

# HPFBU

## Hızlandırıcı Fiziği

### Enine Demet Dinamiği II

Dr. Öznur METE

University of Manchester

The Cockcroft Institute of Accelerator Science and Technology

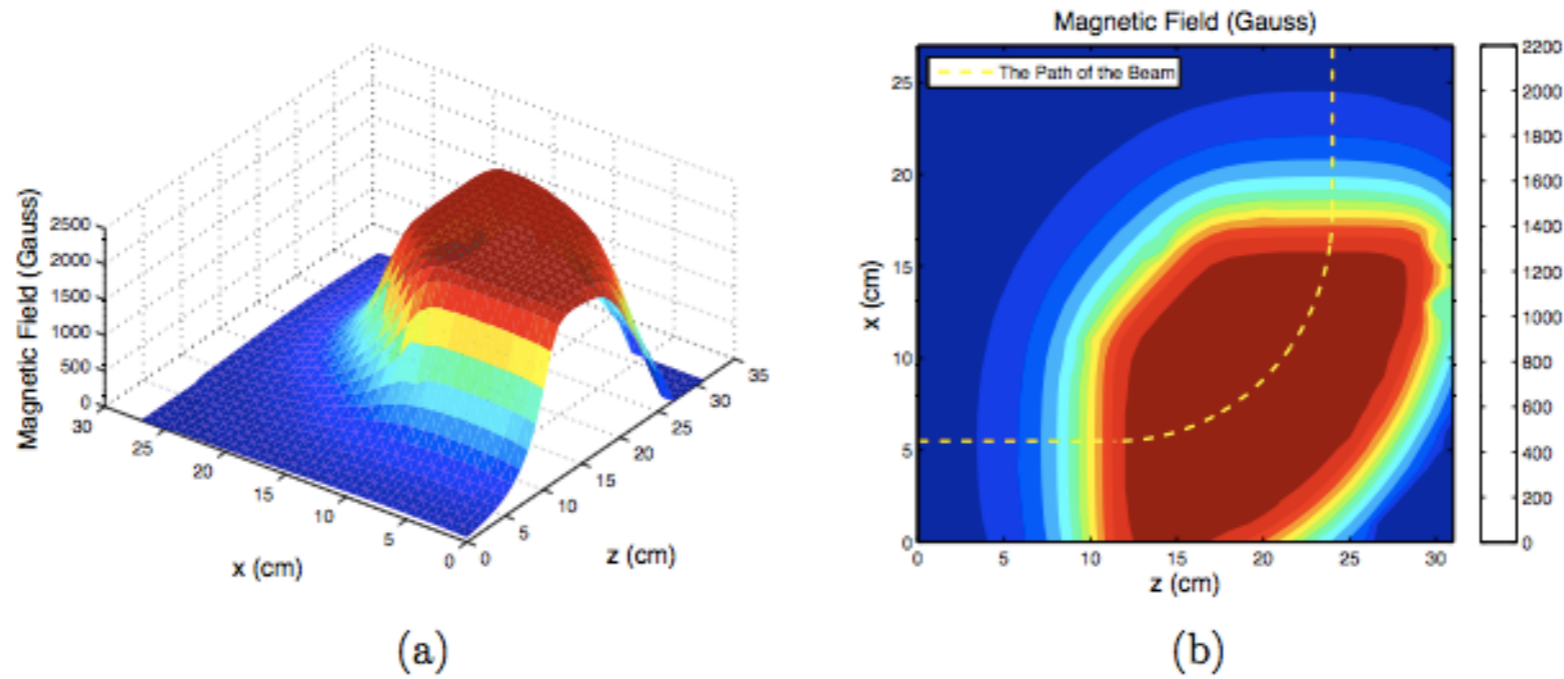
#### İletişim Bilgileri

[oznur.mete@cockcroft.ac.uk](mailto:oznur.mete@cockcroft.ac.uk)

[oznur.mete@manchester.ac.uk](mailto:oznur.mete@manchester.ac.uk)

