominance effect,* l’*endowment effect*, l’*availability bias*, la *conjunction fallacy,* ecc.

Questi hanno dato origine a varie teorie interpretative (p. es. la teoria del supporto...)

Il *framing*, all’origine della *prospect theory* (Kahneman e Tversy)

Il *disjunction effect e il conjunction effect* nelle scelte, riferiti a interferenza mentale fra concetti (Tversky, Shafir, Hampton e numerosi altri).

Nel seguito entrerò in dettaglio solamente sul paradosso di Allais e su qualche celebre esempio di congiunzione e disgiunzione di concetti e di *conjunction fallacy*.

La disgiunzione di concetti, in particolare, sarà oggetto di una forma di modellizzazione matematica fondata sulle tecniche matematiche della meccanica quantistica.

Tralascio la presentazione del poderoso lavoro di Herbert Simon, che richiederebbe un tempo enorme...
Simon, scienziato cognitivo, fu il primo a discutere a fondo le limitazioni della razionalità umana (*bounded rationality*) e fu il primo non-economista a ricevere il Premio Nobel per l'economia, nel 1978.

Cominciamo dal paradosso di Allais...

ECONOMETRICA

VOLUME 21 OCTOBER, 1953 NUMBER 4

LE COMPORTEMENT DE L'HOMME RATIONNEL DEVANT LE RISQUE: CRITIQUE DES POSTULATS ET AXIOMES DE L'ECOLE AMERICAINE[1]

PAR M. ALLAIS[2]

ENGLISH SUMMARY

The most important points of this article can be summarized as follows:

(1) Contrary to the apparent belief of many authors, the concept of cardinal utility, $\bar{s}(x)$, can be defined in an operational manner either by considering equivalent differences of levels of satisfaction or by use of the Weber-Fechner *minimum sensible* or psychological threshold.

Thus one can associate a psychological value $\bar{s}(x)$ with each monetary value x.

[1] Une première version de cet article a été donnée dans une étude plus générale intitulée "Notes théoriques sur l'incertitude de l'avenir et le risque" qui a été présentée au Congrès Européen d'Econométrie en Septembre 1951. Une deuxième version en a été présentée sous forme d'une communication au Colloque International sur le Risque qui s'est tenu à Paris en Mai 1952. Le lecteur pourra trouver dans le mémoire que nous avons rédigé à cette occasion toutes les justifications mathématiques des résultats indiqués cidessous avec de nombreux exemples que, faute de place, nous n'avons pu faire figurer dans cet article. Nous ne saurions trop conseiller au lecteur qui s'intéresserait aux indications qui suivent de se reporter à ce mémoire.

EDITOR'S NOTE: The problem discussed in Professor Allais' paper is of an extremely subtle sort and it seems to be difficult to reach a general agreement on the main points at issue. I had a vivid impression of these difficulties at the Paris colloquium in May, 1952. One evening when a small number of the prominent contributors to this field of study found themselves gathered around a table under the most pleasant exterior circumstances, it even proved to be quite a bit of a task to clear up in a satisfactory way misunderstandings in the course of the conversation. The version of Professor Allais' paper, which is now published in ECONOMETRICA, has emerged after many informal exchanges of views, including work done by editorial referees. Hardly anything more is now to be gained by a continuation of such procedures. The paper is therefore now published as it stands on the author's responsibility. The editor is convinced that the paper will be a most valuable means of preventing inbreeding of thoughts in this important field.—R.F.

[2] Nous croyons devoir remercier ici tout particulièrement MM. Capoulade, de Finetti, Mathieu, Lavaill, Lesourne, Massé, Mercier, et Morlat pour leurs observations et suggestions qui nous ont été particulièrement précieuses.

La teoria dell'utilità attesa di von Neumann e Morgenstern poggia su assiomi che riguardano l'atteggiamento di un individuo razionale che deve scegliere in condizioni di rischio. Maurice Allais, nel 1953, evidenziò per primo l'incongruenza del comportamento umano effettivo, osservato, con le predizioni della teoria (il paradosso di Allais): conclusione coraggiosa, che andava contro la teoria economica della scuola americana, incontrastata e dominante.

Allais mostrò, a seguito di interviste condotte su numerosi soggetti, che l'assioma dell'indipendenza dalle alternative irrilevanti, alla base della teoria razionale della scelta, di fatto è violato molto frequentemente.

Secondo tale assioma, se un individuo percepisce l'opzione *A* come più vantaggiosa rispetto all'opzione *B*, allora, qualsiasi sia l'opzione *C* e qualsiasi sia il coefficiente peso *p*, l'opzione combinata:

$$[A \times p; C \times (1-p)]$$

deve essere preferita all'opzione combinata:

$$[B \times p; C \times (1-p)]$$

1. LA PRÉSENTE étude est essentiellement destinée à un exposé critique des postulats et axiomes des théories du risque de l'école américaine.

2. *Eléments psychologiques intervenant dans les choix comportant un risque.* Il convient de distinguer soigneusement parmi les éléments qui interviennent dans les choix comportant un risque, ceux de ces éléments qui jouent un rôle essentiel de ceux qui ne jouent qu'un rôle accessoire.

4. ÉLÉMENT I: *La déformation psychologique des valeurs monétaires et la courbure de la satisfaction absolue.* Ce dont un individu tient compte

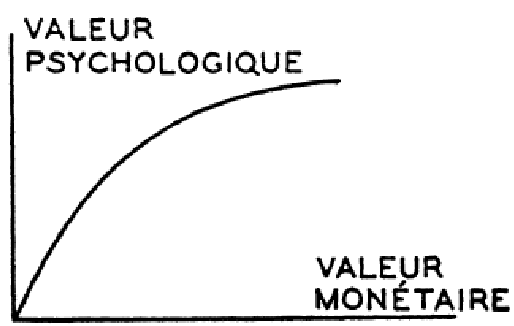


FIGURE 1

dans un choix aléatoire, ce n'est pas de la valeur monétaire g du gain possible, mais de la valeur psychologique $\gamma = \bar{s}(g)$ attachée à ce gain.[5, 6]

I dati ricavati da Allais (1953):

Scommessa A	*Scommessa B*
vincita di 100 milioni, con p = 1	vincita 500 milioni, con p = 0,10
	vincita 100 milioni, con p = 0,89
	vincita 0, con p = 0,01

82% degli intervistati preferiva la scommessa *A* rispetto alla *B*

Scommessa C	*Scommessa D*
vincita 100 milioni, con p = 0,11	vincita 500 milioni, con p = 0,10
vincita 0, con p = 0,89	vincita 0, con p = 0,90

83% degli intervistati preferiva la scommessa *D* rispetto alla C

Ma le scelte dichiarate sono incoerenti!! Infatti, le scelte dichiarate denunciano che:

$$1 \times u(100.000.000) > 0{,}1 \times u(500.000.000) + 0{,}89 \times u(100.000.000)$$

Ma, sottraendo 0,89×*u*(100.000.000) a entrambi i membri, si ottiene:

$$0{,}11 \times u(100.000.000) > 0{,}1 \times u(500.000.000)$$

che corrisponde alla preferenza di *C* rispetto a *D*. $\rightarrow$ Violazione della razionalità!!

«*La déformation subjective des probabilites objectives*. […]

De toute façon, il est visible qu'*un individu ne peut tenir compte que des probabilités telles qu'il se les imagine, et non des probabilités telles qu'elles sont effectivement*. Il n'y a donc aucune raison pour que les probabilités subjectives soient égales aux probabilités objectives. Seul, par exemple, un statisticien de profession peut se faire une idée correcte de ce que signifie une probabilité égale à une chance sur cent»

«Everybody recognizes the fact that man in reality does not behave according to the principle of Bernoulli. There does exist a profound difference, however, in points of view as to how a rational man ought to behave. According to the American school, a rational man must conform to the principle of Bernoulli. In our view, this is a mistake which in fact is tantamount to neglecting the fourth specific element in the psychology of risk»

(Allais, 1953)

Il paradosso di Ellsberg (1961)

Un'urna contiene 300 palline, delle quali è noto che 100 sono rosse e che le altre 200 sono blu oppure verdi, ma non è noto in quale rapporto.

Si propone all'intervistato di scegliere fra le scommesse *A* e *B*,

Scommessa A	**Scommessa B**
vincita 1000 se si estrae una pallina rossa **nessuna vincita in caso contrario**	**vincita 1000 se si estrae una pallina blu** **nessuna vincita in caso contrario**

Scommessa C	**Scommessa D**
vincita 1000 se si estrae una pallina rossa o verde (cioè NON blu) **nessuna vincita in caso contrario**	**vincita 1000 se si estrae una pallina blu o verde (cioè NON rossa)** **nessuna vincita in caso contrario**

La scelta di *A* rispetto a *B* è coerente con la scelta di *C* rispetto a *D*, e viceversa. Infatti, se si indicano con *u* l'utilità prodotta dalla vincita, e con p_r, p_b e p_v le probabilità di estrarre, rispettivamente, una pallina rossa, una blu e una verde, si ha che chi sceglie *A* rispetto a *B* valuta che sia:

$$p_r \times u(1000) + (1 - p_r) \times u(0) \; > \; p_b \times u(1000) + (1 - p_b) \times u(0)$$

attribuendo un maggior valore all'utilità della vincita di 1000 rispetto all'utilità di nessuna vincita, cioè con $u(1000) > u(0)$.

Chi sceglie *C* rispetto a *D* valuta che sia:

$$p_r \times u(1000) + p_v \times u(1000) + p_b \times u(0) \; > \; p_b \times u(1000) + p_v \times u(1000) + p_r \times u(0)$$

Entrambe le diseguaglianze si semplificano in:

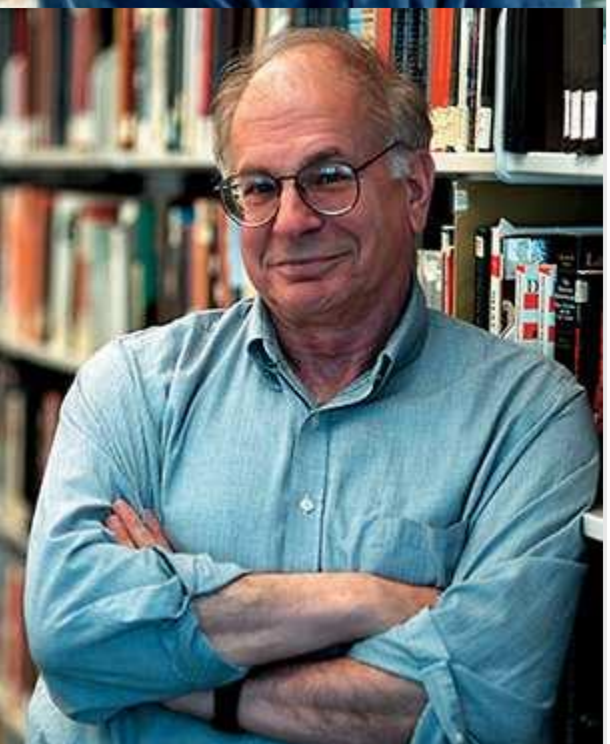
$$p_r > p_b$$

Gli individui intervistati sceglievano in maggioranza *A* rispetto a *B,* e sceglievano in maggioranza *D* rispetto a *C*, indipendentemente dal valore delle utilità *u* associato alle vincite, con evidente incoerenza rispetto a quanto prevede la teoria delle scelte razionali.

Il risultato non è il riflesso di alcuna propensione o avversione al rischio: tutte le scommesse proposte comportano infatti gli stessi rischi. L'esperimento mostra invece l'effetto della limitatezza dell'informazione disponibile al giocatore.