[www.cern.ch/omete](http://www.cern.ch/omete)

# Örgü Tasarımı ile ilgili bazı eşitlikler



**Bir depolama halkası dipole magnetinin magnetik alan haritası.**

$$\alpha = \frac{ds}{\rho} \approx \frac{dl}{\rho} \qquad \alpha = \frac{B * dl}{B * \rho}$$

Bir halkanın bütünü için:

$$\alpha = \frac{\int B dl}{B * \rho} = 2\pi \rightarrow \int B dl = 2\pi * \frac{p}{q}$$

## Dairesel Yörünge

Halka tipli bir hızlandırıcıda parçacıkları dairesel bir yörüngede tutabilmek için iki-kutuplu (dipole) magnetler kullanılır.

Temel olarak, dairesel bir hızlandırıcıda geometriyi dipole magnetler belirler.

$$\int B ds = N * B_0 * l_{eff} = 2\pi \frac{p}{q}$$

$l_{eff}$  -> magnetin etkin uzunluğu,  $N$  -> magnet sayısı

**Örnek: LHC Dipoles...**

$$N = 1232$$

$$l = 15m$$

$$q = +1e$$

$$\int B dl = NlB = 2\pi p/e$$

$$B \approx \frac{2\pi 7000 * 10^9 eV}{e * 1232 * 15m * 3 * 10^8 m/s} = 8.3 Tesla$$

## Periyodik örgü hücreleri için iletim matrisi

## Beta fonksiyonu cinsinden iletim matrisi

$$(1) \quad \sin(a + b) = \sin(a) * \cos(b) + \cos(a) * \sin(b) \quad \cos(a + b) = \cos(a) * \cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$(2) \quad \begin{aligned} x(s) &= \sqrt{\epsilon} \sqrt{\beta_s} (\cos \psi_s \cos \phi - \sin \psi_s \sin \phi) \\ x'(s) &= -\frac{\sqrt{\epsilon}}{\beta_s} (\alpha_s \cos \psi_s \cos \phi - \alpha_s \sin \psi_s \sin \phi + \sin \psi_s \cos \phi + \cos \psi_s \sin \phi) \end{aligned}$$

$$(3) \quad \text{Başlangıçta,} \quad x(0) = x_0, \psi(0) = 0 \quad \cos \phi = \frac{x_0}{\sqrt{\epsilon \beta_0}} \quad \sin \phi = -\frac{1}{\epsilon} (x'_0 \sqrt{\beta_0} + \frac{\alpha_0 x_0}{\sqrt{\beta_0}})$$

$$(4) \quad \begin{aligned} x(s) &= \sqrt{\frac{\beta_s}{\beta_0}} (\cos \psi_s + \alpha_0 \sin \psi_s) x_0 + (\sqrt{\beta_s \beta_0} \sin \psi_s) x'_0 \\ x'(s) &= \frac{1}{\sqrt{\beta_s \beta_0}} ((\alpha_0 - \alpha_s) \cos \psi_s - (1 + \alpha_0 \alpha_s) \sin \psi_s) x_0 + \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_s}} (\cos \psi_s - \alpha_s \sin \psi_s) x'_0 \end{aligned}$$

$$(5) \quad M = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_s}{\beta_0}} (\cos \psi_s + \alpha_0 \sin \psi_s) & (\sqrt{\beta_s \beta_0} \sin \psi_s) \\ \frac{1}{\sqrt{\beta_s \beta_0}} ((\alpha_0 - \alpha_s) \cos \psi_s - (1 + \alpha_0 \alpha_s) \sin \psi_s) & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_s}} (\cos \psi_s - \alpha_s \sin \psi_s) \end{pmatrix}$$