Allais. rischi uguali sono percepiti dagli individui in modi diversi e incoerenti, secondo come i rischi stessi vengono presentati.

Ellsberg. anche l'incertezza, non solo il rischio, comporta decisioni incoerenti. In condizioni di incertezza, gli individui compiono valutazioni del rischio in cui collegano il rischio a probabilità che di fatto sono sconosciute, secondo processi mentali che portano a risultati che sono incoerenti. Decisioni contraddittorie, sia perché queste sono effettuate in seguito a percezioni incoerenti del rischio noto, perché le probabilità sono note, (Allais), sia perché si basano su valutazioni incoerenti del rischio ignoto, perché le probabilità sono ignote (Ellsberg).



PROSPECT THEORY: AN ANALYSIS OF DECISION UNDER RISK
DANIEL KAHNEMAN; AMOS TVERSKY
Econometrica (pre-1986); Mar 1979; 47, 2; ABI/INFORM Global
pg. 263

PROSPECT THEORY: AN ANALYSIS OF DECISION UNDER RISK

BY DANIEL KAHNEMAN AND AMOS TVERSKY[1]

This paper presents a critique of expected utility theory as a descriptive model of decision making under risk, and develops an alternative model, called prospect theory. Choices among risky prospects exhibit several pervasive effects that are inconsistent with the basic tenets of utility theory. In particular, people underweight outcomes that are merely probable in comparison with outcomes that are obtained with certainty. This tendency, called the certainty effect, contributes to risk aversion in choices involving sure gains and to risk seeking in choices involving sure losses. In addition, people generally discard components that are shared by all prospects under consideration. This tendency, called the isolation effect, leads to inconsistent preferences when the same choice is presented in different forms. An alternative theory of choice is developed, in which value is assigned to gains and losses rather than to final assets and in which probabilities are replaced by decision weights. The value function is normally concave for gains, commonly convex for losses, and is generally steeper for losses than for gains. Decision weights are generally lower than the corresponding probabilities, except in the range of low probabilities. Overweighting of low probabilities may contribute to the attractiveness of both insurance and gambling.

1. INTRODUCTION

EXPECTED UTILITY THEORY has dominated the analysis of decision making under risk. It has been generally accepted as a normative model of rational choice [**24**], and widely applied as a descriptive model of economic behavior, e.g. [**15**, **4**]. Thus, it is assumed that all reasonable people would wish to obey the axioms of the theory [**47**, **36**], and that most people actually do, most of the time.

The present paper describes several classes of choice problems in which preferences systematically violate the axioms of expected utility theory. In the light of these observations we argue that utility theory, as it is commonly interpreted and applied, is not an adequate descriptive model and we propose an alternative account of choice under risk.

2. CRITIQUE

Decision making under risk can be viewed as a choice between prospects or gambles. A prospect $(x_1, p_1; \ldots; x_n, p_n)$ is a contract that yields outcome x_i with probability p_i, where $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$. To simplify notation, we omit null outcomes and use (x, p) to denote the prospect $(x, p; 0, 1-p)$ that yields x with probability p and 0 with probability $1-p$. The (riskless) prospect that yields x with certainty is denoted by (x). The present discussion is restricted to prospects with so-called objective or standard probabilities.

The application of expected utility theory to choices between prospects is based on the following three tenets.

(i) Expectation: $U(x_1, p_1; \ldots; x_n, p_n) = p_1u(x_1)+\ldots+p_nu(x_n)$.

[1] This work was supported in part by grants from the Harry F. Guggenheim Foundation and from the Advanced Research Projects Agency of the Department of Defense and was monitored by Office of Naval Research under Contract N00014-78-C-0100 (ARPA Order No. 3469) under Subcontract 78-072-0722 from Decisions and Designs, Inc. to Perceptronics, Inc. We also thank the Center for Advanced Study in the Behavioral Sciences at Stanford for its support.

Research Report

THE DISJUNCTION EFFECT IN CHOICE UNDER UNCERTAINTY

Amos Tversky[1] and Eldar Shafir[2]
[1]Stanford University and [2]Princeton University

Abstract—*One of the basic axioms of the rational theory of decision under uncertainty is Savage's (1954) sure-thing principle (STP) It states that if prospect* x *is preferred to* y *knowing that Event A occurred, and if* x *is preferred to* y *knowing that A did not occur, then* x *should be preferred to* y *even when it is not known whether A occurred We present examples in which the decision maker has good reasons for accepting* x *if A occurs, and different reasons for accepting* x *if A does not occur Not knowing whether or not A occurs, however, the decision maker may lack a clear reason for accepting* x *and may opt for another option We suggest that, in the presence of uncertainty, people are often reluctant to think through the implications of each outcome and, as a result, may violate STP This interpretation is supported by the observation that STP is satisfied when people are made aware of their preferences given each outcome*

Most decisions are made in the presence of uncertainty about their consequences, which may depend on the state of the economy, the outcome of an exam, or the toss of a coin Decision theorists have proposed a number of principles that purport to guide, and perhaps describe, the making of decisions under uncertainty One of the most basic principles of rational choice, which underlies expected utility theory as well as other models, was described by Savage as follows

> A businessman contemplates buying a certain piece of property He considers the outcome of the next presidential election relevant to the attractiveness of the purchase So, to clarify the matter for himself, he asks whether he would buy if he knew that the Republican candidate were going to win and decides that he would do so Similarly he considers whether he would buy if he knew that the Democratic candidate were going to win, and again finds that he would do so Seeing that he would buy in either event he decides that he should buy, even though he does not know which event obtains It is all too seldom that a decision can be arrived at on the basis of the principle used by this businessman but except possibly for the assumption of simple ordering I know of no other extralogical principle governing decision that finds such ready acceptance (Savage 1954, p 21)

Savage went on to define this principle formally If x is preferred to y knowing that event A obtained, and if x is preferred to y knowing that A did not obtain, then x should be preferred to y even when it is not known whether A obtained This rule, which Savage called the *sure-thing principle* (henceforth STP), has a great deal of both normative and descriptive appeal Nevertheless, this principle does not always hold, especially when the decision maker has different reasons for making the same decision in different states of the world, as illustrated in the following example

PAYING TO KNOW

Disjunctive Version

Imagine that you have just taken a tough qualifying examination It is the end of the fall quarter, you feel tired and run-down, and you are not sure that you passed the exam In case you failed you have to take the exam again in a couple of months—after the Christmas holidays You now have an opportunity to buy a very attractive 5-day Christmas vacation package to Hawaii at an exceptionally low price The special offer expires tomorrow, while the exam grade will not be available until the following day Would you

x	buy the vacation package	32%
y	not buy the vacation package	7%
z	pay a $5 nonrefundable fee in order to retain the rights to buy the vacation package at the same exceptional price the day after tomorrow—after you find out whether or not you passed the exam	61%

Sixty-six subjects were presented with this problem, which was presented in written form in a classroom setting, as were all the problems discussed in this article The respondents were undergraduate students at Stanford University, with about an equal number of men and women The percentage of subjects who chose each option appears on the right Two additional versions of the above problem, called Pass and Fail, were presented to two different groups of 67 subjects each These two versions differed only in the passage in brackets

Pass/Fail Version

Imagine that you have just taken a tough qualifying examination It is the end of the semester, you feel tired and run-down, and you find out that you [passed the exam/failed the exam You will have to take it again in a couple of months—after the Christmas holidays] You now have an opportunity to buy a very attractive 5-day Christmas vacation package to Hawaii at an exceptionally low price The special offer expires tomorrow Would you

		Pass	Fail
x	buy the vacation package	54%	57%
y	not buy the vacation package	16%	12%
z	pay a $5 nonrefundable fee in order to retain the rights to buy the vacation package at the same exceptional price the day after tomorrow	30%	31%

As shown, more than half of the students chose the vacation package when they knew that they passed the exam, and a slightly larger percentage chose the vacation when they knew that they failed However, when students did not

Address correspondence to Amos Tversky, Department of Psychology, Building 420, Stanford University, Stanford, CA 94305

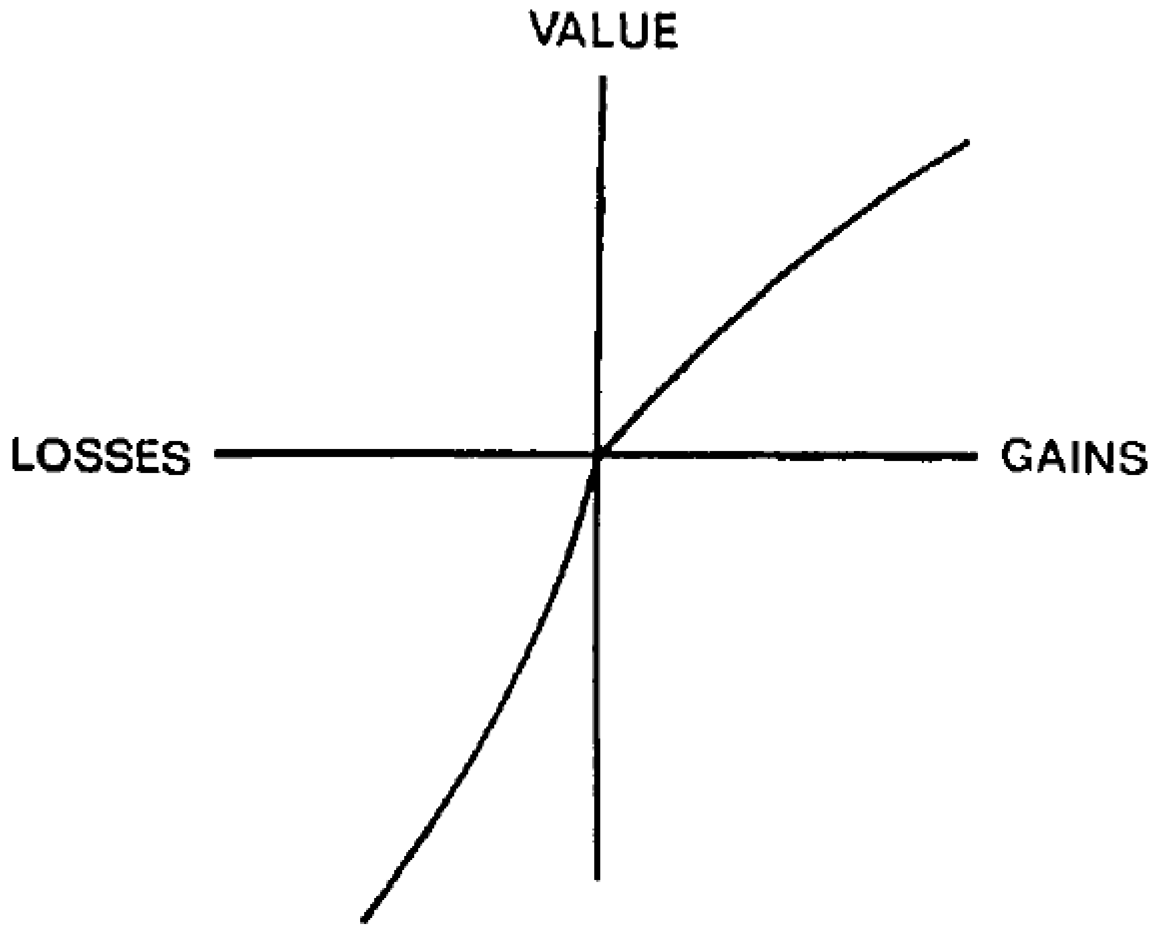


FIGURE 3.—A hypothetical value function

Kahneman e Tversky, 1979, *Prospect Theory: an Analysis of Decision under Risk*, p. 280

Violazione del Sure-Thing Principle

Amos Tversky e Eldar Shafir condussero un test, nel 1992, nel quale intervistarono tre gruppi di studenti, ponendo loro il seguente problema.

Il problema della vacanza alle Hawaii.

Hai appena dato un difficile esame, di cui NON sai ancora l'esito. Se sei stato bocciato, devi ridarlo fra due mesi, dopo le vacanze di Natale. Hai oggi l'opportunità di acquistare un viaggio alle Hawaii, per Natale, a un prezzo molto scontato: l'offerta scade domani, ma l'esito dell'esame sarà noto solo dopodomani. Hai la possibilità di prolungare l'offerta fino a dopodomani, versando OGGI una caparra di 5 $.

Che cosa decidi (Gruppo 1, 66 studenti): *1) Compri subito il viaggio e vai in vacanza?*
2) NON compri il viaggio?
3) Paghi 5 $ e rimandi la decisione a quando sarà noto il risultato dell'esame?

La stessa domanda è stata posta anche a:

Gruppo 2 (67 studenti), ai quali era stato comunicato di aver superato l'esame

Gruppo 3 (67 studenti), ai quali era stato comunicato di NON aver superato l'esame.

	Esito dell'esame NON noto
Comprare subito il viaggio	scelta dal 32%
Rinunciare all'acquisto del viaggio	scelta dal 7%
Pagare 5 $ per mantenere il diritto di acquistare il viaggio allo stesso prezzo scontato dopodomani, una volta noto il risultato dell'esame	scelta dal 61%

	Esame superato	Esame fallito
Comprare subito il viaggio	scelta dal 54%	scelta dal 57%
Rinunciare all'acquisto del viaggio	scelta dal 16%	scelta dal 12%
Pagare 5 $ per mantenere il diritto di acquistare il viaggio allo stesso prezzo scontato dopodomani	scelta dal 30%	scelta dal 31%

Il risultato è una violazione del *Sure-Thing Principle*. I soggetti scelgono in maggioranza l'opzione (1) (comprare il viaggio) se sanno di aver passato l'esame, e anche se sanno di NON averlo passato. Quindi l'esito dell'esame è ininfluente. Ma scelgono in maggioranza l'opzione (3) (aspettare) se l'esito dell'esame NON è noto.

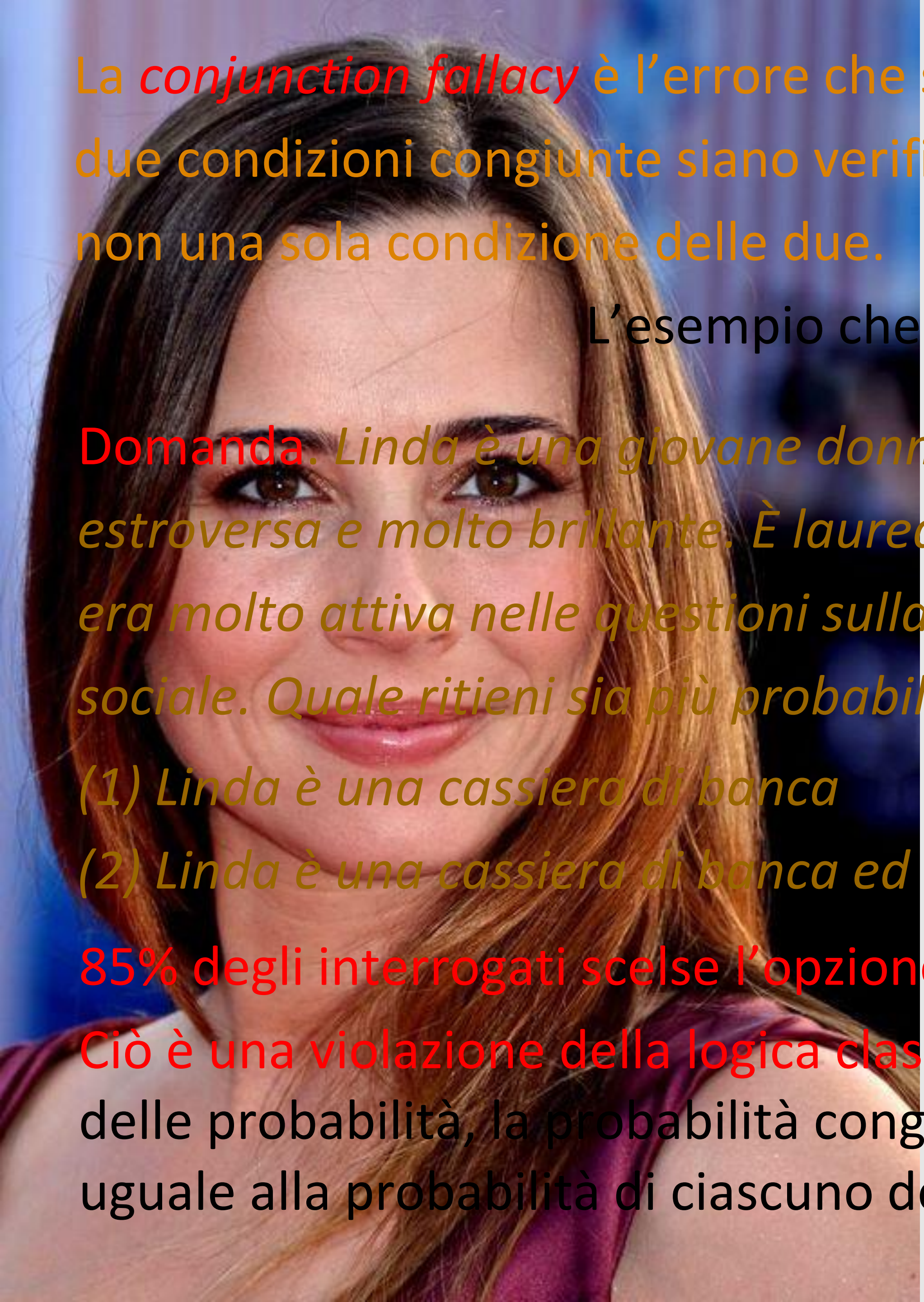
La causa della violazione è l’avversione all’incertezza (Tversky e Shafir). L’incertezza limita l’acutezza mentale: gli individui pensano più alle ragioni per effettuare una scelta o l’altra, e sulla loro mancanza, che non alla scelta stessa. Serve un motivo che giustifichi la decisione!

- Se l’esame è stato superato, i soggetti scelgono in maggioranza di comprare il viaggio perché lo considerano un premio.

- Se l’esame NON è stato superato, i soggetti scelgono in maggioranza di comprare il viaggio, perché lo considerano una consolazione prima di riprendere lo studio.

Ma in mancanza di informazione sull’esito dell’esame (incertezza), non c’è né un motivo né l’altro per scegliere di comprare il viaggio, quindi si sospende la decisione.

Effetto disgiunzione: la scelta non dipende dalle circostanze poste (in logica è ‘*OR*’, in insiemistica è ‘*unione*’).



La *conjunction fallacy* è l'errore che si commette quando si valuta che due condizioni congiunte siano verificate con maggior probabilità che non una sola condizione delle due.

L'esempio che segue è di Tversky e Kahneman.

Domanda: *Linda è una giovane donna di 31 anni, non sposata, estroversa e molto brillante. È laureata in filosofia. Da studentessa, era molto attiva nelle questioni sulla discriminazione e sulla giustizia sociale. Quale ritieni sia più probabile fra le due opzioni seguenti?*

(1) Linda è una cassiera di banca

(2) Linda è una cassiera di banca ed è attiva nei movimenti femministi

85% degli interrogati scelse l'opzione (2).

Ciò è una violazione della logica classica. In base alla teoria classica delle probabilità, la probabilità congiunta di due eventi è minore o uguale alla probabilità di ciascuno dei due eventi singolarmente.

Congiunzione e disgiunzione in psicologia? Ma che cosa sono?

Fenomeni chiamati disgiunzione e congiunzione in psicologia non erano nuovi all’epoca dei lavori di Tversky e Shafir.

Fin dalle fondamentali ricerche Eleanor Rosch, che negli anni Settanta introdusse in psicologia cognitiva la teoria dei prototipi, gli scienziati cognitivi hanno considerato l’appartenenza di un oggetto a una categoria concettuale non un semplice SI/NO, ma come una grandezza sfumata che può assumere un insieme di valori. L’appartenenza (la rilevanza) di un oggetto (un *item*) a un concetto è quantificata da un peso.

In una serie di ricerche condotte sul gruppo di popolazioni Dani a Papua, Nuova Guinea occidentale, Rosch (1973) osservò che nella categorizzazione di un oggetto o esperienza della vita quotidiana, gli individui si affidano più a un confronto del dato oggetto (o della data esperienza) con ciò che essi ritengono essere meglio rappresentativo di una particolare categoria, che non ad astratte definizioni delle categorie stesse.

La teoria dei prototipi costituì un radicale allontanamento dalle tradizionali condizioni necessarie e sufficienti della logica aristotelica, che condusse a nuovi approcci di tipo semantico alla teoria degli insiemi.

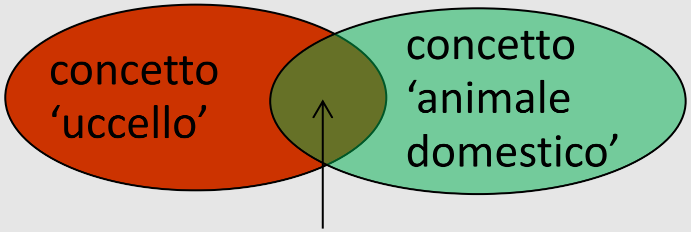
Negli anni Ottanta, lo psicologo inglese James Hampton condusse una serie di esperimenti su soggetti intervistati, che mirava a misurare la deviazione delle appartenenze percepite di un oggetto a coppie di concetti, rispetto a quanto previsto dall'insiemistica classica.

L'indagine fu ispirata a Hampton dal cosiddetto effetto guppi (*guppy effect*) , evidenziato qualche anno prima da Osherson e Smith.

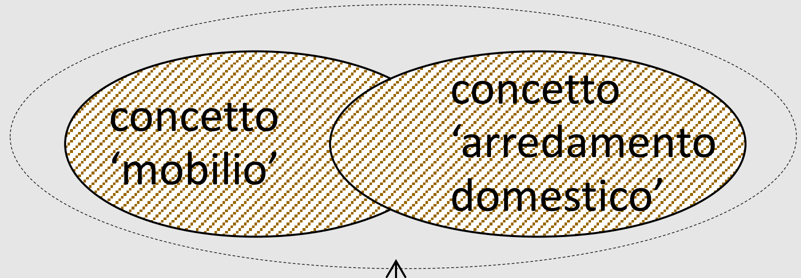
Osherson e Smith avevano osservato, nei test condotti, che l'elemento 'guppi' era considerato essere molto tipico per la congiunzione dei concetti 'animale domestico AND pesce', ma che NON era considerato molto tipico né per il concetto di 'pesce' né per il concetto di 'animale domestico' presi singolarmente.

Il fenomeno per cui la tipicalità di un *item* per una congiunzione (intersezione) di concetti è percepita maggiore di una o entrambe le tipicalità per ciascuno dei costituenti della congiunzione divenne noto come 'effetto guppi'.

Un esempio di congiunzione (AND) con sovraestensione (*overextension*), e un esempio di disgiunzione (OR) con sottoestensione (*underxtension*) (Hampton (1988):



congiunzione di concetti (intersezione)
'uccello' AND 'animale domestico'



disgiunzione di concetti (unione)
'mobilio' OR 'arredamento domestico'

Concetti	**Tipicalità (rating) di 'cucù'**
'uccello'	1
'animale domestico'	0,575
'uccello AND animale domestico'	0,842

overextension

Concetti	**Tipicalità (rating) di 'posacenere'**
'mobilio'	0,3
'arredamento domestico'	0,7
'mobilio OR arredamento domestico'	0,25

underextension

Un’importante considerazione

Riassumiamo. In psicologia sperimentale si osservano continuamente fenomeni di allontanamento dalla razionalità classica della scelta (o logica classica, o insiemistica classica e fuzzy).