## Periyodik örgü için iletim matrisinin bulunması

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_s}{\beta_0}}(\cos\psi_s + \alpha_0\sin\psi_s) & (\sqrt{\beta_s\beta_0}\sin\psi_s) \\ \frac{1}{\sqrt{\beta_s\beta_0}}((\alpha_0 - \alpha_s)\cos\psi_s - (1 + \alpha_0\alpha_s)\sin\psi_s) & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_s}}(\cos\psi_s - \alpha_s\sin\psi_s) \end{pmatrix}$$

Periyodik örgüde bir devir sonunda Twiss parametreleri başlangıçtaki değerlerini alacaktır.

$$\beta_s = \beta_{s+L} \quad \alpha_s = \alpha_{s+L} \quad \gamma_s = \gamma_{s+L} \quad \longrightarrow \quad \beta_0 = \beta_s, \alpha_0 = \alpha_s,$$

$$M(1,1) \quad \cos\psi_{turn} + \alpha_s\sin\psi_{turn}$$

$$M(1,2) \quad \beta_s\sin\psi_{turn}$$

$$M(2,1) \quad -\frac{(1 + \alpha_s^2)}{\beta_s}\sin\psi_{turn}$$

$$M(2,2) \quad \cos\psi_{turn} - \alpha_s\sin\psi_{turn}$$

$$M(s) = \begin{pmatrix} \cos\psi_{turn} + \alpha_s\sin\psi_{turn} & \beta_s\sin\psi_{turn} \\ -\gamma_s\sin\psi_{turn} & \cos\psi_{turn} - \alpha_s\sin\psi_{turn} \end{pmatrix}$$

## Twiss parametrelerinin dönüşümü

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_s = M * \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{s_0} \quad \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_0 = M^{-1} * \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_s$$

$$M = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} S' & -S \\ -C' & C \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= S'x - Sx' \\ x'_0 &= -C'x + Cx' \end{aligned}$$

$$\epsilon = \text{constant}$$

**Liouville Theorem** →

$$\epsilon = \beta_s x'^2 + 2\alpha_s x x' + \gamma_s x^2$$

$$\epsilon = \beta_0 x_0'^2 + 2\alpha_0 x_0 x_0' + \gamma_0 x_0^2$$

►  $x_0$  ve  $x_0'$  ifadelerini eşitlikte yerlerine koyalım;  $x$  ve  $x'$  cinsinden düzenleyip katsayılarını karşılaştıralım.

$$\epsilon = \beta_0 (Cx' - C'x)^2 + 2\alpha_0 (S'x - Sx')(Cx' - C'x) + \gamma_0 (S'x - Sx')^2$$

$$\beta(s) = C^2\beta_0 - 2SC\alpha_0 + S^2\gamma_0$$

$$\alpha(s) = -CC'\beta_0 + (SC' + S'C)\alpha_0 - SS'\gamma_0$$

$$\gamma(s) = C'^2\beta_0 - sS'C'\alpha_0 + S'^2\gamma_0$$

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} C^2 & -2SC & S^2 \\ -CC' & SC' + CS' & -SS' \\ C'^2 & -SS' & S'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$$

- Twiss parametrelerinin örgünün herhangi bir noktası için verilen değerleri ve iletim matrisi kullanılarak halkanın herhangi bir noktasındaki değerleri hesaplanabilir.
- Transfer matrisi örgü bileşenlerinin odaklama özellikleri ile verilir.



## Özetle...

Periyodik örgü hücreleri için iletim matrisi

$$M = \begin{pmatrix} \cos\mu + \alpha(s)\sin\mu & \beta(s)\sin\mu \\ -\gamma(s)\sin\mu & \cos\mu - \alpha(s)\sin\mu \end{pmatrix}$$

Kararlılık koşulu

$$\text{Trace}(M) < 2$$

Twiss parametreleri için iletim matrisi

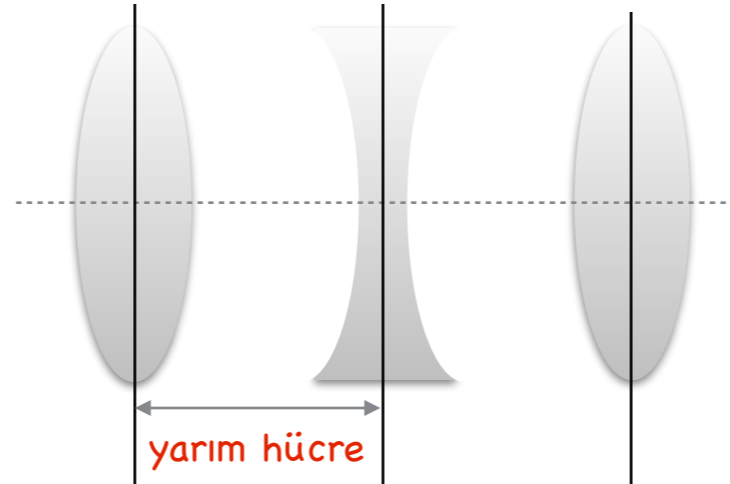
$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} C^2 & -2SC & S^2 \\ -CC' & SC' + CS' & -SS' \\ C'^2 & -SS' & S'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$$

- ▶ İletim matrisi periyodik örgüler için basitleşiyor.
- ▶ Twiss parametreleri  $\alpha, \beta, \gamma$  halka üzerindeki konuma, "s", bağlıdır. Faz ilerlemesi,  $\mu$ , (phase advance) ise konumdan bağımsızdır.

-.-.-.-.-

## Hatırlayalım: FODO Hücresi

-.-.-.-.-



$$M_{FODO} = M_{QF} * M_D * M_{QD} * M_D * M_{QF}$$

$$M_{QF} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{|K|}s & \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sin \sqrt{|K|}s \\ -\sqrt{|K|} \sin \sqrt{|K|}s & \cos \sqrt{|K|}s \end{pmatrix}$$

$$M_D = \begin{pmatrix} 1 & l_d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

-.-.-.-.- FODO Hücresi -.-.-.-.-

İnce mercek yaklaşımı altında bir FODO hücresinin iletim matrisi:

$$M_{FODO} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l^2}{2f^2} & 2l\left(1 - \frac{l}{2f}\right) \\ -\frac{l}{2f^2}\left(1 + \frac{l}{2f}\right) & 1 - \frac{l^2}{2f^2} \end{pmatrix}$$

Evre ilerlemesinin FODO parametreleri cinsinden ifade edilmesi:

$$\cos(\mu) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{l_d^2}{2\tilde{f}^2} + 1 - \frac{l_d^2}{2\tilde{f}^2} \right)$$

$$1 - 2\sin^2(\mu/2) = \left( 1 - \frac{l_d^2}{2\tilde{f}^2} \right)$$

$$\sin(\mu/2) = \frac{L_{Cell}}{4f}$$

Burada  $f$  yarım bir dört kutupluya ait odak uzaklığını vermektedir.

$$\tilde{f} = 2f$$

$$l_D = L_{Cell}/2$$

-.-.-.-.- **FODO Hücresi** -.-.-.-.-

### Dört-kutuplu magnetlerin kuvveti ve magnet uzunlukları

$$K = \pm 0.54102 m^{-2}$$

$$l_q = 0.5 m$$

$$l_d = 2.5 m$$

$$M_{FODO} = \begin{pmatrix} 0.707 & 8.206 \\ -0.061 & 0.707 \end{pmatrix}$$

### FODO hücresinin kararlılığı

$$Trace(M_{FODO}) = 1.415 \rightarrow < 2$$

### Hücre başına evre ilerlemesi

$$M(s) = \begin{pmatrix} \cos\psi_{turn} + \alpha_s \sin\psi_{turn} & \beta_s \sin\psi_{turn} \\ -\gamma_s \sin\psi_{turn} & \cos\psi_{turn} - \alpha_s \sin\psi_{turn} \end{pmatrix}$$

$$\cos(\mu) = \frac{1}{2} * Trace(M_{FODO}) = 0.707$$

$$\mu = \arccos\left(\frac{1}{2} * Trace(M_{FODO})\right) = 45^\circ$$

### Alpha, beta fonksiyonları

$$\alpha = \frac{M(1,1) - \cos(\mu)}{\sin(\mu)} = 0 \quad \beta = \frac{M(1,2)}{\sin(\mu)} = 11.611 m$$