Ad esempio, come abbiamo visto:

- la congiunzione (*AND, intersezione*) di concetti, che dà origine a *overextension*
- la disgiunzione (*OR, unione*) di concetti, che dà origine a *underextension*

La congiunzione e la disgiunzione di concetti sono un problema fondamentale della modellizzazione della combinazione di concetti nelle scienze cognitive, tuttora è irrisolto nell’ambito delle esistenti teorie dei concetti, come la teoria dei prototipi.

Questi due (così come anche altri) fenomeni psicologici segnalano l’emergenza di un concetto totalmente nuovo, che nasce dall’interferenza fra concetti che si forma nella nostra mente e che è all’origine delle violazioni della razionalità osservate.

La proposta

Le osservazioni di violazione della razionalità sono molte e ripetute. Manca una teoria psicologica che le giustifichi in qualche modo o che anche solo le descriva. A maggior ragione, è sentita la necessità di un modello matematico che le descriva e permetta qualche forma di previsione, superando i vincoli della logica classica.

Perché non utilizzare le tecniche matematiche della fisica quantistica (NON la fisica quantistica in sè!) per descrivere l'interferenza di concetti, come avviene per l'interferenza di elettroni singoli nell'esperimento della doppia fenditura?

Tale approccio è detto '*quantum-like*'.

È comunemente accettato che la coscienza e l'attività mentale siano correlate al comportamento del cervello materiale. La teoria quantistica è la più fondamentale teoria della materia disponibile, si fonda su postulati diversi da quelli della fisica classica, e utilizza con grande efficacia un apparato matematico e probabilistico specifico per descrivere fenomeni che l'apparato matematico e probabilistico della fisica classica non riesce a descrivere, ad esempio l'esperimento della doppia fenditura con elettroni.
Ci si può chiedere se la teoria quantistica possa essere uno strumento che aiuti la comprensione dei fenomeni attinenti la sfera psicologica dei processi cognitivi.

L'elemento epistemologico nuovo che la teoria quantistica ha introdotto e che risulta di rilievo per le problematiche connesse al legame mente-materia è il nuovo concetto di probabilità, che non indica più semplicemente l'ignoranza o l'incapacità di dare una descrizione dettagliata, ma diventa una caratteristica essenziale dei processi naturali, NON il livello della conoscenza che ne abbiamo.

Dagli anni Novanta sono in corso studi teorici, condotti prevalentemente (ma non solo) da parte di fisici, che mirano a fornire una descrizione matematica dei fenomeni legati alla congiunzione e alla disgiunzione dei concetti, facendo riferimento all'interferenza quantistica e utilizzando i metodi della fisica quantistica.

Prendere spunto dalla fisica quantistica NON significa resuscitare il fisicalismo ottocentesco. NON si propone che il cervello e l'individuo siano descrivibili come oggetti quantistici.
Non ci sono elementi empirici a supporto di questa concezione.

Tale posizione ripeterebbe gli errori metodologici compiuti in passato, p. es. dalla teoria economica neoclassica che trattò l'agente economico (in generale l'individuo che sceglie, decide e agisce) come un oggetto meccanico, guidato da leggi ispirate alla meccanica classica, prima fra tutte dal principio di minima azione.

Quali indicazioni suggeriscono di associare processi cognitivi e metodi quantistici

Il giudizio non è una mera lettura di uno stato esistente, ma è costruito a partire dalla domanda posta e dallo stato cognitivo creato dal contesto corrente.

Trarre una conclusione da un giudizio cambia il contesto, ciò a sua volta disturba lo stato del sistema cognitivo.

Cambiamenti nel contesto e nello stato prodotto da un primo giudizio influiscono su un giudizio successivo, producendo ulteriori effetti.

Da ciò segue che i giudizi umani non sono commutativi. Le violazioni della commutatività conducono a tipi di giudizio che, secondo la teoria classica delle probabilità, sono errori.

Una (possibile) analogia con la fisica quantistica viene se poniamo la corrispondenza fra ‘formulazione di un giudizio sulla probabilità (soggettiva!)’ e ‘misurazione’, e fra ‘sistema cognitivo’ e ‘sistema fisico’.

Osservazioni di non commutatività nella psicologia cognitiva, e di contestualità o di effetti di ordinamento dei giudizi umani suggeriscono che la probabilità classica sia troppo limitata per consentire di comprendere gli aspetti cognitivi umani.

Nel pensiero umano si possano distinguere due livelli: quello della logica classica e quello intuitivo-associativo (pensiero quantistico-concettuale)

1. Il pensiero nel primo livello riceve forma da un processo di elaborazione concettuale sottostante razionale, secondo la logica classica.

2. Il pensiero nel secondo livello riceve forma dalla totalità degli elementi del paesaggio concettuale, che figurano come entità individuali anche quando sono combinazioni di altri concetti: qui ha luogo l'emergenza concettuale (nel primo livello, invece, combinazioni di concetti figurano come combinazioni classiche); le entità sono definite da grandezze come tipicalità, appartenenza, rappresentatività, preferenza, ecc. Non sono noti i meccanismi di questo livello intuitivo, associativo, irrazionale, essenzialmente indeterministico, con aspetti olistici, che è organizzato come pensiero logico, ma in una logica non classica. Una parte del pensiero in questo livello può forse essere modellizzata come un processo quantistico. È il livello del 'pensiero quantistico-concettuale'.

Una *research question* corrente è che almeno una parte sostanziale di questo secondo livello (il '*quantum-conceptual thought*'), possa essere modellizzata utilizzando strutture matematiche e probabilistiche del tipo di quelle applicate in fisica quantistica.

La *quantum cognition* è un ambito di ricerca emerso negli anni Novanta, nel quale si fa uso della base matematica della teoria quantistica per formalizzare modelli dei processi cognitivi che possano trovarsi in miglior accordo con i dati empirici del tipo degli esempi citati, e che abbiano un maggior potere esplicativo rispetto ai modelli basati sulla teoria classica delle probabilità.

Questa linea di ricerca è ben distinta dalla '*quantum-mind idea*': NON si basa sull'ipotesi che nei processi cerebrali e mentali vi sia 'qualcosa di quantistico'.
Il cervello NON è assunto come un oggetto quantistico.

Alcune Scuole in America e in Europa, perlopiù formate da fisici teorici, sviluppano ricerche di questo tipo (per esempio, la Linnaeus University a Växjö in Svezia; l'Indiana University negli USA; la Vrije University a Brussels, la Leicester University in Inghilterra, ecc.).

Un gran numero di articoli e libri vengono regolarmente pubblicati sulla *quantum cognition*. La ricerca mira a costruire uno schema teorico generale capace di superare i confini fra fisica teorica, psicologia, scienze cognitive, economia teorica e scienza dei sistemi.

Vari congressi internazionali specificamente dedicati alla *quantum cognition* si tengono regolarmente. Nel 2009 è stato dedicato alla *quantum cognition* un numero speciale del ***Journal of Mathematical Psychology*** (Vol. 53, n. 5).

L'idea guida e che la teoria della probabilità quantistica, che ammorbidisce gli assiomi classici della formalizzazione della probabilità di Kolmogorov, introducendo l'interferenza di probabilità, permetta di spiegare gli errori osservati nelle valutazioni soggettive della probabilità, fra i quali gli errori di congiunzione e di disgiunzione, cioè che si valutino probabilità (*Likely* vs. *Unlikely*):