## Özetle...

FODO hücresi başına faz ilerlemesi  
(ince mercek yaklaşımı altında)

$$\sin \frac{\mu}{2} = \frac{L_{Cell}}{4f_Q}$$

FODO hücresi için kararlılık

$$f_Q > \frac{L_{Cell}}{4}$$

$L_{Cell}$  , FODO hücresinin uzunluğu

$f_Q$  , dört kutuplunun odak uzaklığı

$\mu$  , hücre başına evre ilerlemesi

## FODO hücresinde beta fonksiyonları

(ince mercek yaklaşımı altında)

Hatırlayalım...

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_s}{\beta_0}} (\cos\psi_s + \alpha_0 \sin\psi_s) & (\sqrt{\beta_s \beta_0} \sin\psi_s) \\ \frac{1}{\sqrt{\beta_s \beta_0}} ((\alpha_0 - \alpha_s) \cos\psi_s - (1 + \alpha_0 \alpha_s) \sin\psi_s) & \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta_s}} (\cos\psi_s - \alpha_s \sin\psi_s) \end{pmatrix}$$

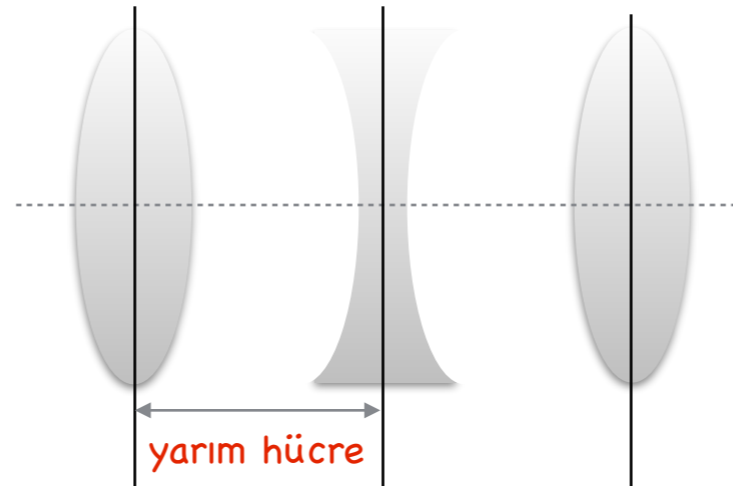
- ▶ FODO hücreesindeki bir odaklayıcı (dağıtıcı) magnetin tam ekseninde  $\alpha=0$ .
- ▶ Buna göre hücrenin ilk yarısı boyunca beta fonksiyonu  $\beta_{\max}$ 'dan  $\beta_{\min}$ 'e doğru evrilecektir.

$$M = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\check{\beta}}{\hat{\beta}}} \cos\mu/2 & (\sqrt{\check{\beta}\hat{\beta}} \sin\mu/2) \\ -\frac{1}{\sqrt{\hat{\beta}\check{\beta}}} \sin\mu/2 & \sqrt{\frac{\hat{\beta}}{\check{\beta}}} \cos\mu/2 \end{pmatrix}$$

[back...](#)

**FODO hücresinde beta fonksiyonları** (ince mercek yaklaşımı altında)

Bir FODO hücresinde odaklayıcı magnetten dağıtıcı magnete doğru ilerleyelim...



$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_d}{2f} & l_d \\ -\frac{l_d}{4f^2} & 1 + \frac{l_d}{2f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S \\ C' & S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\hat{\beta}}{\check{\beta}}} \cos \mu/2 & (\sqrt{\hat{\beta}\check{\beta}} \sin \mu/2) \\ -\frac{1}{\sqrt{\hat{\beta}\check{\beta}}} \sin \mu/2 & \sqrt{\frac{\hat{\beta}}{\check{\beta}}} \cos \mu/2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{S'}{C} = \frac{\hat{\beta}}{\check{\beta}} = \frac{1 + \frac{l_d}{2f}}{1 - \frac{l_d}{2f}} = \frac{1 + \sin \mu/2}{1 - \sin \mu/2} \qquad \frac{S}{C'} = \hat{\beta}\check{\beta} = 4f^2 = \frac{l_d^2}{\sin^2 \mu/2}$$

$$\hat{B} = \frac{(1 + \sin \frac{\mu}{2}) L_{Cell}}{\sin \mu} \qquad \check{B} = \frac{(1 - \sin \frac{\mu}{2}) L_{Cell}}{\sin \mu}$$

Ek olarak...

**FoDo Hücresi için Dağılım ifadesi**

$$\hat{D} = \frac{l^2}{\rho} * \frac{1 + \frac{1}{2} \sin \frac{\mu}{2}}{\sin^2 \frac{\mu}{2}}$$

$$\check{D} = \frac{l^2}{\rho} * \frac{1 - \frac{1}{2} \sin \frac{\mu}{2}}{\sin^2 \frac{\mu}{2}}$$

**Düşük dağılım:**

- zayıf dipoller
- geniş eğim açısı
- kısa hücreler

**Bir hücrenin renklilik ifadesi**

$$Q'_{total} = -\frac{1}{4\pi} \oint (K(s) - mD(s))\beta(s)ds$$

**Düşük renklilik:**

- zayıf odaklama
- küçük  $\beta$



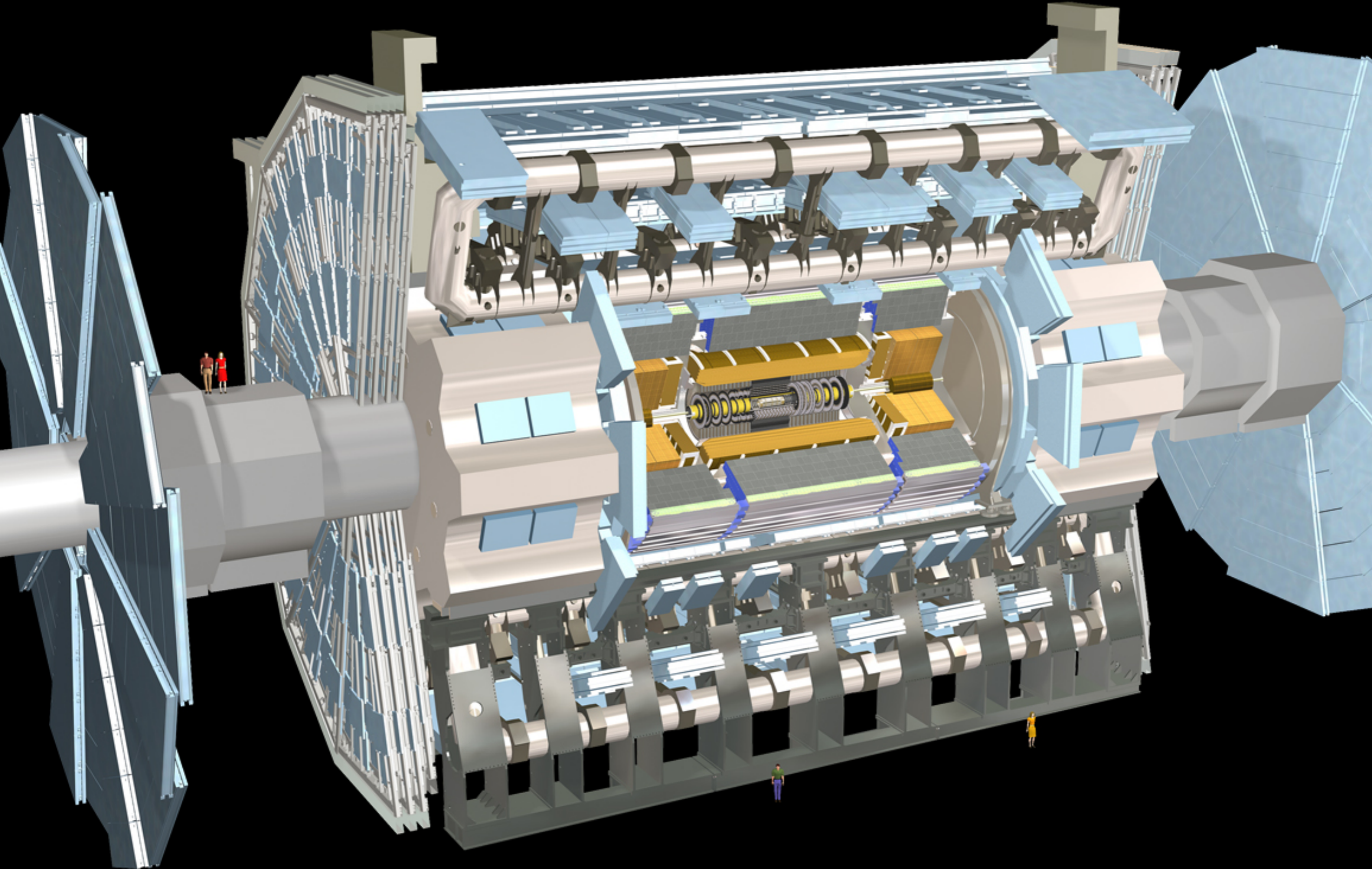
## Özetle...