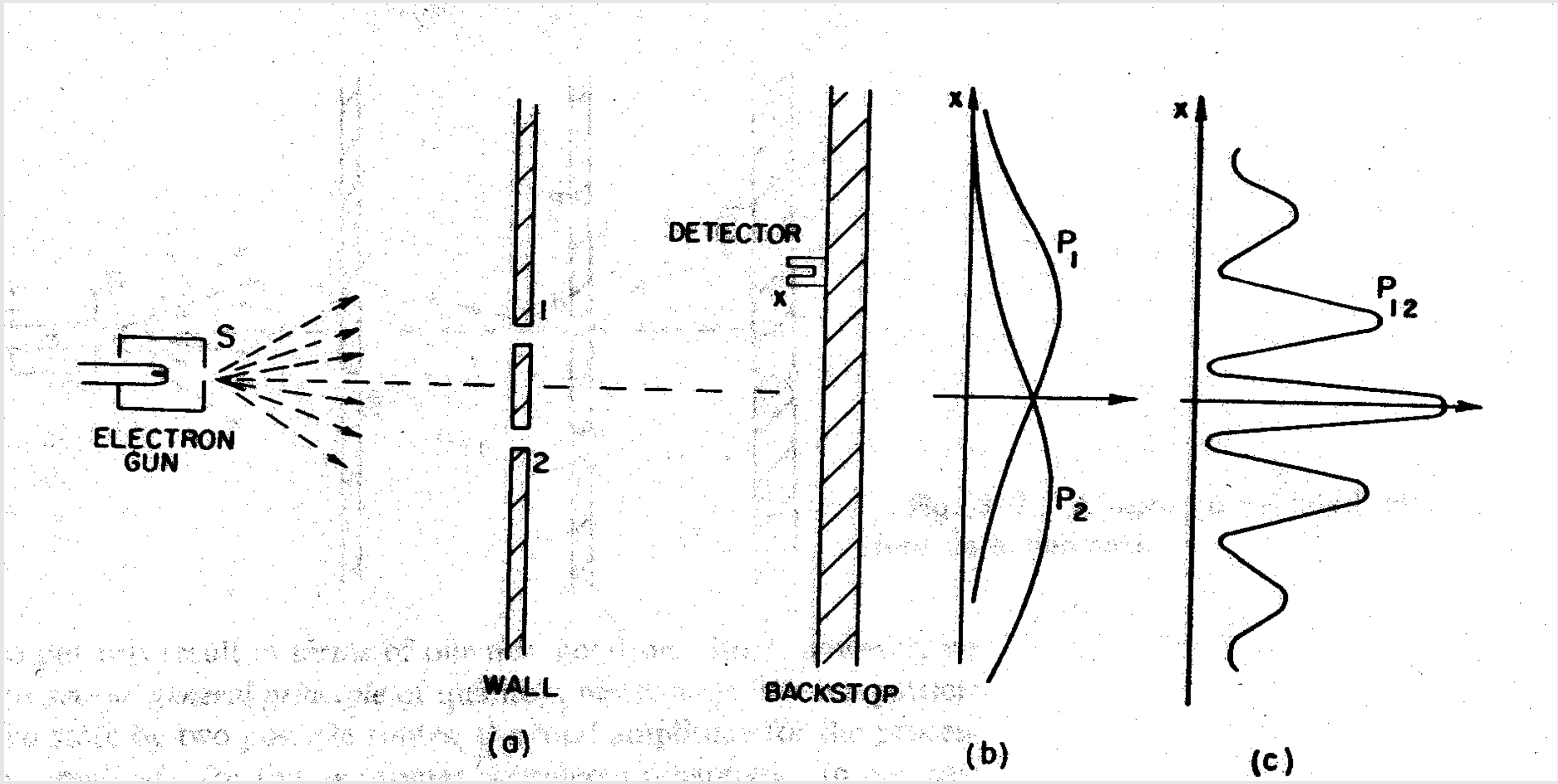
$$p(U) < p(L \cap U)$$

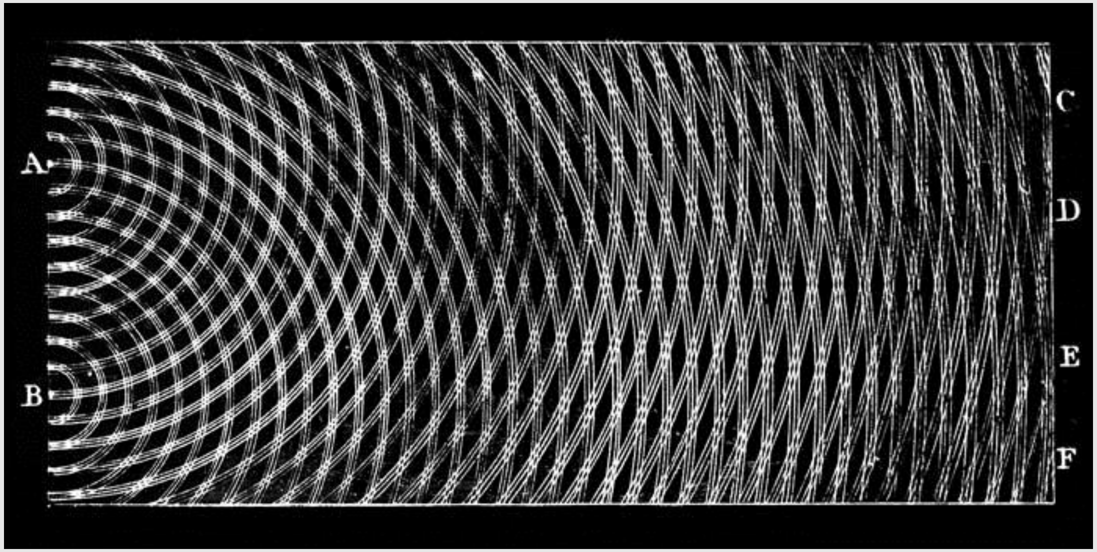
$$p(L) > p(L \cup U)$$

3. L’esperimento della doppia fenditura. Una breve digressione

Esperimento della doppia fenditura, interferenza ondosa

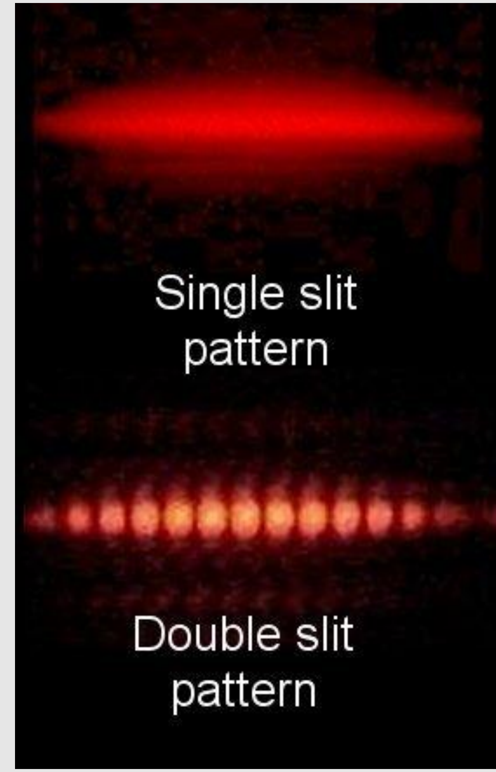
L'interferenza di probabilità, specifica della teoria quantistica, consente di interpretare i fenomeni di interferenza osservati in una enorme serie di esperimenti del tipo di quello, ben noto, della doppia fenditura.

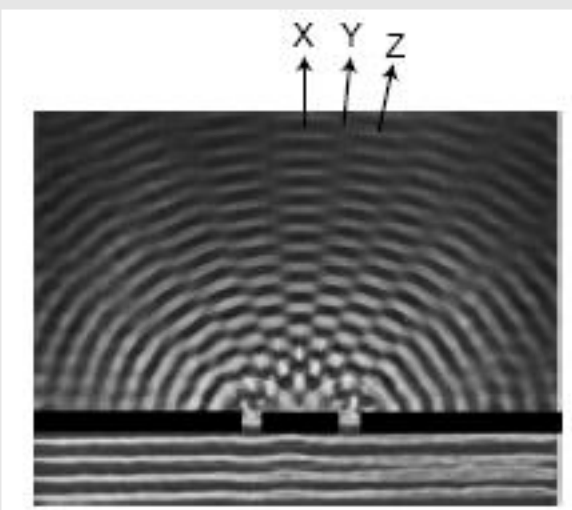


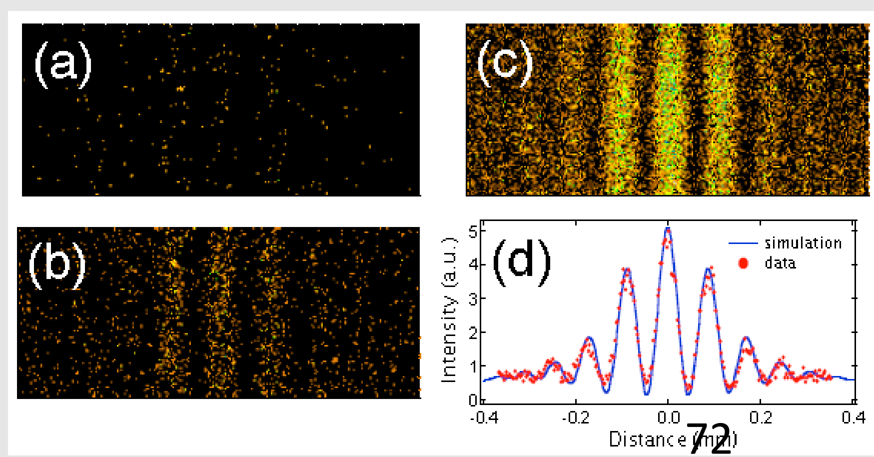


Sovrapposizione di onde superficiali in acqua e *pattern* di interferenza: disegno originale di Thomas Young , 1801 (sopra); fotografia moderna (sotto)

Interferenza di luce laser







Interferenza di singoli fotoni

Numerosi esperimenti hanno evidenziato da tempo il carattere corpuscolare e ondulatorio della materia, previsto da Louis de Broglie, a cominciare dall'esperimento di Davisson e Germer del 1927.
Molto più difficile era realizzare un vero esperimento della doppia fenditura simile a quello di Young con la luce, con elettroni

Dopo vari decenni di grande sviluppo delle tecniche di microscopia elettronica, Merli, Missiroli e Pozzi (1976) per primi realizzarono un vero esperimento di interferenza della doppia fenditura con elettroni singoli (1 e ogni 0,04 s circa), presso il laboratori del CNR di Bologna, nel 1974 (l'esperimento più bello della fisica, secondo un sondaggio di *Physics World* del 2002).

Lo stesso tipo di interferenza osservata con i fotoni è stata poi evidenziata in numerosi altri esperimenti anche con altre particelle, come protoni e molecole.

Giulio Pozzi, Gian Franco Missiroli e Piergiorgio Merli

Una successo della ricerca italiana.

Nel mese di Maggio del 1974, i fisici italiani Pier Giorgio Merli, dell'Istituto LAMEL (ora Istituto per la Microelettronica e Microsistemi) del CNR di Bologna, Gian Franco Missiroli e Giulio Pozzi, dell'Istituto di Fisica dell'Università di Bologna, inviarono un articolo di due pagine all'*American Journal of Physics,* intitolato *On the Statistical Aspect of Electron Interference Phenomena*, che fu pubblicato nel n. 44 della rivista, nel mese di Marzo del 1976.

La fondamentale importanza dell'esperimento della doppia fenditura di Merli, Missiroli e Pozzi, fu che permise l'osservazione dell'arrivo continuo sulla lastra fotografica di elettroni singoli, con il graduale formarsi delle frange di interferenza per il prolungato accumulo di singoli impatti elettronici.

Con Lucio Morettini e Dario Nobili, gli autori produssero un filmato in 16 mm, *Interferenza di elettroni*, nel quale è visibile la formazione delle frange, punto dopo punto, per i successivi arrivi di singoli elettroni sullo schermo del microscopio elettronico (il filmato, ricevette il primo premio alla *Physics Section* del *VII Scientific and Technical Cinema Festival in Brussels*, nel 1976) (https://www.bo.imm.cnr.it/users/lulli/downintel/)

On the statistical aspect of electron interference phenomena

P. G. Merli
CNR–LAMEL, Bologna, Italy

G. F. Missiroli and G. Pozzi
CNR–GNSM, Istituto di Fisica, Laboratorio Microscopia Elettronica, Bologna, Italy
(Received 29 May 1974; revised 17 October 1974)

In a recent paper,[1] hereafter called I, two of the present authors have described how to perform—for instructional purposes—an experiment on electron interference by using a standard electron microscope.

In this short note we wish to show in a very impressive way that the complete interference pattern we registered on the photographic plate is really the sum of many independent events, each due to the interaction between a single electron and the interference apparatus. This was deduced in I with a simple and realistic calculation based on the main assumption that electrons were emitted at a constant rate from the gun filament. In the present case this result is shown not from a calculation but from direct observation. In fact, the experiment performed in I has been repeated on a Siemens Elmiskop 101 equipped with a TV image intensifier.[2,3]

With regard to the formerly described setup, the Möllenstedt and Düker electron biprism[4] has been now inserted at the level of the selector aperture plane. The objective lens acts in this case as third condenser lens, thus increasing the coherence and versatility of the illuminating system, whereas the fringes are magnified on the final screen by means of the two projector lenses (cf. Fig. 4 in I). If the coherence condition is satisfied, it is possible to register on a photographic plate an intereference fringe pattern with spacing above 300 μm as shown in Fig. 1(f). The exposure time of the photographic plate lies in a range between 10 and 100 sec. By the same electron optical conditions, however, the TV image intensifier allows the observation of the interference pattern directly on the monitor by means of the electrons stored in the SEC target of the TV tube[2,3] in a time of about 0.1 sec.

Figure 1(f), together with Figs. 1(a)–1(e), was filmed directly from the TV monitor. We note that the image on the screen was clearly visible, as in normal TV transmission, and that by varying the biprism potential we could follow, without difficulty, all the diffraction and interference phenomena described in I.

However, the most interesting performance that such a device offers is connected to the direct observation of the statistical process of fringe formation. It can easily be seen that, at low current density, the image is built up from the statistically distributed light flashes of individual electrons, as is shown in the sequence of Figs. 1(a)–(f) registered at different current densities on the final screen.

The same result can be reached in another way that didactically is more illuminating in concept. In fact, we

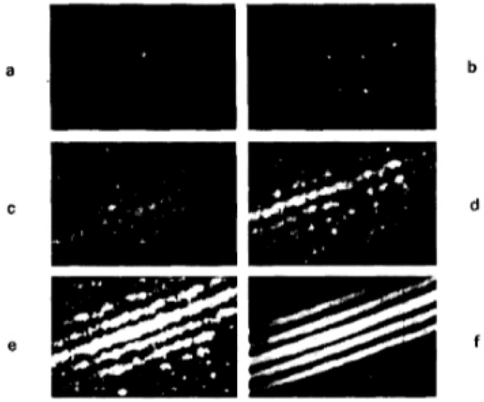


Fig. 1. (a–f) Electron interference fringe patterns filmed from a TV monitor at increasing current densities.