- ▶ Bir görelî yüklü parçacık demeti için depolama halkası "yayı" genellikle düzenli tekrarlayan tekli magnet öğelerinden oluşur. Örnek: FODO örgüsü.
- ▶ Yayıdaki demet parametreleri için birincil bir öngörüü bu bölgedeki dört kutuplulardaki değerlerinden edinebiliriz.

## Bundan sonra...

Küçük bir ayrıntı!

**Ara eklentiler (Insertions)!!**



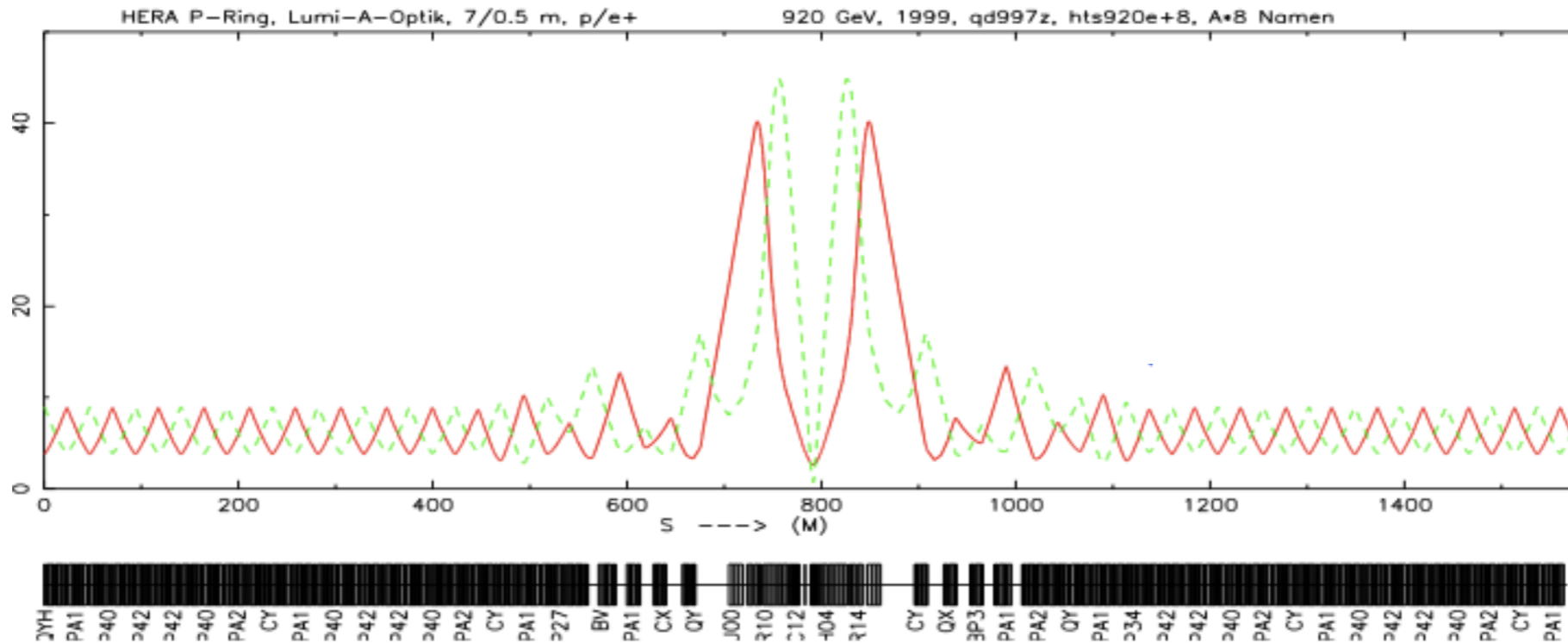
## Ufak $\beta$ 'lı ara eklentiler

- ▶ Yaydaki **zamanda düzenli (periyodik) çözümü** hesaplayalım.
- ▶ Ara eklenti için kullanılmak üzere **sürüklenme boşluğu** ekleyelim (algıç, RF malzemesi, ölçüm aletleri...).
- ▶ Etkileşme noktasına olabildiğince yakın bir yere bir **dört kutuplu (quadrupole)** yerleştirelim.
- ▶ Demet parametrelerini yayın başlangıcına denkleme için ek **dörtlü kutuplu mercekleri** yerleştirebiliriz.
- ▶ Bunun için **yeğleştirilecek (optimization) ve denkleştirilecek parametreler:**  $\alpha_{x,y}, \beta_{x,y}, Q_{x,y}, D_x, D'_x$