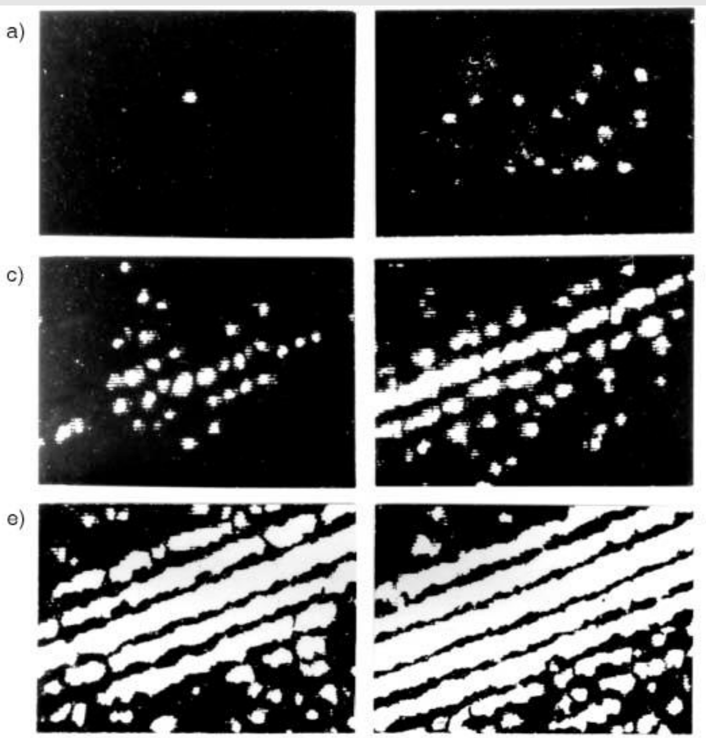
can operate with a very low electron current density which corresponds, on the average, to one or a few electrons arriving on the final screen in 0.04 sec [see Fig. 1(a)]. This is the lowest storage time available with the TV tube. While the electron optical conditions are kept constant, the storage time, which plays the same role as the exposure time of the photographic plate, can be increased step-by-step up to values of minutes. It can be verified that the image is gradually "filled" by the electrons until the shot noise vanishes completely.

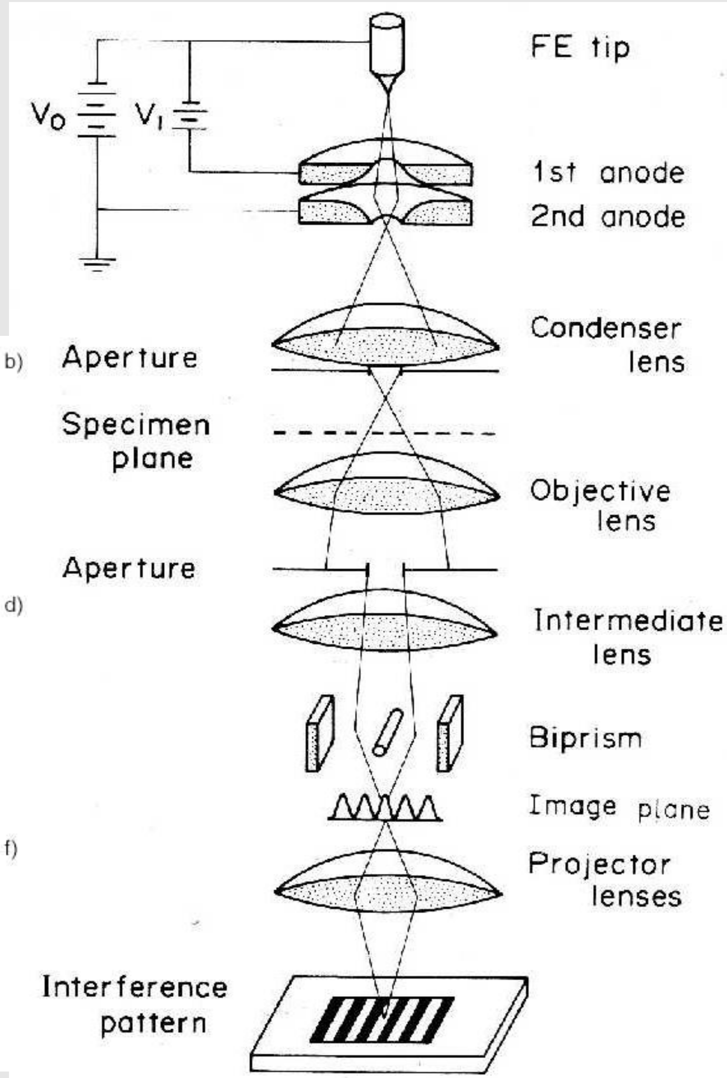
We believe these results will be of great help to students by demonstrating to them, in an experimental form, the wave behavior of electrons and their statistical interpretation. Moreover, the whole apparatus is particularly valuable for student demonstrations in that the image can be directly seen by a large number of viewers and can possibly be recorded on video tape.

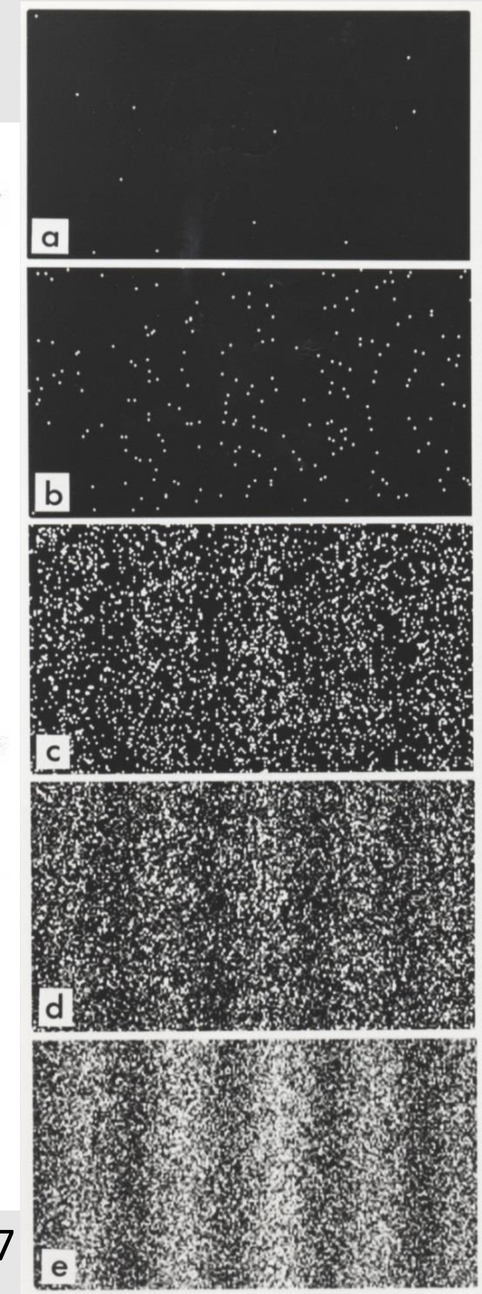
Acknowledgments. The authors are grateful to Professor Angelo and Professor Aurelio Bairati of the Istituto di Anatomia Umana of Milan for their kind permission to work with an electron microscope equipped with an image intensifier, to Dr. G. Boninsegna of the Siemens Italia S.p.A. for his technical assistance, and to Dr. L. Morettini for his cinematographic assistance.

[1]O. Donati, G. F. Missiroli, and G. Pozzi, Am. J. Phys. **41**, 639 (1973).
[2]K. H. Herrmann, D. Krahl, A. Kübler, and V. Rindfleisch, Siemens Rev. **36**, 6 (1969).
[3]K. H. Herrmann, D. Krahl, A. Kübler, R. H. Müller, and V. Rindfleisch, in *Electron Microscopy in Material Science*, edited by U. Valdrè (Academic, New York, 1971), pp. 237–272.
[4]G. Möllenstedt and H. Düker, Naturwissenschaften **42**, 41 (1954).

Il *double-slit experiment* con elettroni fu ripetuto nel 1981 da Tonomura *et al.* ai Laboratori Hitachi presso Tokio, con gli stessi principi esecutivi, ma con tecniche migliorate, con risultati analoghi.







Nell’interpretazione che Merli, Missiroli e Pozzi danno del loro esperimento, l’interferenza è fatta derivare dall’interazione del singolo elettrone con il dispositivo di misura. In tal modo il comportamento duale onda-corpuscolo non sarebbe più una proprietà intrinseca dell’elettrone, bensì una proprietà di relazione di quest’ultimo con lo strumento di misura.

Nota. Si può concludere che Merli, Missiroli e Pozzi siano propensi ad aderire, più che non all’interpretazione della complementarità di Bohr, a una sua variante vicina alla reinterpretazione della meccanica quantistica della filosofia della scienza sovietica, sviluppata durante il dibattito cominciato negli anni Cinquanta, da filosofi, come Mikhail Erazmovič Omelyanovskij, da fisici, come Vladimir Aleksandrovič Fock, Dmitrij Ivanovič Blokhintsev e Yakov Petrovič Terletskij, e altri ancora. Tale reinterpretazione nella prospettiva del materialismo dialettico fu fatta propria e diffusa in Italia da Ludovico Geymonat e da Silvano Tagliagambe.

4. Un minimo di formalismo matematico

Il principio di sovrapposizione di due onde ‘afferma’ (osserva nei fatti e ne costruisce una teoria matematica adatta) che in un dato punto due onde si sovrappongono sommando le proprie ampiezze, funzioni del tempo e dello spazio:

$$U(r,t) = A_1(r)e^{i[\varphi_1(r)-\omega t]} + A_2(r)e^{i[\varphi_2(r)-\omega t]}$$

In ottica, l’intensità luminosa percepita I è proporzionale al quadrato dell’ampiezza dell’onda A. In una interferenza fra due onde luminose, come nel caso della doppia fenditura, l’intensità luminosa percepita in un dato punto (integrata nel tempo) è:

$$I(r) = \int U(r,t)^* U(r,t)\,dt =$$

$$= \int \left(A_1(r)e^{-i(\varphi_1(r)-\omega t)} + A_2(r)e^{-i(\varphi_1(r)-\omega t)}\right)\left(A_1(r)e^{+i(\varphi_1(r)-\omega t)} + A_2(r)e^{+i(\varphi_1(r)-\omega t)}\right)dt = \ldots$$

... e dopo qualche semplificazione, utilizzando la formula di Eulero $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$I(r) = I_1(r) + I_2(r) + 2\sqrt{I_1(r)I_2(r)}\cos[\varphi_1(r) - \varphi_2(r)]$$

Compare il termine coseno della differenza fra le fasi, che esprime l’interferenza.

Uno degli assiomi fondamentali della teoria quantistica, è che lo stato di una particella quantistica è completamente descritto da una funzione d'onda che in ogni punto dello spazio e in ogni istante ha un valore in campo complesso, la quale può essere scritta nella forma:

$$\psi(x,t) = |\psi(x,t)| e^{iS(x,t)}$$

Poiché si tratta di onde, che sono soluzioni di un'equazione differenziale lineare, l'equazione di Schrödinger, sussiste il principio di sovrapposizione delle soluzioni, cioè se ψ_A e ψ_B sono entrambe soluzioni dell'equazione lineare, anche una loro qualsiasi combinazione lineare è essa stessa una soluzione.

La probabilità di trovare una particella nel punto *x* al tempo *t*, come è noto, è data, secondo i fondamenti della meccanica quantistica, dal modulo quadrato dell'ampiezza di probabilità (Max Born):

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi$$

Con due onde sovrapposte, questa diventa (con qualche passaggio, in cui si trasformano gli esponenziali in campo complesso, utilizzando nuovamente la formula di Eulero $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$):

$$p_{AB}(x,t) = |\psi_A(x,t) + \psi_B(x,t)|^2 =$$

$$= |\psi_A(x,t)|^2 + |\psi_B(x,t)|^2 + 2\cos(S_A - S_B)|\psi_A(x,t)||\psi_B(x,t)|$$

In meccanica quantistica si sommano funzioni d'onda (ampiezze di probabilità) per ottenere, dopo averne quadrato la somma, la probabilità totale. Compare il termine coseno: l'interferenza delle probabilità. Come accade in ottica.

Ciò costituisce una violazione della probabilità classica (assiomatizzazione di Kolmogorov, 1931) , dove la probabilità totale di due eventi *A* e *B* è data da:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Se gli eventi siano disgiunti (o *A* o *B*, mai *A* e *B* insieme), diventa:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Nel caso quantistico, la probabilità totale diventa invece (in generale) del tipo:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) + 2\cos\varphi\sqrt{p(A)p(B)}$$

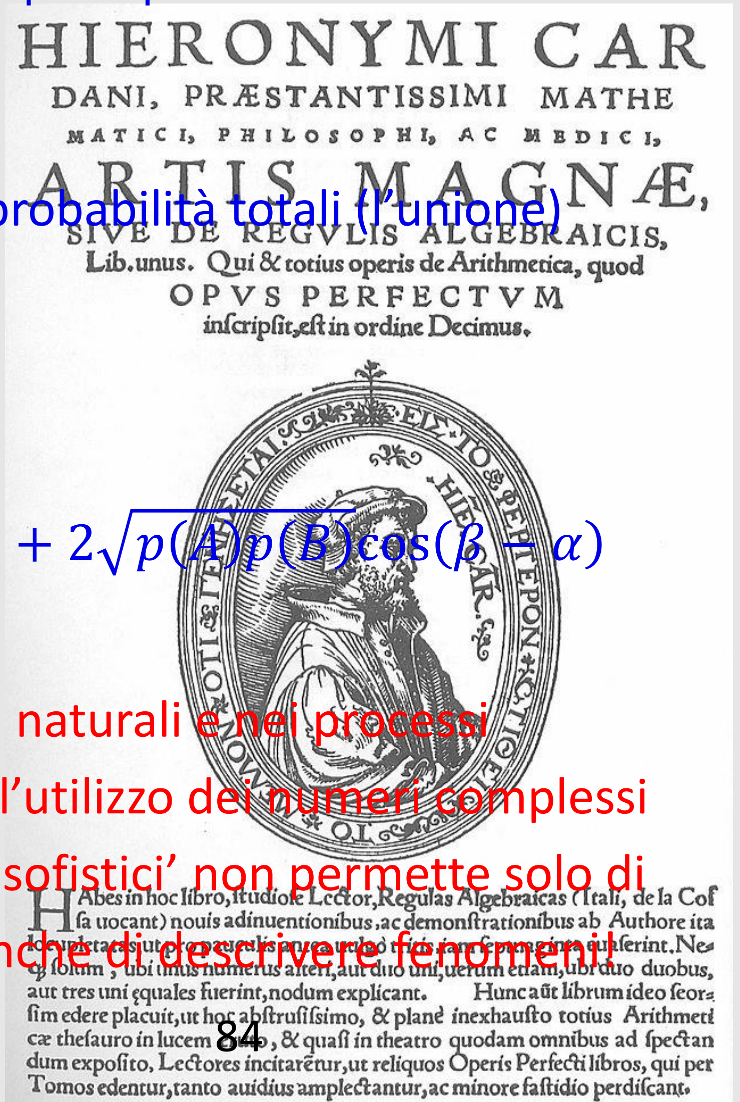
Un'importante (e ovvia) osservazione

Consideriamo due numeri complessi $ae^{i\alpha}, be^{i\beta}$ tali che i loro moduli siano $a \leq 1$ e $b \leq 1$, e quindi i loro quadrati $\left|ae^{i\alpha}\right|^2 \leq 1$ $\left|be^{i\beta}\right|^2 \leq 1$ possano rappresentare delle probabilità $p(A)$ e $p(B)$.

Se 'lavoriamo' sui numeri complessi, la legge delle probabilità totali (l'unione) per eventi disgiunti comporta:

$$p(A \cup B) = \left(ae^{-i\alpha} + be^{-i\beta}\right)\left(ae^{+i\alpha} + be^{+i\beta}\right)$$
$$= a^2 + b^2 + abe^{i(\beta-\alpha)} + abe^{-i(\beta-\alpha)} =$$
$$= a^2 + b^2 + 2\cos(\beta - \alpha) = p(A) + p(B) + 2\sqrt{p(A)p(B)}\cos(\beta - \alpha)$$

L'interferenza di probabilità osservata nei fenomeni naturali e nei processi mentali, viene descritta (modellizzata) attraverso all'utilizzo dei numeri complessi di Cardano (1545). Il passaggio attraverso i 'numeri sofistici' non permette solo di trovare radici reali a equazioni di terzo grado, ma anche di descrivere fenomeni!


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib.unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cos sa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita ... solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & plane inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem ..., & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Un elemento nuovo: la probabilità contestuale

Per descrivere la congiunzione e la disgiunzione di concetti in psicologia, dove le variabili misurate si influenzano reciprocamente, secondo l'ordine della misurazione, ma non sono necessariamente incompatibili fra loro, Khrennikov introduce l'idea di supplementarità delle grandezze osservabili, associata al principio di complementarità di Bohr della meccanica quantistica ordinaria, ma senza la mutua esclusività, e della probabilità contestuale, in luogo delle probabilità congiunta e condizionale.

Per ogni osservabile *a* e il suo valore α, esiste un contesto *C* che corrisponde alla selezione del valore α , e che esprime il complesso delle condizioni fisiche o mentali della misurazione. Se compiamo una misurazione dell'osservabile *a* nel complesso delle condizioni *C*, allora otteniamo il valore a = α fra tutti i possibili valori con una certa probabilità.

Differenti contesti corrispondono a differenti spazi di misura, con i quali le osservabili misurate possono essere o non essere compatibili.

La probabilità contestuale differisce dalla probabilità condizionale del modello classico (kolmogoroviano) della probabilità, che è la probabilità che un evento *B* si verifichi sotto la condizione che un altro evento *C* si sia già verificato.

La probabilità contestuale è la probabilità di ottenere il risultato $b = \beta$ nel complesso delle condizioni fisiche *C*. Nell'approccio di Khrennikov, non è il verificarsi o meno di un evento a porre la condizione, come è per la probabilità condizionale, ma è anche il contesto in cui l'evento avviene ed è osservato a essere considerato come condizione preliminare.

In un dato contesto *C*, le osservabili *a* e *b* danno informazioni statistiche reciprocamente supplementari: qualsiasi misurazione di *a* fornisce informazioni che non sono state date dalle precedenti misurazioni di *b* e viceversa. Ciò significa che la distribuzione di probabilità contestuale dell'osservabile *b*, ad esempio, non può essere ricostruita sulla base della distribuzione di probabilità di *a*.

Le osservabili supplementari possono avere o non avere, una distribuzione congiunta di probabilità. Secondo Khrennikov, la supplementarità consente di considerare probabilità di tipo quantistico anche per sistemi fisici macroscopici e per sistemi cognitivi.

LE HAWAII...

...ci vado? ...non ci vado? ...mah!

5. Un esempio di applicazione: il problema delle Hawaii

Il problema delle Hawaii. Diederik Aerts ha costruito il modello quantistico che riproduce correttamente la *underextension* (pochi comprano il viaggio) osservata nella disgiunzione dei concetti *A*: ' esame passato' e *B*: 'esame NON passato'.

Utilizziamo la nozione di 'stato' di un oggetto della meccanica quantistica, definito da un vettore unitario in uno spazio vettoriale complesso, lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ e, come si fa in meccanica quantistica, associamo uno stato quantistico a ciascuno dei concetti *A* e *B,* lo 'stato di un concetto' (stato mentale) indicato con i vettori *ket* $|A\rangle$ e $|B\rangle$, ortogonali fra loro.

Indichiamo lo stato di disgiunzione di concetti (OR) come uno stato 'emergente' di sovrapposizione, combinazione lineare dei due stati di base, normalizzata:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|A\rangle + |B\rangle\right)$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|A\rangle + |B\rangle\right)\right|^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle A| + \langle B|\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|A\rangle + |B\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(\langle A|A\rangle + \langle B|B\rangle + 2\langle A|B\rangle\right) = \frac{1}{2}(1+1+0) = 1$$

L'utilizzo del vettore $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|A\rangle+|B\rangle\right)$ per modellizzare il concetto '*A* OR *B*' presenta il medesimo schema della modellizzazione nel formalismo quantistico dell'esperimento della doppia fenditura, riferito al passaggio dell'elettrone attraverso la fenditura *A* o la fenditura *B*, entrambe aperte. Quando non è misurato attraverso quale delle due fenditure l'elettrone è passato, questo è in uno stato di sovrapposizione dei due stati singoli 'passaggio attraverso *A*' e 'passaggio attraverso *B*'.

L'esperimento della doppia fenditura è una sorta di archetipo di riferimento nella teoria della meccanica quantistica, a cui si fa riferimento per descrivere con il formalismo quantistico i processi cognitivi e mentali. La meccanica quantistica descrive la situazione in cui entrambe le fenditure sono aperte usando la funzione d'onda (lo stato) definita dalla sovrapposizione normalizzata delle due funzioni d'onda (dei due stati), ciascuna delle quali descrive la situazione in cui una delle due fenditure è aperta e l'altra chiusa.

Per comprendere come mai la sovrapposizione possa descrivere anche la disgiunzione OR, è necessario precisare alcuni elementi.

Il primo è cosiddetto limite classico della meccanica quantistica, cioè la situazione in cui l'interferenza scompare. In tale limite, $p(A \text{ OR } B)$ si riduce alla media aritmetica fra le due probabilità: $\frac{1}{2}(p(A)+p(B))$.
Il limite classico non è né $\max(p(A), p(B))$, come ci si attenderebbe dalla disgiunzione secondo la teoria degli insiemi, né $p(A)+p(B)-p(A)p(B)$, come ci si attenderebbe dalla teoria assiomatica della probabilità, dove $p(A \text{ OR } B)$ è la probabilità totale.

La stessa disgiunzione nel limite classico $p(A \text{ OR } B)=\frac{1}{2}(p(A)+p(B))$ in generale non rispetta neppure le diseguaglianze previste dalla teoria classica della probabilità.

Operando l'esperimento con il lancio di una particella classica attraverso le due fenditure aperte, la probabilità di rivelare la particella in un dato punto sullo schermo collocato dietro le fenditure è proprio la media aritmetica delle due probabilità di rivelazione che si avrebbero con la sola fenditura *A* aperta e con la sola fenditura B aperta, come è previsto dal limite classico indicato.

Secondo le regole del calcolo quantistico, le quantità misurabili sono rappresentate da operatori hermitiani *M* nello spazio di Hilbert, i quali proiettano sui vettori di base, cioè i loro autovettori o autostati di base, lo stato di sovrapposizione precedente la misurazione, ottenendo un coefficiente per ciascuno degli autovettori di base, l'autovalore. Il quadrato di ciascuno degli autovalori dà la probabilità che la proiezione avvenga su quel particolare autostato (regola di Born).