**Etkileşim noktasındaki parametreler:**

$$L = \frac{1}{4\pi} \frac{f_{rev} N_1 N_2}{\sigma_x^* \sigma_y^*}$$

**Daha fazlası...**  
**Dağılım bastırıcı düzenekler...**  
**(dispersion suppressors)**





# Örnek Alıştırmalar ve Ödevler

## Bu aıştırmada...

- ▶ 20 GeV/c momentumlu gercekci bir proton hızlandırıcısı tasarlayınız. Aşağıda verilen parametreleri kullanınız:
  - ❖ Çevre = 1000 m
  - ❖ Kullanılacak dört-kutuplu magnetlerin uzunluğu = 3.0 m
  - ❖ Hızlandırıcınızı 8 tane FODO hücresi kullanarak tasarlayınız.
  - ❖ Kullanılacak eğici magnetlerin uzunluğu 5 m, maksimum alanları 3 T
- ▶ Önceki derslerde öğrendiklerinizi kullanarak:
  - ❖ Sınır koşullarına göre (eğici ve odaklayıcı magnetlerin konumu) bir örgü tanımlayınız.
  - ❖ Maksimum beta fonksiyonu değerinin 300 m civarında olmasını sağlayacak optik değerlerini (eğici ve odaklayıcıların kuvveti) hesaplayınız.  $\beta_{max} \equiv \hat{\beta}$
  - ❖ Modelinizi "ince mercek yaklaşımı" kullanarak MADX'e uygulayacağız. Sonuçları hesaplarınızla karşılaştıracacağız.