Il proiettore *M* nello spazio di Hilbert è il corrispondente matematico dell'operazione fisica della misurazione di una grandezza, compiuta su un sistema quantistico in stato di sovrapposizione. Di quella grandezza possiamo conoscere, tramite le ripetute misurazioni effettuate con l'operatore di proiezione, solamente l'insieme degli autovalori, cioè dei coefficienti delle proiezioni che si ottengono sugli autostati, o autovettori, di base per quel dato operatore di proiezione *M.*

Noti gli autovalori, misurati nei test sotto forma di frequenze di risposte, a loro volta interpretate come probabilità, è possibile ricostruire, applicando a ritroso la regola di Born, lo spazio di Hilbert degli autovettori in cui alloggiare lo stato mentale prima della risposta alla domanda posta nel test (la quale provoca il collasso delle funzione d’onda), che modellizzi i fenomeni di violazione della razionalità classica osservati sotto la forma di *underextension*, nel caso della disgiunzione di concetti, come nel test di Tversky e Shafir sull’acquisto della vacanza alle Hawaii, e la *overextension*, nel caso della congiunzione di concetti, come nell’effetto guppi.

L’interferenza che si ha nel caso di una particella quantistica con le due fenditure aperte si aggiunge al termine classico, la media aritmetica delle due probabilità. Nel test delle Hawaii, i risultati ottenuti erano i seguenti:

$$p(A) = \langle A|M|A\rangle = 0{,}54 \qquad p(B) = \langle B|M|B\rangle = 0{,}57$$

$$p(A\,\mathrm{OR}\;B) = \frac{1}{2}\left(\langle A| + \langle B|\right)M\left(|A\rangle + |B\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle A|M|A\rangle + \langle B|M|B\rangle + \langle A|M|B\rangle + \langle B|M|A\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\langle A|M|A\rangle + \langle B|M|B\rangle + \langle A|M|B\rangle + \langle A|M|B\rangle^{*}\right)$$

Cioè (sviluppando i calcoli):

$$p(A\,\mathrm{OR}\;B) = \frac{1}{2}\left(p(A) + p(B)\right) \; + \; \mathrm{Re}\langle A|M|B\rangle = 0{,}32$$

Per la congiunzione AND opera la medesima interferenza fra concetti, che considera lo stato di sovrapposizione normalizzata $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|A\rangle + |B\rangle\right)$ all’origine, dal punto di vista matematico, dell’interferenza *quantum-like*, che sia essa costruttiva o che sia distruttiva. Per cui, si può scrivere una formula analoga anche per l’interferenza nella congiunzione di concetti.

Nel caso dei dati rilevati nei test da Tversky e Shafir, l'incoerenza delle scelte degli individui che le probabilità delle risposte evidenziano per la disgiunzione, viene così giustificata da Aerts con la costruzione di uno spazio di Hilbert dei concetti (i passaggi sono giustificati in Aerts, 2009).

$$|A\rangle = \left(\sqrt{p(A)},\ 0,\ \sqrt{1-p(A)}\right)$$

$$|B\rangle = e^{i\phi}\left(\sqrt{\frac{(1-p(A))(1-p(B))}{p(A)}},\ \sqrt{\frac{p(A)+p(B)-1}{p(A)}},\ -\sqrt{1-p(B)}\right)$$

$$\cos\phi = \frac{2p(A\,\mathrm{OR}\,B)-p(A)-p(B)}{2\sqrt{p(A)p(B)}}$$

Sostituendo i valori misurati da Tversky e Shafir, si ricava:

$$|A\rangle = (0{,}7348;\ 0;\ 0{,}6782)$$

$$|B\rangle = e^{i\phi}(0{,}6052;\ 0{,}4513;\ -0{,}6557)$$

$$\phi = 121{,}8967°$$

Si può dimostrare che, utilizzando questi valori e proiettando sul piano definito dai vettori $(1;0;0)$ e $(0;1;0)$, con *M* proiettore ortogonale su di esso degli stati mentali (*A* esame passato, *B* esame non passato, *A* OR *B* esito ignoto) definito nello spazio a tre dimensioni C^3, si riproducono i dati empirici misurati nel test da Tversky e Shafir:

$$p(A)=\langle A|M|A\rangle=(0{,}7348)^2=0{,}54$$

$$p(B)=\langle B|M|B\rangle=e^{-i\beta+i\beta}\left((0{,}6052)^2+(0{,}4513)^2\right)=0{,}57$$

$$\begin{aligned}p(A\,\mathrm{OR}\;B)&=\frac{1}{2}\left(p(A)+p(B)\right)+\mathrm{Re}\langle A|M|B\rangle=\\&=\frac{1}{2}(0{,}54+0{,}57)+\mathrm{Re}\left(0{,}7348\times0{,}6052\times e^{i121{,}8967^\circ}\right)=\\&=0{,}555+0{,}4447\cos121{,}8967^\circ=0{,}555-0{,}235=0{,}32\end{aligned}$$

Il termine interferenza, così costruito, è il termine che manca alla logica della razionalità classica per far coesistere in un quadro unico, coerente e non contraddittorio le tre probabilità misurate, $p(A)$, $p(B)$ e $p(A\,\mathrm{OR}\;B)$, le quali, in questo modo, trovano nella descrizione *quantum-like* dei processi cognitivi degli individui, una giustificazione ai loro valori apparentemente incoerenti.

Un esempio di congiunzione di concetti (AND) sviluppato da Aerts sui dati di Hampton

I dati misurati

		Tipicalità medie misurate (probabilità)				*Valori calcolati*	
		$p(A)_k$	$p(B)_k$	$p(A \text{ AND } B)_k$	$\frac{p(A)_k + p(B)_k}{2}$	λ_k	ϕ_k
1	*Filing cabinet*	0,079	0,040	0,062	0,059	-0,056	-87,61°
2	*Clothes washer*	0,026	0,118	0,078	0,072	0,055	84,01°
3	*Vacuum cleaner*	0,017	0,118	0,051	0,068	-0,042	-112,21°
4	*Hifi*	0,056	0,079	0,090	0,067	0,063	70,58°
5	*Heated waterbed*	0,089	0,050	0,082	0,070	-0,066	-79,28°
6	*Sewing chest*	0,075	0,058	0,061	0,067	0,066	94,74°
7	*Floor mat*	0,052	0,023	0,031	0,037	-0,034	-100,87°
8	*Coffee table*	0,100	0,025	0,050	0,062	0,048	104,78°
9	*Piano*	0,084	0,020	0,043	0,052	0,040	101,67°
10	*Rug*	0,056	0,019	0,028	0,037	0,031	106,58°
11	*Painting*	0,057	0,014	0,021	0,035	-0,024	-120,16°
12	*Chair*	0,099	0,030	0,047	0,065	-0,052	-109,41°
13	*Fridge*	0,042	0,117	0,085	0,079	0,070	85,23°
14	*Desk lamp*	0,066	0,079	0,085	0,072	-0,071	-79,85°
15	*Cooking stove*	0,037	0,118	0,088	0,078	-0,066	-81,57°
16	*TV set*	0,065	0,092	0,099	0,078	0,075	61,89°
	Totali	1,000	1,000	1,000	1,000		

Lo spazio C^{17} costruito

Componenti di $\lvert A\rangle$	*Componenti di* $\lvert B\rangle$
0,280	$0{,}200e^{-i87{,}61°}$
0,161	$0{,}343e^{i84{,}01°}$
0,131	$0{,}343e^{i112{,}20°}$
0,236	$0{,}281e^{i70{,}58°}$
0,299	$0{,}225e^{-i79{,}28°}$
0,274	$0{,}242e^{i94{,}76°}$
0,229	$0{,}151e^{-i100{,}87°}$
0,316	$0{,}157e^{i104{,}78°}$
0,289	$0{,}140e^{i101{,}67°}$
0,236	$0{,}137e^{-i106{,}87°}$
0,238	$0{,}119e^{-i120{,}16°}$
0,315	$0{,}174e^{-i109{,}41°}$
0,205	$0{,}342e^{i85{,}236°}$
0,257	$0{,}280e^{-i79{,}85°}$
0,193	$0{,}344e^{-i81{,}57°}$
0,255	$0{,}171e^{i61{,}89°}$
0	0,250

6. Questioni aperte

Quanto discusso è una proposta di modellizzazione, inziale e incompleta. Un gran numero di questioni che essa solleva attendono ancora un chiarimento, prima che questa proposta sfoci in una teoria! Ad esempio:

- Qual è il significato dell'angolo di interferenza, ammesso che ve ne sia uno?

- In che modo i valori trovati differiscono fra gli individui? E perché?

- Qual è l'influenza del contesto per un individuo?

- I valori trovati dipendono dal tempo per uno stesso individuo? In che modo?

- C'è un modo per effettuare previsioni dei valori *ex ante*?

- Ci sono dei casi in cui sperimentalmente non si ottiene $|\cos\phi| \leq 1$, ma $|\mathrm{Ch}\phi| \geq 1$. Che cosa significa?

- La questione di base è: quest'approccio per ora è poco più che empirico, può essere fondato epistemologicamente, e diventare una teoria? Forse verso una teoria comune, che in qualche modo unifichi le scienze naturali e le scienze umane?

Qualche indicazione bibliografica

Aerts D. (2009) Quantum Structure in Cognition, *Journal of Mathematical Psychology: 53*, 314-348.

Aerts D., Broekaert J., Gabora L., Veloz T. (2012) The Guppy Effect as Interference, arXiv:1208.2362v1.

Aerts. D., Gabora L., Sozzo S. (2013) Concepts and Their Dynamics: A Quantum-Theoretic Modeling of Human Thought, arXiv:1206.1069v2.

Allais M. (1953b) Le comportement de l'homme rationnel devant le risque. Critique des postulats et des axiomes de l'école américaine, *Econometrica, 21*, 503-546.

Bertuglia C.S., Vaio F. (2011) *Complessità e modelli. Un nuovo quadro interpretativo per le scienze della natura e della società*, Bollati Boringhieri, Torino.

Gabora L., Aerts D. (2002) Contextualizing Concepts Using a Mathematical Generalization of the Quantum Formalism, *Journal of Theoretical end Experimental Artificial Intelligence, 14*, 327-358.

Jaffé W. (ed.) (1965) *Correspondence of Leon Walras and Related Papers*, 3 volumes, North Holland (for Royal Netherlands Academy of Sciences and Letters), Amsterdam.

Hampton J.A. (1988a) Overextension and Conjuntive Concepts: Evidence for a Unitary Model for Concept Typicality and Class Inclusion, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory & Cognition , 14*, 12-32.

Hampton J.A. (1988b) Disjunction of Natural Concepts, *Memory & Cognition, 16*, 579-591.

Ingrao B., Israel G. (1987) *La mano invisibile. L'equilibrio economico nella storia della scienza*, Laterza, Bari.

Kahneman D., Tversky A. (1979) Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk, *Econometrica, 47*, 263-291

Khrennikov A.Yu. (2009) *Interpretations of Probability*, Walter de Gruyter, Berlin.

Khrennikov A.Yu. (2011) *Ubiquitous Quantum Structure. From Psychology to Finance*, Springer, Heidelberg.

Khrennikov A.Yu., Haven E. (2008) The Importance of Probability Interference in Social Science: Rationale and Experiment, arXiv:0709.2802v1.

Khrennikov A.Yu., Haven E. (2009) Quantum Mechanics and Violations of the Sure-thing Principle: The Use of Probability Interference and Other Concepts, *Journal of Mathematical Psychology, 53,* 378-388.

Merli G.P., Missiroli G.F., Pozzi G. (1976) On the Statistical Aspect of Electron Interference Phenomena, *American Journal of Physics, 44*, 306-307.

Osherson D.N., Smith E.E. (1981) On the Adequacy of Prototype Theory as a Theory of Concepts, *Cognition, 9*, 35-58.

Tonomura A., Endo J., Matsuda T., Kawasaky T., Ezawa H. (1989) Demonstration of Single-electron Buildup of an Interference Pattern, *American Journal of Physics, 57*, 117-120.

Tversky A., Shafir E. (1992) The Disjunctin Effect in Choice Under Uncertainty, Psychological *Science, 3*, 305-309.

Grazie!